



Universidad Politécnica de Tulancingo

Dirección de Investigación y Posgrado

“GESTIÓN ECONÓMICA ÓPTIMA EN MICRO-REDES CON FUENTES ALTERNAS DE ENERGÍA Y ALMACENAMIENTO”

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORADO EN OPTOMECASTRÓNICA**

PRESENTA

Francisco Daniel Santillán Lemus

Director de Tesis

Dr. Felipe Coyotl Mixcoatl
Dr. Hertwin Minor Popocatl

Tulancingo, Hgo. marzo de 2021



**DIRECCIÓN DE
INVESTIGACIÓN
Y POSGRADO**

Universidad Politécnica de Tulancingo

Dirección de Investigación y Posgrado

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de Tulancingo Hidalgo el día 1 de marzo de 2021, el que suscribe **FRANCISCO DANIEL SANTILLAN LEMUS**, alumno del programa educativo de **DOCTORADO EN OPTOMECASTRÓNICA**, con número de registro **1815002**, adscrita a la Dirección de Investigación y Posgrado, manifiesta que es el autor intelectual del presente trabajo de tesis, bajo la dirección del Grado y nombre del director de tesis y cede los derechos del trabajo titulado **“GESTIÓN ENERGÉTICA ÓPTIMA EN MICRO-REDES CON FUENTES ALTERNAS DE ENERGÍA Y ALMACENAMIENTO”** a la Universidad Politécnica de Tulancingo para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones **fdanielsale@hotmail.com**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

FRANCISCO DANIEL SANTILLAN LEMUS

Universidad Politécnica de Tulancingo

Dirección de Investigación y Posgrado

Por este medio nos permitimos informar a Ustedes la Aprobación de la tesis con título: **“GESTIÓN ENERGÉTICA ÓPTIMA EN MICRO-REDES CON FUENTES ALTERNAS DE ENERGÍA Y ALMACENAMIENTO”**, que presenta el alumno: **FRANCISCO DANIEL SANTILLAN LEMUS**, como requisito para obtener el grado de **Doctor en Optomecatrónica** en este Programa Académico.

Atentamente

Comité de Doctorado en Optomecatrónica

Dr. Felipe Coyotl Mixcoatl

Director de Tesis

Nombre del Asesor de la tesis

Nombre del asesor de la tesis

Asesor

Asesor

Tulancingo, Hgo., marzo 2021.

ACTA DE COLOQUIO DE TESIS

DICTAMEN DE COLOQUIO DE TESIS

Dedicatoria.

- A la memoria de mis padres y hermano, que siempre están en mis recuerdos.
- A mis hijos, presentes en mí todos los días.
- A mis hermanos y sobrinos.

Agradecimientos:

Al cuerpo académico del Doctorado en Optomecatrónica, en especial a mis asesores.

Al CONACYT por ser una Institución que realmente fomenta la investigación al otorgar las becas PNPB, que sin lugar a dudas es un factor de desarrollo de la sociedad al seguir destinando a esta actividad parte de mis contribuciones fiscales aunadas a las de todos mis compatriotas.

Índice General

Capítulo 1 Introducción.

- 1.1 Prefacio.
- 1.2 Generación centralizada.
- 1.3 Despacho energético.
- 1.4 Generación distribuida.
- 1.5 Planteamiento del problema.
- 1.6 Objetivo general.
- 1.7 Objetivos específicos.
- 1.8 Análisis bibliográfico.
- 1.9 Aportación de la investigación
- 1.10 Organización de la tesis.

Capítulo 2. Funciones multi-variables.

- 2.1. Desigualdad de Cauchy.
- 2.2. Valores extremos.
- 2.3. Funciones convexas.
- 2.4. Funciones integrales convexas.
- 2.5. Optimización.
- 2.6. Mínimo global.
- 2.7. Restricciones.
- 2.8. Minimización de funciones convexas
- 2.9. Extrema con restricciones: multiplicadores lagrangianos.
- 2.10. Las ecuaciones de Euler-Lagrange
- 2.11. Condiciones necesarias para un mínimo local

Capítulo 3. Programación matemática.

- 3.1. Optimización sin restricciones.
- 3.2. Métodos de minimización no lineal
 - 3.2.1. Punto actual
 - 3.2.2. Estándar
- 3.3. Métodos de búsqueda alternos.
- 3.4. Método de gradiente conjugado pre-acondicionado
- 3.5. Optimización sin restricciones
- 3.6. Métodos cuasi-Newton
- 3.7. Búsqueda de línea
- 3.8. Actualización hessiana
- 3.9. Algoritmo simplex de Nelder-Mead
- 3.10. Optimización restringida.
- 3.11. Método de gradiente conjugado preacondicionado
 - 3.11.1. Restricciones de igualdad lineal.
 - 3.11.2. Restricciones de caja o de límites
- 3.12. Ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
- 3.13. Programación cuadrática secuencial (SQP)
- 3.14. Implementación de SQP

- 3.14.1. Actualización de la matriz de Hesse
- 3.14.2. Solución de programación cuadrática
- 3.14.3. Función de búsqueda de línea y mérito
- 3.15. Algoritmo SQP
- 3.16. Algoritmo de punto interior
 - 3.16.1. Paso directo
 - 3.16.2. Paso de gradiente conjugado

Capítulo 4 Despacho energético y micro-redes.

- 4.1. Conceptos
- 4.2. Flujo de potencia
- 4.3. Red eléctrica (Generación centralizada)
- 4.4. Gestión de la red eléctrica.
- 4.5. Micro-red
 - 4.5.1. Control y operación.
 - 4.5.2. Estructura y características.
 - 4.5.3. Control en DG.
 - 4.5.4. DG despachables.
 - 4.5.5. DG no despachables.
 - 4.5.6. Cargas en la micro-red.
 - 4.5.7. Estrategia de control
- 4.6. Despacho de potencia y soporte de potencia real / reactiva
- 4.7. Control de formación de cuadrícula
- 4.8. Modelo de Control Predictivo
- 4.9. Programa de Respuesta a la demanda
- 4.10. Contingencia ambiental
- 4.11. Sistema de almacenamiento eléctrico a base de baterías

Capítulo 5 Caso de estudio.

- 5.1. Introducción.
- 5.2. Modelo matemático
- 5.3. Micro-red
- 5.4. Resultados
- 5.5. Discusión

Conclusiones.

Trabajos futuros.

Referencias.

Capítulo 1 Introducción.

3.1. Prefacio.

La energía eléctrica tiene diversos usos, entre los principales son: generar iluminación mediante lámparas; calor, en los sistemas de calefacción; movimiento, mediante motores que transforman la energía eléctrica en energía mecánica; comunicaciones mediante la generación y transmisión de señales de información, mediante sistemas electrónicos compuestos de telecomunicaciones, proceso de información en los sistemas de cómputo, entre otras muchas. En el uso doméstico de la electricidad se refiere a su empleo en los hogares, que facilitan y producen un ambiente más cómodo y confortable para la habitación, con los sistemas basados en la domótica. Por otro lado, los principales consumidores de electricidad son las industrias, destacando aquellas que tienen en sus procesos productivos instalados grandes hornos eléctricos, tales como siderúrgicas, cementeras, cerámicas y químicas, también son grandes consumidores los procesos de electrólisis en procesos como la producción de cloro y aluminio, así como las plantas de desalinización de agua de mar.

En este contexto, la utilización de la energía se ha convertido en uno de los pilares para el desarrollo de la sociedad y su consecuente necesidad de disponibilidad es vital para definir el avance de las economías mundiales. La época de energético barato y aparentemente infinito que sucedió durante gran parte del siglo XX basado en energías fósiles, se han transformado en este siglo XXI con el inicio de los años en que las reservas probadas de petróleo y gas natural tienen la posibilidad real del agotamiento total en un horizonte posterior al 2050 [1]. Aunado al poder que representa para algunos de los países productores el tener el control del suministro de las principales potencias mundiales y la aparentemente incontrolable inestabilidad de Oriente Medio, donde a los tradicionales conflictos árabe-israelíes se han sumado en la última década la guerra de los extremistas islámicos.

Así la incorporación de enormes superpotencias como China y Rusia al mercado energético, ha registrado una sucesión aparentemente interminable de crisis de los hidrocarburos, que hace necesario buscar alternativas de fuentes energéticas, que ha desarrollado la investigación orientada a las fuentes de energía renovables como son; biomasa, viento, agua y sol, donde la forma con mayor versatilidad para aplicar estos energéticos es mediante el uso de la energía eléctrica. En sentido estricto, se define como renovable cualquier proceso que no altere el equilibrio térmico del planeta ni genere residuos irrecuperables, además que la velocidad de su consumo no sea superior a la velocidad de regeneración de la fuente energética y de la materia prima utilizada en el mismo [1].

Por otro lado, los trastornos en nuestro planeta causados por el efecto invernadero han motivado a representantes de diversos países a integrar el Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC) y su protocolo de Kyoto, que representa el inicio de la implementación de una estrategia de respuesta internacional para combatir el cambio climático, donde se proponen políticas internacionales para la generación de un mercado internacional de carbono, así como establecer nuevos mecanismos institucionales que impulsen el desarrollo de sistemas de regulación de emisiones, que actualmente se encuentran en proceso de implementación mundial. Así los primeros

compromisos del Protocolo de Kyoto, se limitan a reducir o regenerar las emisiones contaminantes atmosféricas y uno de los sectores de mayor participación es la generación de energía eléctrica [2].

La electricidad generada a partir de fuentes renovables, como lo es la energía solar fotovoltaica, la eólica y los bio-carburantes, se encuentra en crecimiento de tal manera que en algunos países ya superó a la de origen nuclear. En este contexto, la Asociación Mexicana de Energía en nuestro país reportó en el VIII Congreso Anual de Asociaciones del Sector Energético (junio 2016) que la generación de energía eléctrica mediante ciclo combinado pasó del 10% en 1999 al 50% en 2015 del consumo nacional. De esta manera, la Secretaria de Energía (SENER) ha venido realizando una serie de esfuerzos en conjunto con la Comisión Federal de Electricidad (CFE) para conformar el Inventario Nacional de Energías Limpias (INEL) que tiene diversos propósitos y utilidades como: 1) Cumplir con lo establecido en la ley, 2) Impulsar la generación de energía eléctrica limpia, 3) Impulsar la investigación y el desarrollo de nuevos proyectos, 4) Ser una herramienta que sirva al estado mexicano para la toma de decisiones en políticas, marcos legales, incentivos económicos y fondos de financiamiento para facilitar el aprovechamiento de energía limpia, entre otros [3].

3.2. Generación centralizada.

La energía eléctrica al igual que el agua, los alimentos y el aire, se ha convertido en una parte integral de la vida diaria personal y empresarial, donde las personas se han acostumbrado tanto a accionar un interruptor y tener luz, acción o comunicación instantáneas, de tal manera que se le da poca importancia al proceso que produce esta energía eléctrica o cómo llega a donde se usa.

Con el inicio de una nueva era en la que la luz incandescente eléctrica reemplazó a las lámparas de aceite y las velas, lo que motivó a buscar y desarrollar fuentes de energía eléctrica, surgiendo pequeñas empresas localizadas en donde se encontraban el recurso natural primario, por ejemplo en Long Island (LI), Nueva York, la firma "Babylon Electric Light Company" en 1886 aprovechó la cascada de bajo nivel en Sumpwam's Creek para iluminar ocho tiendas y tres calles. Estas empresas eléctricas empezaron a utilizar energía hidroeléctrica como fuente primaria de energía y a medida que la innovación se impuso, los requisitos de energía eléctrica crecieron a partir del uso de luces y equipos eléctricos, también lo hizo el crecimiento de los generadores de energía eléctrica, así el tamaño de los generadores pasó de unos pocos cientos de vatios a miles de kilovatios, donde las nuevas fuentes de combustible necesarias para alimentar los generadores dieron lugar a calderas de carbón, petróleo y gas, aunado a que se desarrollaron nuevas formas de transmitir energía eléctrica a cierta distancia y condujeron a estaciones centrales más grandes en lugar de las estaciones pequeñas con cobertura de pequeñas áreas. A medida que evolucionó la transmisión de corriente alterna (CA) para permitir el envío de energía a distancias más largas y las primeras empresas eléctricas consolidaron sus territorios y comenzaron a interconectar sus sistemas. En este contexto la planeación y el desarrollo de estas primeras estaciones generadoras no se vieron obstaculizados por restricciones ambientales o regulaciones gubernamentales ya que su principal meta consistía en reunir suficiente capital para construir las estaciones más grandes y seleccionar el mejor sitio para el energético primario que se utilizaría y la carga que se serviría, con lo que se consolidó la generación centralizada en los lugares que se tenía la disponibilidad de la gran fuente

del recurso primario y trasmitirla ya como energía eléctrica a través de una extensa y compleja red a los grandes centros de consumo.

3.3. Despacho energético.

El sistema eléctrico en su acepción de generación centralizada, se puede dividir en tres áreas: **generación eléctrica** que consiste en su fabricación; **transmisión eléctrica** que consiste en su transporte para la entrega al por mayor y **distribución eléctrica** que consiste en su venta al por menor [4]. Así la empresa de servicios eléctricos es el proveedor básico de energía eléctrica y tal vez sea la única en el sentido de que casi todos hacen negocios con ella y dependen universalmente de su producto. Muchas personas no saben que una empresa de servicios públicos es una empresa comercial y debe cubrir los costos o superarlos para sobrevivir, a diferencia de otras empresas que producen productos básicos o servicios, está obligada a tener energía eléctrica disponible para satisfacer todas las demandas de los clientes cuando se necesitan y sus precios no están completamente bajo su control, ya que la regulación de los servicios públicos por parte de las agencias gubernamentales lleva a la percepción de que los servicios públicos son de hecho monopolios.

Por otro lado, partiendo del hecho en que el suministro de energía eléctrica en grandes volúmenes que representa la generación centralizada, en el sentido de que prácticamente todo lo que se produce no se almacena sino que se utiliza instantáneamente en las cantidades necesarias para atender la demanda y soportar las pérdidas por transmisión y distribución, lo cual forma parte del Sistema Eléctrico Nacional, que generalmente está integrado por; una Red Nacional de Transmisión; Las Redes Generales de Distribución; Las Centrales Eléctricas que entregan energía eléctrica a la Red Nacional de Transmisión o a las Redes Generales de Distribución; Los equipos e instalaciones de un Centro de Gestión, Control y Despacho, utilizados para llevar a cabo el Control Operativo del Sistema Eléctrico Nacional, que en el caso de nuestro país se refiere al Centro Nacional de Control de Energía (CENACE), que es un organismo público descentralizado cuyo objeto es ejercer el Control Operativo del Sistema Eléctrico Nacional; la Operación del Mercado Eléctrico Mayorista y garantizar imparcialidad en el acceso a la Red Nacional de Transmisión y a las Redes Generales de Distribución [5]. Realiza la operación del Mercado Eléctrico Mayorista en condiciones que promueven la competencia, eficiencia e imparcialidad, mediante la asignación y despacho óptimos de las Centrales Eléctricas para satisfacer la demanda de energía del Sistema Eléctrico Nacional.

Con el explosivo crecimiento en la demanda energética bajo el esquema de generación centralizada, también es evidente que se requieren nuevas líneas de transmisión para traer nuevas fuentes de energía a los centros de carga, que actualmente su crecimiento se ha visto frenado por sus altos costos y regulación. Estas líneas se convierten ahora en el eslabón débil de la cadena del suministro abierto a la desregulación, lo que hace notorio que tales líneas se construyen en lugares apartados por razones ambientales y económicas, que están sujetas a los caprichos de la naturaleza y el hombre (incluidos vándalos y saboteadores), que representa un problema crítico que debe resolverse en el futuro inmediato para quién los construye, posee y opera.

Dada la apertura en las políticas sobre la generación dentro de un mercado globalizado, algunas empresas de fabricación más grandes, consideran factible producir su propia

energía eléctrica utilizando su energía residual (denominado cogeneración) o teniendo sus propias plantas de energía individuales. En algunos casos, la legislación obliga a vender el exceso de energía de estas fuentes a tarifas generalmente más bajas de lo que la empresa de servicios públicos puede producir. El hecho es que las empresas de servicios públicos deben pagar los materiales, la mano de obra y el capital que necesitan y pagar impuestos al igual que otras empresas. Para obtener estos productos básicos necesarios para todas las empresas, las empresas de servicios públicos deben competir por ellos a precios generalmente dictados por el mercado, mientras que los precios cobrados por el producto producido (energía eléctrica) están limitados por las agencias gubernamentales.

3.4. Generación distribuida.

En las dos últimas décadas del siglo XX se registró una notable reducción en la instalación de nueva capacidad de generación de energía eléctrica en los Estados Unidos, con menos unidades construidas mientras se retiraban las plantas más antiguas, donde el margen de disponibilidad en comparación con la demanda cada vez mayor de electricidad indicaba el enfoque de una escasez con todos sus problemas asociados [4]. Quizá impulsado por la desregulación iniciada para los servicios públicos de inversionistas regulados, lo que inició un esfuerzo para revertir esta tendencia a fines de siglo para restaurar la posición vital de la generación en el nuevo milenio, que la pueden justificar varios factores:

- El declive de la generación nuclear en los EE. UU. Debido a la opinión pública adversa y los altos costos causados por la creciente complejidad de los requisitos promulgados por las agencias federales.
- La introducción de reglas estrictas para las emisiones por la Ley de Aire Limpio y otras regulaciones locales.
- La renuencia de las empresas reguladas a arriesgar gastos de capital ante la desregulación y desinversión de activos de generación, así como la incertidumbre de los costos finales por cambios en las regulaciones gubernamentales.
- Los esfuerzos para satisfacer las demandas eléctricas a través de la gestión de carga, conservación, cogeneración bajo el concepto de generación distribuida y energía verde, basada en celdas de combustible, energía solar, eólica, micro turbina, etc.

El nuevo milenio, con los métodos cambiantes de suministro eléctrico provocados por la desregulación, puede ver algún alivio en los problemas asociados con las plantas generadoras. También verá nuevos desafíos que, con certeza, serán superados por el ingenio y la industria comprobados de nuestros innovadores e ingenieros, los cuidadores de nuestra tecnología.

Los incentivos económicos, tecnológicos y ambientales están evolucionando de la tecnología de generación y transmisión de electricidad. Las instalaciones de generación centralizada están dando paso a una generación más pequeña y distribuida, en parte debido a la pérdida de las economías de escala tradicionales. La generación distribuida abarca una amplia gama de tecnologías de motor primario, como motores de combustión interna, turbinas de gas, micro-turbinas, energía fotovoltaica, pilas de combustible y energía eólica. La mayoría de las tecnologías emergentes, como las micro-turbinas, la energía fotovoltaica, las pilas de combustible y los motores de combustión interna de gas con generadores de imanes permanentes, tienen un inversor para

interactuar con el sistema de distribución eléctrica. Estas tecnologías emergentes tienen menos emisiones y el potencial de un costo menor en relación antagónica a las economías de escala tradicionales, su aplicación incluye soporte de energía en subestaciones, aplazamiento de actualizaciones en transmisión y distribución, además de generación en sitio, su penetración en los países desarrollados aún no ha alcanzado niveles significativos, sin embargo la situación está cambiando rápidamente y requiere atención a los problemas relacionados con la alta penetración de la generación distribuida por venir en el sistema de distribución. La aplicación indiscriminada de generadores distribuidos (GD) individuales puede causar tantos problemas como resolver iniciando por su conexión, sincronización y control en la red o subred. Una mejor manera de darse cuenta del potencial emergente de los GD es adoptar un enfoque de sistema que considere la generación y las cargas asociadas como un subsistema o una “micro-red”, este enfoque permite el control local de los GD, reduciendo o eliminando la necesidad del envío de la energía eléctrica con la consecuente eliminación de las situaciones a resolver en la red de transmisión eléctrica nacional.

Con la generación distribuida se puede operar en modo conectado a la red de distribución y durante las perturbaciones, la generación y las cargas correspondientes pueden separarse del sistema de distribución para aislar (modo isla) la carga de la micro-red de la perturbación y así mantener un alto nivel de servicio sin dañar la integridad de la red de transmisión. La instalación en isla intencional de generación y cargas tiene el potencial de proporcionar una confiabilidad local más alta que la proporcionada por el sistema eléctrico en su conjunto. Además el tamaño de las tecnologías de generación emergentes permite que los generadores se coloquen de manera óptima en relación con las cargas de calor permitidas para el uso del calor residual [6, 7]. Desde la perspectiva de la red eléctrica nacional, el concepto de micro-red es atractivo porque reconoce la realidad de que el sistema de distribución es extenso, antiguo y cambiará muy lentamente, con este concepto se permite una alta penetración de GD sin necesidad de rediseñar o reinventar el sistema de distribución en sí.

3.5. Planteamiento del problema.

En el contexto de un mercado globalizado y derivado de las modificaciones a la Ley de la Industria Eléctrica en el sentido a la apertura de los mercados en la producción y suministro [5], así como la inminente tendencia a la evolución hacia las redes inteligentes [8], que integran una diversidad de servicios al consumidor que conlleva la necesidad de un administrador que cuente con una gama de herramientas para cumplir con su función en la gestión, optimización y control de la micro-red, aunado a las políticas de conservación del medio ambiente [9].

En este sentido de tendencia en la tecnología [7], se infiere que una de las herramientas que el administrador de la micro-red necesita para operarla en modo mixto, es el procesar la información de demanda energética que deberá atender, para definir en forma óptima el ajuste que debe realizar en forma dinámica de cada una de las fuentes que debe utilizar para el despacho cumpliendo con los requisitos técnicos, de calidad, de ambiente y de rentabilidad, tanto en un control primario con prioridad de brindar el servicio en tiempo real como en un control secundario que busque la optimización de sus costos.

3.6. Objetivo general.

Definir un modelo de programación matemática que describa la función de costo de operación de una micro-red, multi-variable que logre su minimización en el despacho en micro-redes de energía eléctrica con corriente alterna que contenga fuentes alternas de generación, generadores despachables y sistema de almacenamiento a base de baterías, además considere un programa de restricción de la demanda y contingencia ambiental.

3.7. Objetivos específicos.

- Definir los elementos y variables a considerar en el sistema de micro-red a modelar.
- Establecer las condiciones de operación de una micro-red tanto para las fuentes alternas de energía como para los elementos despachables.
- Con base a la literatura técnica y científica actual, generar el modelo matemático de la función de costo a optimizar.
- Definir un caso de estudio que tenga la factibilidad de materializarlo en un proyecto.
- Establecer las condiciones propias o limitantes que debe considerar la búsqueda de optimalidad de la solución del caso planteado, así como las consideraciones técnicas asumidas.
- Definir los rangos de valores en los que operará el sistema planteado para obtener la optimización de la función de costo incluyendo el factor por recuperación de emisión de contaminantes.
- Seleccionar la propuesta de programación matemática que se adecue a los requerimientos de funcionamiento del caso de estudio planteado para el presente trabajo.

3.8. Análisis bibliográfico.

En [10] se sugiere un nuevo sistema de gestión de energía para una micro red conectada a la red de distribución con varios recursos de energía renovable que incluyen matrices fotovoltaicas (PV), generadores eólicas (WT), pila de combustible (FC), una micro-turbina (MT) y un sistema de almacenamiento eléctrico a base de baterías (BESS), con un modelo que evalúa el efecto de varias irradiancias en diferentes días y estaciones sobre la programación diaria de la micro-red, toma en cuenta las incertidumbres en la potencia de salida de PV y WT, así como el error de pronóstico de la demanda de carga y los cambios en la oferta de la red para la gestión óptima. En [11] se estudian los efectos de la dependencia dual del calor y la energía producidos por las unidades de cogeneración, así como el impacto del almacenamiento de energía eléctrica y del tanque de almacenamiento de calor en la solución óptima de despacho económico de MR. En [12] se propone un nuevo enfoque de modelado de la incertidumbre basado en el método de estimación de dos puntos de Hong (T-PEM) para la programación óptima del día anterior (ODAS) de un sistema de distribución inteligente (SDS) donde se busca minimizar el costo funcional de energía y los requisitos de reserva de SDS en presencia de WT, DE y BESS considerando las incertidumbres de la producción eólica y la demanda de carga. En [13], se establece el algoritmo matemático para un sistema de micro-red combinado de calor y energía (CHP) que incluye WT, PV, MT, FC, motores

diésel (DE) y una batería (BESS). En [14] se presenta una optimización cooperativa multi-objetivo para la gestión energética de las micro-redes (MR) conectadas en una red de distribución e introducen el Índice de Rendimiento de Independencia (IPI) para reducir el intercambio de energía con la red principal, lo cual es un concepto que analiza la MR como un elemento de una red superior. Recientemente se han realizado diversas investigaciones sobre la gestión de la energía de las MR y en [15] solo presentan una técnica de programación dinámica robusta para la gestión de la energía en la MR conectada a una red superior, en la que se consideran las incertidumbres en los recursos de energía renovable y las cargas. Por otro lado, con relación al enfoque de solución se han publicado algunos métodos y enfoques para resolver dichos problemas, como es el método de bifurcación y enlace [16], la descomposición de Benders [17], la relajación Lagrangiana [18], que son ejemplos de enfoques empleados para problemas de despacho económico con las características antes mencionadas. En [19], se propone una estrategia de gestión de energía para MR integrada con almacenamiento de energía híbrido que contiene batería de litio y supercondensador. Según el estado de funcionamiento en tiempo real de la energía renovable y los dispositivos de almacenamiento de energía, se ajusta el funcionamiento del sistema de almacenamiento de energía híbrido, para estabilizar la producción de energía renovable y la energía de intercambio entre la micro red y la red principal, con lo que el ciclo de vida de los dispositivos híbridos de almacenamiento de energía será más largo y los costos operativos de la energía renovable se pueden disminuir, sin embargo no considera la opción del programa RDE ni analiza la coherencia entre la atención técnica con la de su costo. En [20] se presenta una revisión general de varias metodologías en problemas de dimensionamiento de baterías, criterios de dimensionamiento y sus aplicaciones en el entorno de MR, donde se define en la programación de optimización de múltiples restricciones no lineales, de enteros mixtos y proporciona una nota general sobre la formulación de problemas, herramientas/software utilizados así como características de varias metodologías. En [21] se presenta el análisis de despacho económico dinámico (DED) con modelo de control predictivo (MCP) para una MR con fuentes de energía renovable (FER), programa de estímulo en la reducción de la demanda eléctrica (RDE) y presencia de contingencia ambiental (CA), teniendo en cuenta la regeneración en las emisiones de CO₂, SO₂ y NO_x con enfoque de programación cuadrática.

3.9. Aportación de la investigación

Tabla 1.1 Cuadro comparativo de la exploración de la literatura

Referencia	matrices fotovoltaicas PV	generadores eólicos WT	almacenamiento eléctrico con baterías BESS	motores diésel DE	Red Principal MG	Restricción de demanda DR	Contingencia ambiental EC
[10]	✓	✓	✓		✓		
[11]				✓			
[12]		✓	✓	✓			
[13]	✓	✓	✓	✓			

[15]	✓	✓			✓		
[19]			✓				
[20]	✓	✓	✓				
[21]	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Este trabajo	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

En la tabla 1.1 y 1.2 se presenta el resumen de la comparación entre este trabajo y los demás artículos relacionados en la literatura.

Tabla 1.2 Comparación del modelo propuesto y otros artículos

Ref	Modelo	Considera	Omite
[10]	Gestión de energía para una micro red conectada a la red de distribución	Las incertidumbres en la potencia de salida de las fuentes renovables.	El impacto económico de las fuentes despachables, algún programa de restricción de demanda y el factor de contingencia ambiental
[11]	Dependencia dual calor-energía producidos por las unidades de cogeneración.	Almacenamiento de energía y calor en la solución óptima de despacho económico.	La contribución de fuentes renovables, restricción en la demanda y contingencia ambiental.
[12]	Minimiza el costo funcional de energía y los requisitos de reserva	Incertidumbre con el método de estimación de dos puntos de Hong para la programación óptima del día anterior de un sistema de distribución inteligente.	Algunas fuentes renovables, la posibilidad de operar en modo conectado, algún programa de restricción de demanda y contingencia ambiental
[13]	Algoritmo para un sistema de micro-red combinado de calor y energía	Incluye fuentes despachables, energía renovable y almacenamiento.	La posibilidad de operar en modo conectado, ni considera algún programa de restricción en la demanda, así como la situación de la contingencia ambiental.
[14]	Gestión energética como optimización-cooperativa multi-objetivo.	A las micro-redes conectadas como elementos de una red de distribución e introducen el Índice de Rendimiento de Independencia para reducir el intercambio de energía con la red principal.	Los elementos generadores de las micro-redes, tanto los despachables como los renovables.
[15]	Programación dinámica robusta para la gestión de la energía	Fuentes despachables y renovables	Sistema de almacenamiento, restricción en la demanda, contingencia ambiental y operación en forma conectada.
[19]	Almacenamiento de energía híbrido que contiene batería y supercondensador	Solo el despacho energético y la respuesta en tiempo real del sistema de almacenamiento	La gestión económica de las fuentes despachables y renovables, así como la restricción en la demanda y la contingencia ambiental.
[20]	Revisión general de varias metodologías en problemas de dimensionamiento de baterías en micro-redes	Criterios de dimensionamiento y sus aplicaciones en el entorno de micro-redes, además define la programación de optimización de múltiples restricciones no lineales, de enteros mixtos y proporciona una nota general sobre la formulación de problemas.	Fuentes despachables, interconexión, restricción en la demanda y contingencia ambiental.
[21]	Análisis de despacho	Fuentes despachables,	Sistema de almacenamiento.

	económico dinámico con fuentes de alimentación alterna	renovables, restricción de la demanda y contingencia ambiental.	
Este trabajo	Gestión económica óptima en micro-redes con fuentes alternas de energía y almacenamiento	Sistema de almacenamiento de energía, fuentes renovables y despachables, restricción de la demanda y contingencia ambiental.	

Este trabajo considera el problema DED [22] con diferentes sistemas de generación distribuida que incluye fuentes de energía renovables (RES), BESS, además de la aplicación del Modelo de Control Predictivo (MPC) [23, 24, 25, 26] para definir los valores de entrada al algoritmo de despacho económico, considerando la gestión de variaciones tanto para cargas como para los generadores RES [27]. Además, la formulación propuesta incluye un programa de beneficios basado en EDR [28], donde los clientes obtienen un beneficio económico al reducir su consumo y son adecuadamente compensados en función de sus niveles de participación. Finalmente se incorpora el costo de tratamiento de los gases producidos para la regeneración en las emisiones de CO₂, SO₂ y NO_x, producidos por la operación de los generadores convencionales de la micro red durante los lapsos de contingencia ambiental (EC) [29, 21]. El enfoque de despacho a través de programación matemática busca reducir al mínimo el costo de combustible de los generadores convencionales, las transacciones de energía, la regeneración de emisiones contaminadas y finalmente, incluye el beneficio en la reducción de la demanda eléctrica satisfaciendo todas las restricciones a través de la programación matemática, en una estrategia donde se dé prioridad para atender la demanda a la generación de RES y cuando sea rentable, entregar/recibir energía a la red de distribución mediante la generación convencional, además de almacenar la energía cuando se tenga un exceso a costo bajo, para utilizarla cuando los costos de generación se incrementan como es en los casos de EC o picos de demanda.

3.10. Organización de la tesis.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se abordan los conceptos matemáticos que se requieren como herramienta para el estudio de la formulación de la tesis de este trabajo, a continuación se presenta el fundamento de la herramienta computacional para el tratamiento de los procesos de optimización en el capítulo 3, para luego en el capítulo 4 se muestra el soporte técnico de la ingeniería en la que se orientó la investigación del presente trabajo y en el capítulo 5 se aplica a un caso de estudio particular donde se muestran los resultados numéricos de los diferentes escenarios en los que se trató de llevar a los extremos de operación la micro red para evaluar la robustez del modelo matemático planteado en la presente tesis.

Capítulo 2. Funciones multi-variables.

En el presente capítulo se abordan los conceptos matemáticos que se requieren como herramienta para el estudio de la formulación de la tesis de este trabajo.

2.1. Desigualdad de Cauchy.

Sea una función de valor real f definida en un conjunto \mathfrak{D} en el espacio euclidiano, con la posible excepción de las observaciones relativas a la convexidad sobre cálculo multidimensional. Para $d = 1, 2, 3, \dots$, sea d -dimensional sobre el espacio euclidiano real donde un punto o vector típico $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ tiene la longitud expresada en (2.1).

$$|X| = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

que es positiva, a menos que $X = Q = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

En \mathbb{R}^d , con $Y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ tenemos las operaciones en el espacio vectorial de la suma de componentes de (2.2).

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d) \quad (2.2)$$

y la multiplicación escalar la describe (2.3):

$$aX \stackrel{\text{def}}{=} (ax_1, ax_2, \dots, ax_d) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

También podemos expresar $|X| = (X \cdot X)^{1/2}$, utilizando el producto escalar o la magnitud escalar de (2.4).

$$X \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^d x_j y_j \quad (2.4)$$

que está sujeto a la desigualdad de Cauchy enunciada en (2.5).

$$|(X \cdot Y)| \leq |X||Y| \quad |X + Y| \leq |X| + |Y| \quad ||X| - |Y|| \leq |X - Y| \quad (2.5)$$

donde $X - Y \stackrel{\text{def}}{=} X + (-1)Y$; $|X - Y|$ define la distancia euclidiana entre X e Y . Cuando $X_0 \in \mathbb{R}^d$, entonces para finito $\delta > 0$, la "esfera" será como describe (2.6).

$$S_\delta(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathbb{R}^d: |X - X_0| < \delta\} \quad (2.6)$$

A lo que se llama una vecindad (abierto) de X_0 , y se dice que X_0 es un punto interior de cada conjunto \mathfrak{D} que contiene esta vecindad para algunos $\delta > 0$. \mathfrak{D} está abierto cuando consiste enteramente en puntos interiores. Así un conjunto abierto \mathfrak{D} es un dominio cuando cada par de sus puntos puede estar conectado por una curva (poligonal) que se

encuentra completamente en \mathcal{D} . Cada esfera abierta es un dominio, como lo es cada "caja" abierta como (2.7).

$$B = \{X \in \mathbb{R}^d : a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, d\} \quad (2.7)$$

pero la unión de conjuntos abiertos disjuntos no es un dominio, aunque permanece abierto.

Un punto que no está en el interior de un conjunto S y que no es interior a su complemento, $\mathbb{R}^d \sim S$, se llama punto límite de S . El conjunto de tales puntos, denotado como ∂S , se llama límite de S . Por ejemplo, si $S = \{X \in \mathbb{R}^d : |X| \leq 1\}$ entonces como $\partial S = B = \{X \in \mathbb{R}^d : |X| = 1\}$; también $\partial B = B$. Se dice que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ está acotado si f es un subconjunto de alguna esfera.

2.2. Valores extremos.

Supóngase que se nos da una función de valor real que está definida en un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ para el que deseamos encontrar valores extremos. Es decir, deseamos encontrar puntos en \mathcal{D} (llamados puntos extremos) en los que f asume valores máximos o mínimos. Con tales problemas de optimización debemos tener en cuenta los siguientes hechos:

2.2.1. f no necesita tener valores extremos en \mathcal{D} .

Por ejemplo, cuando $\mathcal{D} = \mathbb{R}^1$, entonces la función $f(X) = x_1$ no está acotada en ambas direcciones en \mathcal{D} . Además, en el intervalo abierto $\mathcal{D} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^1$, esta misma función aunque acotada, toma valores tan cercanos a ± 1 como queramos, pero no asume los valores ± 1 en \mathcal{D} . En el intervalo cerrado, $\mathcal{D} = [-1, 1]$, esta función asume tanto valores máximos como mínimos, pero la función nuevamente es ilimitada.

$$f(X) = \frac{1}{x_1} \quad x_1 \neq 0 \quad f(Q) = 0 \quad (2.8)$$

2.2.2. f puede asumir solo un valor extremo en \mathcal{D} .

Por ejemplo, en $\mathcal{D} = (-1, 1]$ la función $f(X) = x_1$ asume un valor máximo (+ 1), pero no un valor mínimo, mientras que en $(-1, 1)$ la función $f(X) = x_1^2$ asume un valor mínimo (0) pero no un valor máximo.

2.2.3. f puede asumir un valor extremo en más de un punto.

En $\mathcal{D} = [-1, 1]$, $f(X) = x_1^2$ asume un valor máximo (1) en $x_1 = \pm 1$, mientras que en $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, $f(X) = x_1^2$ asume su valor mínimo (0) en cada punto ubicado en el eje x_2 . Las únicas condiciones razonables que garantizan la existencia de valores extremos están contenidas en el siguiente teorema

Teorema 2.1. Si $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ es compacto y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo, entonces f asume valores máximos y mínimos en \mathcal{D} .

En \mathbb{R}^d , un conjunto compacto es un conjunto acotado que está cerrado en el sentido de que contiene cada uno de sus puntos límite. En particular, cada "caja" de la forma que describe (2.9).

$$B = \{X \in \mathbb{R}^d: a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, d\} \quad (2.9)$$

para números reales dados $a_j \leq b_j$, $j = 1, 2, \dots, d$ es compacto. Sin embargo, el intervalo $(-1, +1)$ no es compacto. $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo en X_0 si para cada $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que cuando $X \in \mathcal{D}$ y $|X - X_0| < \delta$, entonces $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$; y f es continua en \mathcal{D} si f es continua en cada punto $X_0 \in \mathcal{D}$. Los ejemplos anteriores muestran que ni la compacidad ni la continuidad por sí solas pueden asegurar la existencia de valores extremos.

2.2.4. El valor máximo de f es el valor mínimo de $-f$ y viceversa.

Por tanto, basta caracterizar los puntos mínimos, aquellos $X_0 \in \mathcal{D}$ para los que define (2.10).

$$f(X) \geq f(X_0) \quad \forall X \in \mathcal{D} \quad (2.10)$$

Como hemos visto, estos puntos pueden estar presentes incluso en un conjunto no compacto.

2.2.5. Cuando \mathcal{D} contiene una vecindad de X_0 .

Una vecindad de X_0 de un punto extremo de f , en el que f tiene derivadas parciales continuas $f_{x_j} = \partial f / \partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, d$, entonces para cada vector $U \in \mathbb{R}^d$ de longitud unitaria, la derivada direccional (de dos lados, será como (2.11).

$$\partial_U f(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{f(X_0 + \varepsilon U) - f(X_0)}{\varepsilon} \right] = \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} (X_0 + \varepsilon U) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.11)$$

El cociente entre corchetes invierte el signo cuando se cambia el signo de ε . La existencia y continuidad de las derivadas parciales asegura la existencia del límite que, por tanto debe ser cero. Introduciendo el vector gradiente $\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_d})$, también podemos expresar $\partial_U f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot U$, y concluir que en tal punto extremo interior X_0 , como en (2.12).

$$\nabla f(X_0) = 0 \quad (2.12)$$

2.2.6. Puntos críticos.

Los puntos X_0 en los que se mantiene (2.12), llamados puntos estacionarios (o puntos críticos) de f , no necesitan dar un valor máximo o mínimo de f .

Por ejemplo, en $\mathcal{D} = (-1, 1]$, la función $f(X) = x_1^3$ tiene $x_1 = 0$ como su único punto estacionario, pero sus valores máximo y mínimo ocurren en los puntos finales 1 y -1, respectivamente.

En $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, la función $f(X) = x_2^2 - x_1^2$ tiene $X_0 = (0,0)$ como su único punto crítico; en X_0 , f tiene un comportamiento máximo en una dirección ($x_2 = 0$) y un comportamiento mínimo en otra dirección ($x_1 = 0$). En tales casos, se dice que X_0 es un punto silla de f .

2.2.7. Punto estacionario.

Un punto estacionario X_0 puede ser (solo) un punto extremo local para f ; es decir, uno para el que $f(X) \geq f(X_0)$ para todos los $X \in \mathcal{D}$ que se encuentran en alguna vecindad de X_0 .

Por ejemplo, el polinomio $f(X) = x_1^3 - 3x_1$ tiene en $\mathcal{D} = [-3, 3]$, puntos estacionarios en $x_1 = -1, 1$; el primero es solo un punto máximo local mientras que el segundo es solo un punto mínimo local para f .

2.2.8. Estacionario en función convexa.

Cuando f es una función convexa en \mathcal{D} , entonces asume un valor mínimo en cada punto estacionario en \mathcal{D} . Para este propósito, se asume que f es convexa en \mathcal{D} cuando tiene derivadas parciales continuas en \mathcal{D} y satisface la desigualdad (2.13).

$$f(X) \geq f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) \quad \forall X, X_0 \in \mathcal{D} \quad (2.13)$$

Una función convexa no necesita tener un punto estacionario, pero obviamente cuando X_0 es un punto estacionario de la función convexa f ; luego $\nabla f(X_0) = 0$, de modo que $f(X) \geq f(X_0)$; es decir, (3) se cumple con (2.14).

$$f(X + V) \geq f(X) + \nabla f(X) \cdot V, \quad \forall V \in \mathbb{R}^d \text{ para cual } X + V \in \mathcal{D} \quad (2.14)$$

2.2.9. Extremo en estacionario.

Cuando f es estrictamente convexa en \mathcal{D} ; es decir, cuando se cumple (2.13) en cada $X_0 \in \mathcal{D}$ con igualdad si $X = X_0$, entonces f puede tener como máximo un punto estacionario y por lo tanto como máximo un punto mínimo interior en \mathcal{D} .

Cuando X_0 es un punto estacionario de una función f estrictamente convexa, entonces $f(X) > f(X_0)$, $\forall X \in \mathcal{D} \setminus \{X_0\}$. Por tanto, f no puede asumir su valor mínimo $f(X_0)$ en ningún otro punto.

2.2.10. f es diferenciable en X_0

Si para todo X en una vecindad de X_0 , f es diferenciable en X_0 como en (2.15).

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + |X - X_0|^3 \mathfrak{z}(X - X_0) \quad (2.15)$$

Donde $\mathfrak{z}(X - X_0)$ es una función de valor real definida para $X \neq X_0$ por (7) con límite cero cuando $X \rightarrow X_0$. Entonces la gráfica de f (en \mathbb{R}^{d+1}) tiene en el punto $(X_0, f(X_0))$ un hiperplano tangente, es decir la gráfica de la función afin $T(X) \stackrel{\text{def}}{=} f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)$. Para $d = 1$, esta es solo la línea tangente a la curva que representa la gráfica

de f en \mathbb{R}^2 ; para $d = 2$, es el plano tangente a la superficie que representa la gráfica de f en \mathbb{R}^3 ; para el caso general, (7) puede usarse como una definición de tangencia.

Podemos dar al requisito de estacionalidad $\nabla f(X_0) = 0$, la interpretación geométrica que la gráfica de f en X_0 tiene en el punto $(X_0, f(X_0)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ un hiperplano tangente "horizontal"; es decir un subconjunto d -dimensional paralelo a \mathbb{R}^d . Por tanto para $d = 2$, una canica "equilibrada" en $(X_0, f(X_0))$ no debería rodar, sino permanecer "estacionaria". Por (5) vemos que una función diferenciable convexa es aquella cuya gráfica se encuentra "por encima" de sus hiperplanos tangentes.

Es importante resaltar que la existencia de las derivadas parciales de una vecindad de X_0 junto con su continuidad en X_0 son suficientes para garantizar que (2.15) se cumple.

2.2.11. Clasificación de punto estacionario

La clasificación de un punto estacionario X_0 como: un punto máximo local, un punto mínimo local o un punto de silla, puede ser posible cuando f tiene derivadas no desaparecidas de orden superior en X_0 .

En (2.16) primero observamos que las derivadas de orden superior que desaparecen no proporcionan información. En $\mathcal{D} = \mathbb{R}^1$ para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ cada una de las funciones tiene n derivadas que desaparecen en su punto estacionario común $X_0 = 0$. Donde f_n tiene un valor mínimo, mientras que g_n no tiene un valor máximo (local) ni mínimo (local).

$$f_n(X) = (x_1)^{2n} \qquad g_n(X) = (x_1)^{2n+1} \qquad (2.16)$$

En \mathbb{R}^1 , es bien sabido que si en un punto estacionario X_0 , $f''(X_0) > 0$ ($f''(X_0) < 0$) entonces f' es estrictamente creciente (o decreciente) en X_0 de modo que X_0 es un estricto punto mínimo (o máximo) local para f . La generalización a un espacio dimensional superior, donde además debe permitirse la posibilidad de X_0 como punto de silla, se puede abordar mejor a través de la segunda derivada direccional.

2.2.12. Teorema 2.2

Sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden de acuerdo a (2.17).

$$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i, j = 1, 2, \dots, d \qquad (2.17)$$

Y si X_0 es un punto estacionario de f en \mathcal{D} y para cada $U = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ como en (2.18).

$$\partial_U^2 f(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} f(X_0 + \varepsilon U) \right|_{\varepsilon=0} = q(U) > 0 \qquad \text{Cuando } |U| = 1 \qquad (2.18)$$

donde

$$q(U) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^d f_{x_i x_j}(X_0) u_i u_j$$

entonces X_0 es un punto mínimo local estricto para f . De hecho, para cada vector unitario U , cuando ε toma valores reales en una vecindad unidimensional de 0, $\tilde{f}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f(X_0 + \varepsilon U)$ toma todos los valores de f en una vecindad de X_0 en los dos lados de la dirección de U , será como (2.19).

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0 + \varepsilon U) \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.19)$$

de modo que f tiene un valor estacionario en 0 y el requisito de la hipótesis es simplemente que $f''(0) > 0$. Por tanto f tiene en X_0 un comportamiento mínimo local estricto en la dirección bilateral U . Esto se extiende mediante un argumento de compacidad para establecer que X_0 es un punto mínimo local (estricto) para f . Si $\partial_{ij}^2 f(X_0)$ tiene signo diferente para dos direcciones U , luego f tiene un comportamiento de punto silla en X_0 .

2.2.13. Observaciones

Si $V = cU \in \mathbb{R}^d$, entonces $q(V) = c^2 q(U)$. Por tanto (2.18) se cumple si f toma la forma cuadrática $q(V) > 0, \forall V \in \mathbb{R}^d, V \neq 0$.

Cuando (2.18) se cumple, el hessiano (matriz simétrica) $f_{xx}(X_0)$ cuyos elementos son las segundas derivadas parciales $f_{x_i x_j}(X_0) = f_{x_j x_i}(X_0)$, $i, j = 1, 2, \dots, d$ (dispuesto en orden natural), se dice que es positivo definido. Condiciones que caracterizan el definido positivo de tales matrices son conocidas. Observamos que cuando (2.18) se cumple, la matriz $f_{xx}(X_0)$ es invertible. Si $[f_{xx}]V = Q$ para alguna $U \in \mathbb{R}^d$, entonces por las leyes de la multiplicación de matrices, tendremos (2.19).

$$q(V) = \sum_{i,j=1}^d f_{x_i x_j} v_i v_j = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d f_{x_i x_j} v_j \right) v_i = 0 \quad (2.20)$$

que por (2.18) es posible en X_0 sólo si $V = Q$. Esta condición proporciona la invertibilidad deseada. Cuando $q(V) \geq 0, \forall V \in \mathbb{R}^d$, la matriz es $f_{xx}(X_0)$ y se dice que es positivo semidefinido.

2.2.14. Estacionario en conjunto abierto.

A menos que \mathcal{D} esté abierto, es decir solo tenga puntos interiores, entonces también es necesario considerar los valores extremos de f en $\partial\mathcal{D}$, en el límite de \mathcal{D} .

Por ejemplo, aunque en \mathbb{R}^2 la función $f(X) = x_2^2 - x_1^2$ tiene su único punto estacionario en $X_0 = Q$, X_0 es un punto silla, por lo que los valores máximo y mínimo en $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : |X| \leq 2\}$ solo se puede encontrar a lo largo del límite donde $|X| = 2$.

En general para este conjunto \mathfrak{D} , tendríamos que considerar el problema de optimizar f sujeto a la restricción $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} |X|^2 = 4$. Para encontrar los puntos estacionarios de f cuando están tan restringidos a los conjuntos de niveles de una o más funciones como g , podemos emplear el método de los multiplicadores lagrangianos.

2.3. Funciones convexas.

Al utilizar las variaciones de Gateaux [30], es posible caracterizar la convexidad de una función J en un subconjunto \mathfrak{D} de un espacio lineal Y , de modo que una función convexa se minimiza automáticamente por $y \in \mathfrak{D}$ en el que sus variaciones de Gateaux desaparecen. Además en presencia de una convexidad estricta, puede haber como máximo una y , donde se encuentra que una gran clase y útil de funciones es convexa.

Cuando $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ entonces para $Y = (x, y, z)$, $V = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, tenemos $\delta f(Y; V) = \nabla f(Y) \cdot V$, además f se define como convexa siempre que $\forall Y, V \in \mathbb{R}^3$, como en (2.21).

$$f(Y + V) - f(Y) \geq \nabla f(Y) \cdot V = \delta f(Y; V) \quad (2.21)$$

y estrictamente convexa cuando la igualdad se cumple en Y si $V = Q$. También observamos que la minimización de una función convexa f puede ser particularmente fácil de establecer, en el sentido de que un punto Y en el cual $\nabla f(Y) = Q$ minimiza claramente f y de (2.21) se sugiere la siguiente:

Definición 2.1. Una función de valor real J definida en un conjunto \mathfrak{D} en un espacio lineal Y se dice que es estrictamente convexa en \mathfrak{D} siempre que cuando y e $y + v \in \mathfrak{D}$ entonces $\delta J(y; v)$ está definida y $J(y + v) - J(y) \geq \delta J(y; v)$ con igualdad si $v = Q$. \mathfrak{D} en sí mismo puede ser no convexo, aunque "la mayoría" de las funciones no son convexas, un número sorprendentemente grande de las que nos interesan si lo son, incluso estrictamente convexas. La siguiente observación resultará valiosa:

Proposición 2.1. Si J y \tilde{J} son funciones convexas en un conjunto \mathfrak{D} entonces para cada $c \in \mathbb{R}, C^2 J$ y $J + \tilde{J}$ también son convexas. Además, las últimas funciones serán estrictamente convexas con J (para $c \neq 0$).

2.4. Funciones integrales convexas.

Si $f = f(x, y, z)$ y sus derivadas parciales f_y, f_z están definidas y son continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, entonces se sabe que la función integral de (2.22)

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b f[y(x)] dx \quad (2.22)$$

Tiene $\forall y, v \in C^1[a, b]$

$$\delta F(y; v) = \int_a^b (f_y[y(x)]v(x) | f_z[y(x)]v'(x)) dx \quad (2.23)$$

Definición 2.2. Se dice que $f(x, y, z)$ es [fuertemente] convexa en $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si $f = f(x, y, z)$ y sus derivadas parciales f_y y f_z están definidas y son continuas en este conjunto además ahí satisfacen la desigualdad (2.24).

$$f(x, y + v, z + w) - f(x, y, z) \geq f_y(x, y, z) v + f_z(x, y, z) w$$

$$\forall (x, y, z) \text{ y } (x, y + v, z + w) \in S \quad (2.24)$$

con igualdad en (x, y, z) solo si $v = 0$ o $w = 0$.

Es importante observar que pueden existir algunas variables que se pueden mantener fijas en la desigualdad, mientras que las derivadas parciales de f se requieren solo para las variables restantes (y y z). Claramente si f en sí mismo es convexo en \mathbb{R}^3 , entonces $f(x, y, z)$ será convexo como en (2.24), además si f es estrictamente convexa, entonces $f(x, y, z)$ será fuertemente convexa. Sin embargo en general, la convexidad fuerte es más débil que la convexidad estricta. Además, $f(y, z)$ es fuertemente convexa en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ precisamente cuando $\tilde{f}(x, y, z) = f(y, z)$ es fuertemente convexa en $[a, b] \times \mathcal{D}$.

La convexidad está presente en problemas de varios campos diversos, o al menos después de una formulación adecuada

2.5. Optimización.

Cuando J es una función de valor real definida en un subconjunto \mathcal{D} de un espacio lineal Y , puede haber interés en los valores extremos de J que ocurrirían en esos puntos $y_0 \in \mathcal{D}$ como lo define (2.25) y en encontrar estos puntos si existen.

$$J(y) \geq J(y_0) \quad J(y) \leq J(y_0) \quad \forall y \in \mathcal{D} \quad (2.25)$$

Dado que los últimos puntos son aquellos para los cuales $-J(y) \geq -J(y_0)$, $\forall y \in \mathcal{D}$ será suficiente caracterizar los primeros, aquellos puntos mínimos y_0 que producen valores mínimos de J en \mathcal{D} . Decimos que un punto $y_0 \in \mathcal{D}$ minimiza J en \mathcal{D} únicamente cuando es el único punto en \mathcal{D} , o de manera equivalente cuando $J(y) \geq J(y_0)$, $\forall y \in \mathcal{D}$ con igualdad si $y = y_0$.

Por ejemplo, $J(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 y^2(x) dx \geq 0 = J(y_0)$, si $y_0(x) = 0$, de modo que y_0 minimiza J en $\mathcal{D} = C[0, 1]$. Además lo hace de manera única, porque $J(y) = 0$ implica que $p(x) = y^2(x) = 0$, de modo que $y = Q = y_0$.

2.6. Mínimo global.

También consideraremos estos puntos mínimos en problemas que involucren restricciones isoperimétricas o lagrangianas. Primero hagamos una reformulación utilizando la linealidad de Y

Lema 2.1. $y_0 \in \mathcal{D}$ minimiza J en \mathcal{D} únicamente si sucede (2.26).

$$J(y_0 + v) - J(y_0) \geq 0 \quad \forall y_0 + v \in \mathcal{D} \quad (2.26)$$

Para minimizar (2.27)

$$J(y) = \int_a^b y'(x)^2 dx \quad \text{sobre } \mathfrak{D} = \{y \in C^1[a, b]: y(a) = 0, y(b) = 1\} \quad (2.27)$$

Obviamente $J(y) \geq 0$ y por inspección, $J(y_1) = 1$ si $y_1 = 0$, pero $y_1 = \text{constante}$ no está en \mathfrak{D} . Sin embargo si reformulamos el problema como sugiere el lema 2.1, entonces para $y_0 \in \mathfrak{D}$ y $y_0 + v \in \mathfrak{D}$, así deberíamos examinar.

Por lo tanto según el lema 2.1, y_0 minimiza J en \mathfrak{D} , también lo hace de forma única, ya que la igualdad exige que $\int_a^b v'(x)^2 dx$, requiere que $v'(x)^2 = 0$, o que $v(x) = \text{constante} = v(a) = 0 \rightarrow v = 0$ [31], para (2.28).

$$\begin{aligned} J(y_0 + v) - J(y_0) &= \int_a^b [(y_0'(x) + v'(x))^2 - y_0'(x)^2] dx \\ &= \int_a^b v'(x)^2 dx + 2 \int_a^b y_0'(x)v'(x) dx \\ &\geq 2 \int_a^b y_0'(x)v'(x) dx \end{aligned} \quad (2.28)$$

La siguiente proposición nos permite ignorar las constantes no esenciales.

Proposición 2.2. y_0 minimiza J en \mathfrak{D} únicamente si para las constantes c_0 y $c \neq 0$, y_0 minimiza $c^2 J + c_0$ en \mathfrak{D} [únicamente] [30]

2.7. Restricciones.

Si buscamos minimizar J en \mathfrak{D} , cuando se restringe aún más a un conjunto de niveles de una o más funciones similares G , entonces como lo sabían Lagrange y Euler, puede ser suficiente minimizar una función aumentada sin restricciones.

Proposición 2.3. Si las funciones J y G_1, G_2, \dots, G_N están definidas en \mathfrak{D} y para algunas constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, y_0 minimiza $\tilde{J} = J + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_N G_N$ en \mathfrak{D} únicamente cuando está más restringido al conjunto $G_{y_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathfrak{D} : G_j(y) = G_j(y_0), j = 1, 2, \dots, N\}$. De lo anterior se concluye que la esperanza λ_j que se pueda encontrar de modo que además $G_j(y_0) = l_j$ para valores prescritos $l_j, j = 1, 2, \dots, N$ [30].

Corolario 2.1. y_0 minimiza J en \mathfrak{D} únicamente cuando se restringe al conjunto [30].

$$G_{y_0}^* = \{y \in \mathfrak{D} : \lambda_j G_j(y) \leq \lambda_j G_j(y_0), j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.29)$$

2.8. Minimización de funciones convexas

Al utilizar las variaciones de Gateaux se puede caracterizar la convexidad de una función J en un subconjunto \mathfrak{D} , de un espacio lineal Y , de modo que una función convexa se minimiza automáticamente mediante $y \in \mathfrak{D}$, en el que las variaciones de Gateaux desaparecen. Además en presencia de una convexidad estricta, puede haber como máximo una y . Así variaciones de Gateaux de funciones integrales desaparecerán y en general en cada solución y de una ecuación diferencial asociada de Euler-Lagrange. La teoría resultante se extiende a problemas que involucran funciones restrictivas convexas y se utiliza en varias aplicaciones de interés, como son: una versión de la braquistocrona; el problema del cable colgante (o catenaria) de Euler, entre otras.

2.9. Extrema con restricciones: multiplicadores lagrangianos.

Al encontrar extremos locales de una función de valor real J en un subconjunto \mathfrak{D} en un espacio lineal normalizado $(Y, \|\cdot\|)$, puede haber suficientes direcciones \mathfrak{D} -admisibles para J en un punto típico $y_0 \in \mathfrak{D}$ para proporcionar una caracterización utilizable de posibles puntos extremos locales, sin embargo incluso en \mathbb{R}^2 , un dominio tan simple como un círculo no tiene direcciones admisibles no triviales para ninguna función J .

Este dominio es en sí mismo un conjunto de niveles de otra función. Por ejemplo el círculo unitario $\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| = 1\}$ es el conjunto de un nivel de la función $G(y) = |y|$ que es diferenciable en cada punto de ese conjunto de niveles. Los multiplicadores lagrangianos caracterizan los extremos locales de una función J en un espacio lineal normado cuando se restringe a uno o más conjuntos de niveles de otras funciones similares. En este contexto los conjuntos de niveles involucrados se denominan restricciones y las ecuaciones que definen los conjuntos se denominan relaciones restrictivas.

Teorema 2.3. (Lagrange). En un espacio lineal normalizado $(Y, \|\cdot\|)$, si las funciones de valor real J y G se definen en una vecindad de y_0 , un punto extremo local para J restringido a G_{y_0} y tienen variaciones Gateaux débilmente continuas, entonces sucede:

(a) $\delta G(y_0; w) \equiv 0, \forall w \in Y$; o

(b) existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\delta J(y_0; v) = \lambda \delta G(y_0; v), \forall v \in Y$.

Por tanto, con (2.30).

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta J(y_0; v)}{\delta G(y_0; v)} \quad (2.30)$$

El parámetro λ que aparece en la conclusión del teorema se llama multiplicador lagrangiano y en la aplicación, el teorema suele denominarse Método de multiplicadores lagrangianos.

La interpretación geométrica proporciona una idea, al utilizar la terminología de derivadas direccionales apropiada para \mathbb{R}^d , la condición de $\delta J(y_0; v) = \lambda \delta G(y_0; v)$ dice simplemente que las derivadas direccionales de J son proporcionales a las de G en y_0 . Si

suponemos que J y G son diferenciables en y_0 , entonces en las direcciones τ tangente al nivel establecido G_{y_0} en y_0 , sabemos que $\delta G(y_0; \tau) = 0$.

Por tanto, $\delta J(y_0; \tau) = 0$ en estas direcciones tangenciales, y esto es lo que deberíamos esperar para el punto extremo restringido. Además a menos que $\lambda = 0$, en cuyo caso $\delta J(y_0; \cdot) \equiv 0$, $\delta J(y_0; v)$ es cero solo en esas direcciones de tangencia, es decir, el conjunto de niveles J_{y_0} de J , sin restricciones para G_{y_0} a través de y_0 tiene precisamente las mismas direcciones de tangencia y no tangencia que G_{y_0} . Así, en general la condición de Lagrange significa que los conjuntos de niveles de J y G a través de y_0 comparten el mismo hiper-plano tangente en y_0 , o se encuentran tangencialmente en y_0 como se ilustra para \mathbb{R}^3 en figura 2.1. De la linealidad de la variación Gateaux y reemplazando λ por $-\lambda$ es posible escribir la condición (b) en la forma $\delta(J + \lambda G)(y_0; \cdot) \equiv 0$, lo que sugiere la consideración de la función aumentada $J + \lambda G$ sin restricciones.

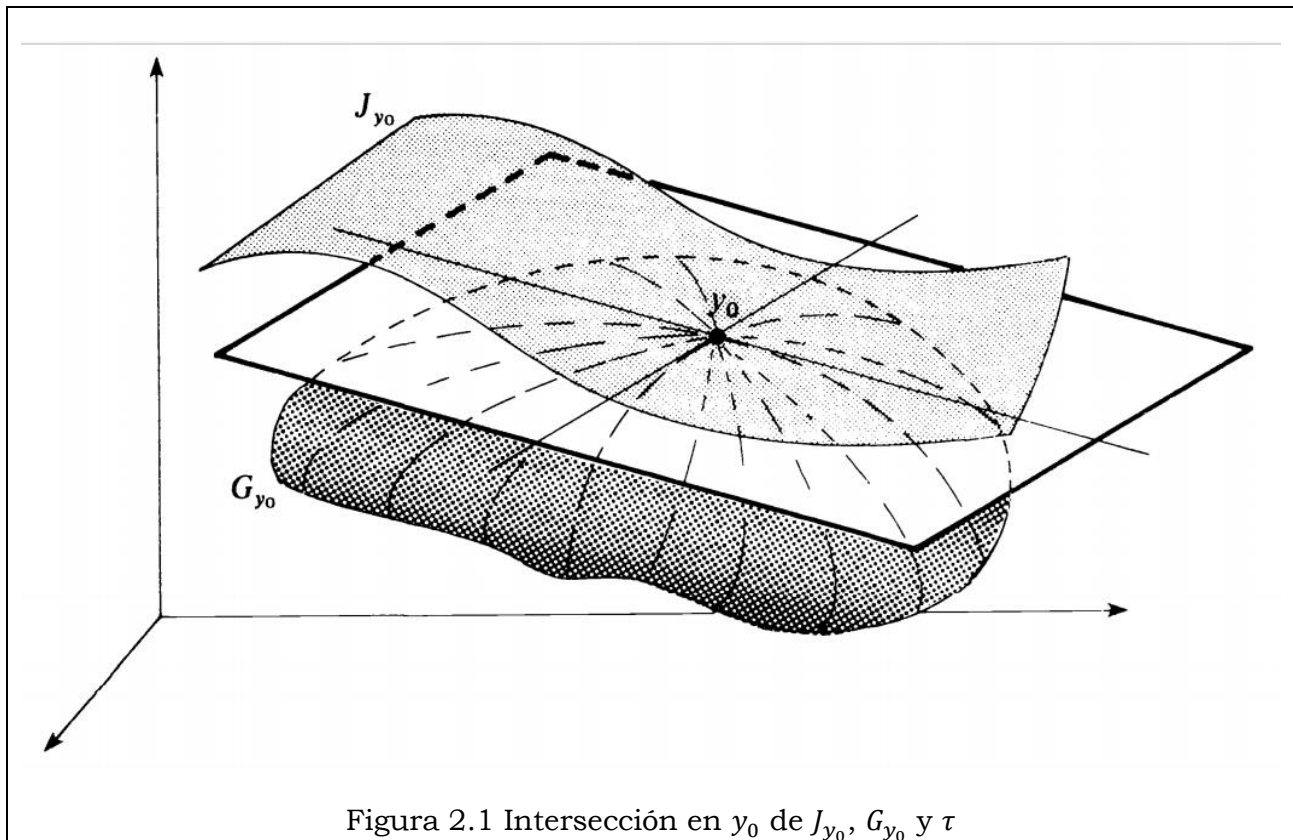


Figura 2.1 Intersección en y_0 de J_{y_0} , G_{y_0} y τ

2.10. Las ecuaciones de Euler-Lagrange

La solución de Jakob Bernoulli en 1696 al problema de la braquistocrona marcó la introducción de consideraciones variacionales y fue hasta el trabajo de Euler y Lagrange en 1755 que surgió la teoría sistemática ahora conocida como cálculo de variaciones que en su inicio se restringió a encontrar las condiciones necesarias para que una función integral de (2.31) [31]

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b f[y(x)] dx \quad (2.31)$$

Que debería tener un extremo local en un conjunto como en (2.32)

$$\mathfrak{D} \subseteq \{y \in C^1[a, b] : y(a) = a_1; y(b) = b_1\} \quad (2.32)$$

Para a_1, b_1 especificados, éste es un problema de punto final fijo, al buscar los extremos locales para un conjunto mayor como en (2.33)

$$\mathfrak{D}^b \subseteq \{y \in C^1[a, b] : y(a) = a_1\} \quad (2.33)$$

al describir una braquistocrona modificada para la cual se desea descender sobre una distancia horizontal dada ($b - a$) en un tiempo mínimo, sin especificar la distancia vertical a cubrir como se indica en la figura 2.2 (a). Se dice que este tipo de problema tiene un punto final libre.

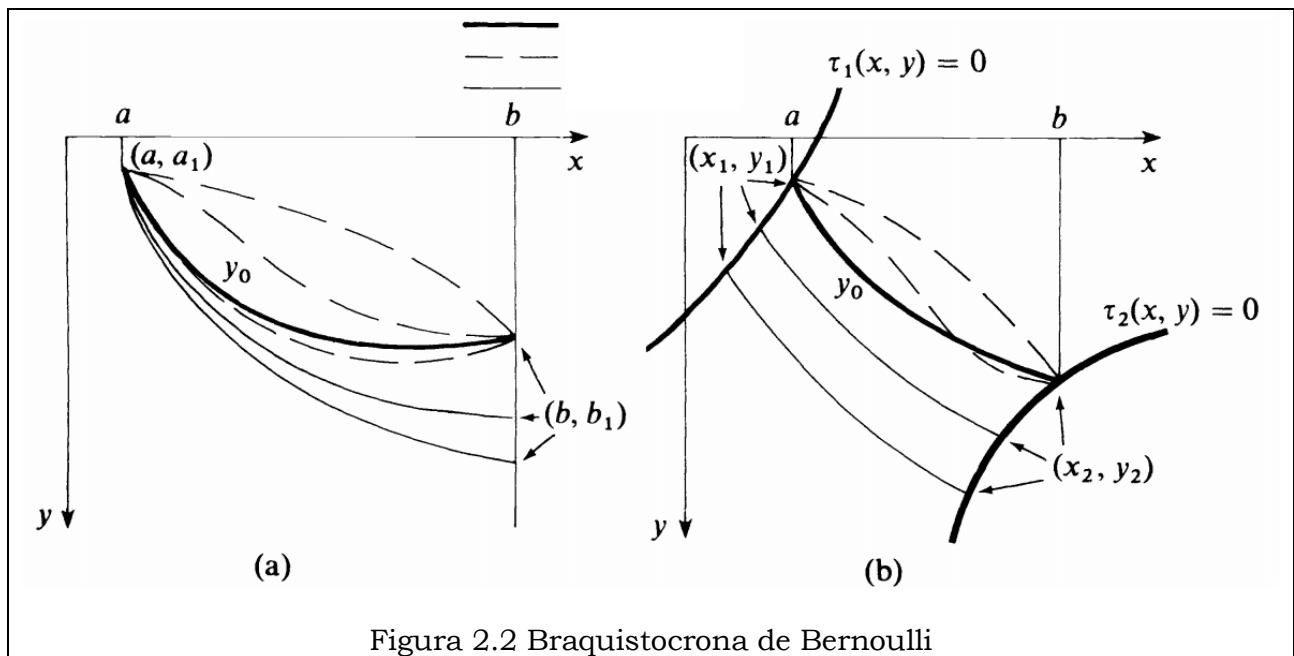


Figura 2.2 Braquistocrona de Bernoulli

Existen casos de problemas con dos puntos finales libres donde se desean extremos locales en subconjuntos arbitrarios de $C^1[a, b]$. Un problema relacionado con las condiciones del punto final variable es el de caracterizar la braquistocrona que una curvas fijas llamadas transversales como se muestra en la figura 2.2 (b) que requeriría minimizar la integral con límites variables como define (2.34),

$$F(y; x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x)] dx \quad (2.34)$$

sobre un conjunto de (2.35)

$$\mathfrak{D} \subseteq \{y \in C^1[x_1, x_2] : \tau_j(x_j, y(x_1)) = 0; j = 1, 2\} \quad (2.35)$$

donde $[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}$, y τ_j son funciones dadas.

Todos estos problemas admiten un enfoque variacional común: si los problemas de $y_0 \in C^1[a, b]$, es decir una función minimizadora local para uno de estos problemas. entonces con la selección apropiada de a_1 , b_1 y \mathcal{D} , podemos suponer que $y_0 \in \mathcal{D}$ y sea necesario que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^b$ o $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_\tau$, como se muestra en la figura 6.1. En cada caso, y_0 es una función minimizadora local para F en \mathcal{D} , el problema de punto final fijo considerado inicialmente.

Cuando f es suficientemente diferenciable, existen suficientes direcciones para inferir que en (a, b) , y_0 es una solución de la primera y segunda ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones cuyas soluciones de C^1 son por definición funciones estacionarias para f . Así la libertad adicional de trabajar en \mathcal{D}^b o en \mathcal{D}_τ permite la variación en otras "direcciones" específicamente relacionadas con la libertad del punto final y esto dará lugar a las correspondientes condiciones de frontera naturales que la función extrema debería satisfacer.

2.11. Condiciones necesarias para un mínimo local

Las condiciones necesarias para minimizar una función descrita en (2.36)

$$F(\hat{Y}) = \int_a^b f[\hat{Y}(x)] dx == \int_a^b f(x, \hat{Y}(x), \hat{Y}'(x)) dx \quad (2.36)$$

Localmente en (2.37)

$$\mathcal{D} = \left\{ \hat{Y} \in \hat{\mathcal{U}} = (\hat{C}^1[a, b])^d : \hat{Y}(a) = A, \hat{Y}(b) = B \right\} \quad (2.37)$$

que caracterizan la estacionalidad y no distinguen entre comportamiento máximo, mínimo o de punto de silla, ni siquiera localmente.

La condición de Weierstrass se basa en las variaciones de Gateaux de una función integral se obtienen comparando sus valores en un punto \hat{Y} de los puntos $\hat{Y} + \varepsilon \hat{V}$ en una vecindad de norma débil. En contraste con estas variaciones (débiles), se busca considerar un nuevo tipo de variación (fuerte) por funciones cuya pequeñez no implica la de sus derivadas, al menos no en un punto dado, $\xi \in (a, b)$.

Específicamente, dado $\hat{Y} \in \hat{\mathcal{U}}$, tome $(\xi, \hat{Y}(\xi)) = (0, Q)$ por conveniencia. Luego, para $W \in \mathbb{R}^d$, pequeño $h > 0$ y $\varepsilon \in (0, 1)$, sea $\hat{\varepsilon} = \varepsilon/(1 - \varepsilon)$ y defina la fuerte variación asociada $\hat{W} \in \hat{\mathcal{U}}$ como sigue: cuando se cumple con (2.38).

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \varepsilon h : \hat{W}(x) = xW \rightarrow \hat{W}'(x) = W \\ \varepsilon h \leq x < h : \hat{W}(x) = \hat{\varepsilon}(h - x)W \rightarrow \hat{W}'(x) = -\hat{\varepsilon}W \\ x < 0 \text{ ó } x > h : \hat{W}(x) = 0 \rightarrow \hat{W}'(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

En la búsqueda del mejor método, es cuestión de perenne vigencia y a través de la historia se ha buscado esta respuesta, lo que en la investigación se tiene creciente sofisticación. Cuando se puede evaluar lo "mejor" numéricamente, esta evaluación puede considerarse como una función real valorada del método en consideración que debe optimizarse, ya sea maximizada o minimizada utilizando la programación matemática mencionada en el capítulo 3 de la presente tesis.

Capítulo 3. Programación matemática.

En este capítulo se presenta el fundamento de la herramienta computacional para el tratamiento de los procesos de optimización.

3.1. Optimización sin restricciones.

La minimización no restringida es el problema de encontrar un vector x que sea un mínimo local para una función escalar $f(x)$ de la forma (3.1):

$$\min_x f(x) \quad (3.1)$$

El término sin restricciones significa que no se coloca ninguna restricción en el rango de x [32].

3.2. Métodos de minimización no lineal

Muchos de los métodos utilizados en los solucionadores se basan en regiones de confianza, un concepto simple pero poderoso de optimización, así para comprender el enfoque de la región de confianza para la optimización, considere el problema de minimización sin restricciones, para minimizar $f(x)$, donde la función toma argumentos vectoriales y devuelve escalares, así suponga que se encuentra en un punto x en el espacio n y desea mejorar, es decir moverse a un punto con un valor de función más bajo, donde la idea básica es aproximar f con una función q más simple, que refleja razonablemente el comportamiento de la función f en una vecindad N alrededor del punto x , donde este barrio es la región de confianza. En este sentido un paso de prueba s se calcula minimizando (o se espera minimizar) sobre N , así tenemos un caso de subproblema de la región de confianza, descrito en (3.2)

$$\min_s \{q(s), s \in N\} \quad (3.2)$$

3.2.1. Punto actual

El punto actual se actualiza para ser $x + s$ si $f(x + s) < f(x)$, de lo contrario el punto actual permanece sin cambios y N , en la región de confianza se reduce y se repite el cálculo del paso de prueba. Las preguntas clave para definir un enfoque de región de confianza específico para minimizar $f(x)$ son cómo elegir y calcular la aproximación q , que es definida en el punto actual x , así como elegir y modificar la región de confianza N y con qué precisión se desea resolver el subproblema de la región de confianza.

3.2.2. Estándar

En el método estándar de la región de confianza, la aproximación cuadrática q está definida por los dos primeros términos de la aproximación de Taylor a F en x y la vecindad N suele tener forma esférica o elipsoidal [30]. Matemáticamente el subproblema de la región de confianza se establece típicamente como en (3.3)

$$\min \left\{ \frac{1}{2} s^T H s + s^T g : \|Ds\| \leq \Delta \right\} \quad (3.3)$$

donde g es el gradiente de f en el punto actual x , H es la matriz hessiana, D es una matriz de escala diagonal, Δ es un escalar positivo y $\| \cdot \|$ es la doble norma. Existen algoritmos efectivos que resuelven la ecuación (3.3) [30], los cuales normalmente implican el cálculo de un sistema propio completo basados en el proceso de Newton aplicado a la ecuación secular (3.4).

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\|s\|} = 0 \quad (3.4)$$

3.3. Métodos de búsqueda alternos.

Estos algoritmos proporcionan una solución precisa a la ecuación (3.3). Sin embargo requieren el tiempo de proceso proporcional a varias factorizaciones de H . Por lo tanto, para problemas a gran escala se necesita un enfoque diferente, por lo que en la literatura se han propuesto varias heurísticas estratégicas y de aproximación, basadas en la ecuación (3.3) [31, 32]. El enfoque de aproximación seguido consiste en restringir el sub-problema de la región de confianza a un sub-espacio dimensional S [33], así dentro de este sub-espacio lo que resta para resolver la ecuación (3.3) es trivial incluso si se necesita información completa de auto-valores/auto-vectores, ya que en el sub-espacio el problema es solo bidimensional. Ahora el trabajo dominante se ha desplazado hacia la determinación de este sub-espacio, lo que se puede lograr con la ayuda de un proceso de gradiente conjugado pre-acondicionado que se describe a continuación. El solucionador define S como el espacio lineal generado por s_1 y s_2 , donde s_1 está en la dirección del gradiente g , y s_2 es una dirección aproximada de Newton, es decir una solución a (3.5),

$$H \cdot s_2 = -g \quad (3.5)$$

o una dirección de curvatura negativa como en (3.6),

$$s_2^T \cdot H \cdot s_2 < 0 \quad (3.6)$$

La filosofía detrás de esta elección de S es forzar la convergencia global a través de la dirección de descenso más pronunciada o la dirección de curvatura negativa para lograr una convergencia local rápida, mediante el paso de Newton, cuando este existe. Ahora es fácil ofrecer un esquema de minimización sin restricciones utilizando ideas de regiones de confianza mediante el siguiente proceso:

1. Formule el sub-problema en forma bidimensional de la región de confianza.
2. Resuelva la ecuación 2 para determinar los pasos de prueba s .
3. Si $f(x + s) < f(x)$, entonces $x = x + s$.
4. Ajuste Δ .

Estos cuatro pasos se repiten hasta lograr la convergencia y tener un margen de error aceptable. La dimensión de la región de confianza Δ se ajusta de acuerdo con las reglas

estándar. En particular, se reduce si no se acepta el paso de prueba, es decir, $f(x + s) \geq f(x)$ [34].

Los solucionadores se pueden basar en algunos casos especiales importantes de f con funciones especializadas como son: mínimos cuadrados no lineales, funciones cuadráticas y mínimos cuadrados lineales, sin embargo las ideas algorítmicas subyacentes son las mismas que para el caso general.

3.4. Método de gradiente conjugado pre-acondicionado

Una forma popular de resolver grandes sistemas simétricos positivos definidos de ecuaciones lineales $Hp = -g$ es el método de gradientes conjugados preacondicionados (PCG). Este enfoque iterativo requiere la capacidad de calcular productos matriz-vector de la forma $H \cdot v$ donde v es un vector arbitrario. La matriz definida positiva simétrica M es un preconditionador para H . Es decir, $M = C^2$, donde $C^{-1}HC^{-1}$ es una matriz bien acondicionada o una matriz con valores propios agrupados.

En un contexto de minimización, puede asumir que la matriz hessiana H es simétrica. Sin embargo se garantiza que H será positivo definido solo en la vecindad de un minimizador fuerte. El algoritmo PCG existe cuando se encuentra una dirección de curvatura negativa o cero, es decir, $d^T H d \leq 0$. La dirección de salida p de PCG, es una dirección de curvatura negativa o una solución aproximada del sistema de Newton $Hp = -g$. En cualquier caso, p se utiliza para ayudar a definir el subespacio bidimensional utilizado en el enfoque de la región de confianza para la minimización no lineal.

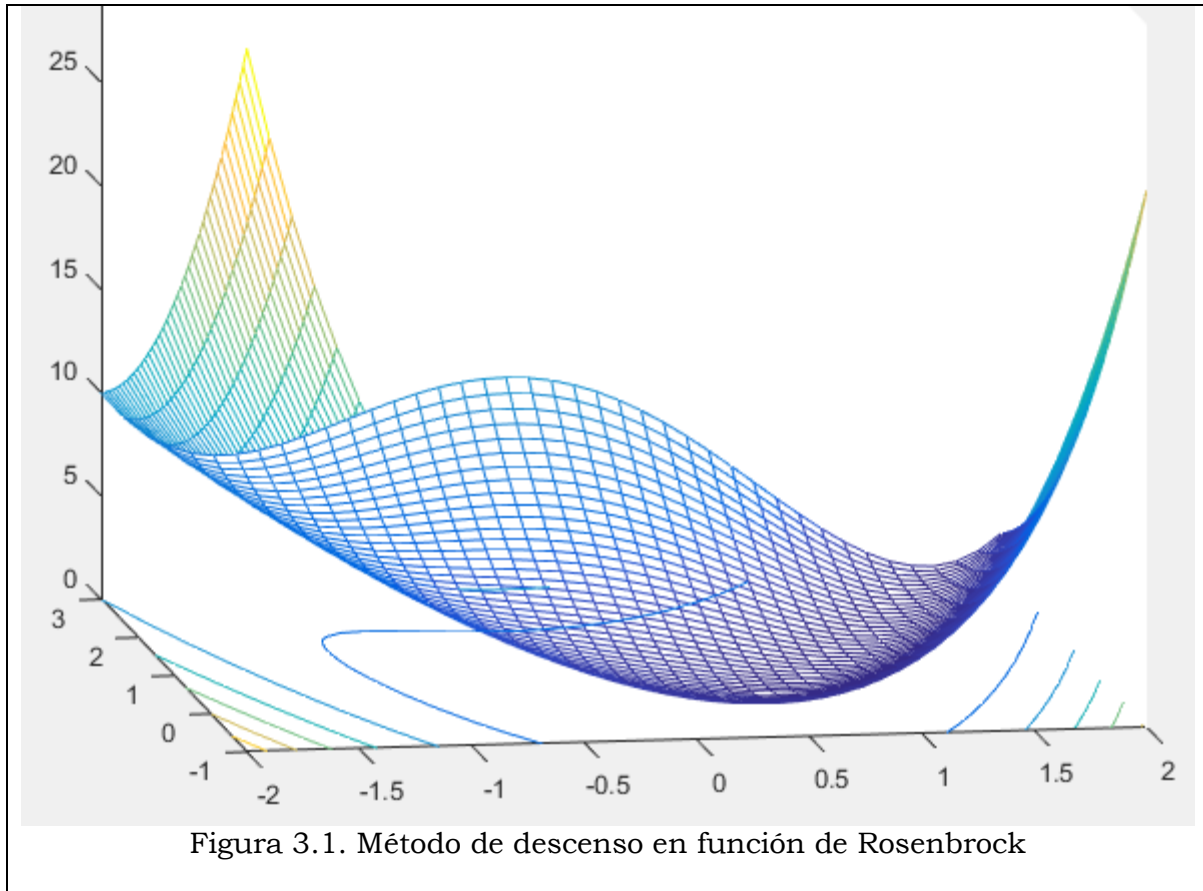
3.5. Optimización sin restricciones

Aunque existe un amplio espectro de métodos para la optimización sin restricciones, los métodos se pueden categorizar ampliamente en términos de la información derivada que se utiliza. Los métodos de búsqueda que utilizan solo evaluaciones de funciones, por ejemplo: la búsqueda simplex de Nelder y Mead son los más adecuados para problemas que no son uniformes o tienen una serie de discontinuidades [35]. Los métodos de gradiente son generalmente más eficientes cuando la función a minimizar es continua en su primera derivada. Por otro lado, los métodos de orden superior como el método de Newton, solo son realmente adecuados cuando la información de segundo orden se calcula fácil y rápidamente, ya que el cálculo de la información de segundo orden, utilizando la diferenciación numérica, es computacionalmente costoso.

Los métodos de gradiente utilizan información sobre la pendiente de la función para dictar una dirección de búsqueda donde se cree que se encuentra el mínimo. El más simple de éstos es el método de descenso más pronunciado en el que se realiza una búsqueda en una dirección $-\nabla f(x)$, que consiste en el gradiente de la función objetivo. Este método es muy ineficaz cuando la función que se va a minimizar tiene valles largos y estrechos como es el caso de la función de Rosenbrock descrita en (3.7).

$$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (3.7)$$

El mínimo de esta función está en $x = [1,1]$, donde $f(x) = 0$. Un mapa de contorno de esta función se muestra en la figura 3.1, junto con la ruta de solución al mínimo para una implementación de descenso más empinado comenzando en el punto $[-1.9,2]$. Las áreas más densas son donde el método está continuamente en zigzag de un lado del valle a otro. Por lo que se debe tener en cuenta que hacia el centro de la región en estudio, se dan varios pasos más grandes cuando un punto aterriza exactamente en el centro del valle.



Esta función conocida como función banana, es común en los casos sin restricciones debido a la forma en que la curvatura se dobla alrededor del origen. La función de Rosenbrock se utiliza para ilustrar el uso de una variedad de técnicas de optimización, en donde los contornos se trazan con incrementos exponenciales debido a la pendiente de la pendiente que rodea el valle en forma de U.

3.6. Métodos cuasi-Newton

De los métodos que utilizan información de gradiente, los más utilizados son los métodos cuasi-Newton, éstos acumulan información de curvatura en cada iteración para formular un problema de modelo cuadrático de la forma (3.8),

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + b \quad (3.8)$$

donde la matriz de Hesse H , es una matriz simétrica definida positiva, c es un vector constante y b es una constante. La solución óptima para este problema ocurre cuando las derivadas parciales de x van a cero, como se expresa en (3.9),

$$\nabla f(x^*) = Hx^* + c = 0 \quad (3.9)$$

El punto de solución óptimo x^* , se puede escribir como en (3.10)

$$x^* = -H^{-1}c \quad (3.10)$$

Los métodos de tipo Newton, a diferencia de los métodos cuasi-Newton, calculan H directamente y proceden en una dirección de descenso para localizar el mínimo después de varias iteraciones. Calcular H numéricamente implica una gran cantidad de cálculos, así los métodos cuasi-Newton evitan esto al usar el comportamiento observado de $f(x)$ y $\nabla f(x)$ para generar información de curvatura para hacer una aproximación a H usando una técnica de actualización apropiada. En este escenario se ha desarrollado un gran número de métodos de actualización de Hesse, sin embargo se cree que la fórmula de Broyden [36], Fletcher [37], Goldfarb [38] y Shanno [39](BFGS), es la más eficaz para su uso en un método de uso general y está dada por (3.11).

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k^T}{s_k^T H_k s_k} \quad (3.11)$$

donde se cumple con (3.12)

$$\begin{aligned} s_k &= x_{k+1} - x_k \\ q_k &= \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como punto de partida se puede establecer H_0 en cualquier matriz definida positiva simétrica, por ejemplo la matriz identidad I y para evitar la inversión del hessiano H , se puede derivar un método de actualización que la evite utilizando una fórmula que hace una aproximación de la hessiana inversa H^{-1} en cada actualización, una herramienta común para este procedimiento es la fórmula DFP de Davidon [40], Fletcher y Powell [41], que utiliza la misma fórmula que el método BFGS de la ecuación (3.11), excepto que q_k se sustituye por s_k . La información del gradiente se proporciona a través de gradientes calculados analíticamente o se obtiene mediante derivadas parciales utilizando un método de diferenciación numérica mediante diferencias finitas. Esto implica perturbar cada una de las variables de diseño x , a su vez y calcular la tasa de cambio en la función objetivo, por lo que en cada iteración principal k , se realiza una búsqueda de línea en la dirección

$$d = -H_k^{-1} \cdot \nabla f(x_k) \quad (3.13)$$

El método cuasi-Newton BFGS se ilustra mediante la ruta de solución en la función de Rosenbrock. El método es capaz de seguir la forma del valle y converge rápidamente al mínimo usando solo gradientes de diferencia finita.

3.7. Búsqueda de línea

La búsqueda de líneas es un método que se utiliza como parte de un algoritmo de optimización mayor. En cada paso del algoritmo principal, este método busca a lo largo de la línea que contiene el punto actual x_k , paralelo a la dirección de búsqueda, que es un vector determinado por el algoritmo principal. Es decir el método encuentra la siguiente iteración x_{k+1} de la forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha^* d_k \quad (3.14)$$

donde x_k denota la iteración actual, d_k es la dirección de búsqueda y α^* es un parámetro de longitud de paso escalar. Este método de búsqueda de líneas intenta disminuir la función objetivo a lo largo de la línea $x_k + \alpha^* d_k$ minimizando repetidamente los modelos de interpolación polinomial de la función objetivo, así el procedimiento de búsqueda de línea tiene dos pasos principales:

1. La fase de horquillado determina el rango de puntos en la línea de la ecuación (3.14) para ser registrado. El corchete corresponde a un intervalo que especifica el rango de valores de α .
2. El paso de sección divide el corchete en subintervalos, en los que el mínimo de la función objetivo se aproxima por interpolación polinómica.

La longitud de paso resultante α satisface las condiciones de Wolfe:

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T d_k \quad (3.15)$$

$$\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k \geq c_2 \nabla f_k^T d_k \quad (3.16)$$

donde c_1 y c_2 son constantes con $0 < c_1 < c_2 < 1$

La primera condición de la ecuación (3.15) requiere que α_k disminuya suficientemente la función objetivo. La segunda condición descrita en la ecuación (3.16) asegura que la longitud del paso no sea demasiado pequeña, así los puntos que satisfacen ambas condiciones se denominan puntos aceptables [37].

3.8. Actualización hessiana

Muchas de las funciones de optimización determinan la dirección de la búsqueda actualizando la matriz de Hesse en cada iteración, utilizando el método BFGS descrito en la ecuación (3.11), también se tiene la opción para utilizar el método DFP proporcionado en Métodos cuasi-Newton. El hessiano H se mantiene siempre definido como positivo de modo que la dirección de búsqueda d , sea siempre en dirección descendente, lo que significa que para algún paso α arbitrariamente pequeño en la dirección d , la función objetivo disminuye en magnitud y para lograr la definición positiva de H asegurándose que se inicialice para ser definida positiva y posteriormente $q_k^T s_k$ de la ecuación (3.17) siempre sea positivo. El término $q_k^T s_k$ es un producto del parámetro de longitud de paso de búsqueda de línea α_k y una combinación de la dirección de búsqueda d con evaluaciones de gradiente actual y anterior,

$$q_k^T s_k = \alpha_k [\nabla f(x_{k+1})^T d - \nabla f(x_k)^T d] \quad (3.17)$$

Siempre se logra la condición de $q_k^T s_k$ es positivo al realizar una búsqueda de línea suficientemente precisa. Esto se debe a que la dirección de búsqueda d es una dirección de descenso, de modo que α_k y el gradiente negativo $-\nabla f(x_k)^T d$ son siempre positivos. Por lo tanto el posible término negativo $-\nabla f(x_{k+1})^T d$ puede hacerse tan pequeño en magnitud como se requiera aumentando la precisión de la búsqueda de línea.

3.9. Algoritmo simplex de Nelder-Mead

Como se describe en Lagarias [42], este algoritmo usa un simplex de $n + 1$ puntos para vectores n -dimensionales x . El algoritmo primero hace un simplex alrededor de la suposición inicial x_0 agregando 5% de cada componente $x_0(i)$ a x_0 , y usando estos n vectores como elementos del simplex además de x_0 . Se propone utilizar 0.00025 como componente i si $x_0(i) = 0$, así el algoritmo modifica el simplex repetidamente de acuerdo con el siguiente procedimiento.

1. Sea $x(i)$ la lista de puntos en el simplex actual, $i = 1, \dots, n + 1$.
2. Ordene los puntos en el simplex desde el valor de función más bajo $f(x(1))$ hasta el más alto $f(x(n + 1))$. En cada paso de la iteración, el algoritmo descarta el peor punto actual $x(n + 1)$ y acepta otro punto en el simplex. Para el caso del paso 7 de este proceso, cambia todos los n puntos con valores por encima de $f(x(1))$.
3. Genera el punto reflejado $r = 2m - x(n + 1)$, donde $m = \sum x(i)/n, i = 1 \dots n$ y calcule $f(r)$.
4. Si $f(x(1)) \leq f(r) < f(x(n))$, acepta r y termina esta iteración. Reflejar
5. Si $f(r) < f(x(1))$, calcule el punto de expansión $s = m + 2(m - x(n + 1))$ y calcule $f(s)$.
 - a. Si $f(s) < f(r)$, acepte s y finalice la iteración. Expandir
 - b. De lo contrario, acepte r y finalice la iteración. Reflejar
6. Si $f(r) \geq f(x(n))$, realice una contracción entre m y lo mejor de $x(n + 1)$ y r :
 - a. Si $f(r) < f(x(n + 1))$, (es decir r es mejor que $x(n + 1)$), calcule $c = m + (r - m)/2$ y calcule $f(c)$. Si $f(c) < f(r)$, acepta c y finaliza la iteración. De lo contrario continúe con el Paso 7 (Reducir).
 - b. Si $f(r) \geq f(x(n + 1))$, calcule $cc = m + (x(n + 1) - m)/2$ y calcule $f(cc)$. Si $f(cc) < f(x(n + 1))$, acepte cc y finalice la iteración. Contraer el interior, de lo contrario continúe con el Paso 7 (Reducir).
7. Calcular los n puntos $v(i) = x(1) + (x(i) - x(1))/2$ y calcule $f(v(i)), i = 2, \dots, n + 1$. El simplex en la siguiente iteración es $x(1), v(2), \dots, v(n + 1)$.

3.10. Optimización restringida.

La minimización restringida es el problema de encontrar un vector x que sea un mínimo local para una función escalar $f(x)$ sujeta a restricciones sobre la x permisible como lo especifica (3.18):

$$\min_x f(x) \tag{3.18}$$

tal que se cumpla uno o más de los siguientes:

$$\begin{aligned}
C(x) &\leq 0, \\
Ceq(x) &= 0, \\
A \cdot x &\leq b, \\
Aeq \cdot x &= beq, \\
l &\leq x \leq u.
\end{aligned}$$

Algunos de los métodos utilizados en los solucionadores se basan en regiones de confianza, que es un concepto simple pero poderoso de optimización. Para comprender el enfoque de la región de confianza para la optimización, considere el problema de minimización sin restricciones, para minimizar $f(x)$, donde la función toma argumentos vectoriales y devuelve escalares. Suponga que se encuentra en un punto x en el espacio n y desea moverse a un punto con un valor de función más bajo. La idea básica es aproximar f con una función q más simple, que refleja razonablemente el comportamiento de la función en una vecindad N alrededor del punto x , así definimos este espacio como la región de confianza, así un paso de prueba s se calcula minimizando o aproximadamente minimizando sobre N . Este es el sub-problema de la región de confianza, que expresa (3.19).

$$\min_s \{q(s), s \in N\} \quad (3.19)$$

El punto actual se actualiza para ser $x + s$ si $f(x + s) < f(x)$; de lo contrario, el punto actual permanece sin cambios y N , la región de confianza se reduce y se repite el cálculo del paso de prueba.

Las preguntas clave para definir un enfoque de región de confianza específico para minimizar $f(x)$ son cómo elegir y calcular la aproximación q , definida en el punto actual x , cómo elegir y modificar la región de confianza N y con qué precisión resolver el subproblema de la región de confianza.

En el método estándar de la región de confianza [43], la aproximación cuadrática q está definida por los dos primeros términos de la aproximación de Taylor a F en x ; la vecindad N suele tener forma esférica o elipsoidal, así en forma matemática, el subproblema de la región de confianza se establece típicamente como en (3.20).

$$\min \left\{ \frac{1}{2} s^T H s + s^T g : \|D s\| \leq \Delta \right\} \quad (3.20)$$

donde g es el gradiente de f en el punto actual x , H es la matriz hessiana, D es una matriz de escala diagonal, Δ es un escalar positivo y $\| \cdot \|$ es la segunda norma. En [43] se muestran algoritmos efectivos para resolver la ecuación (3.20), los que normalmente implican el cálculo de un sistema propio completo y un proceso de Newton aplicado a la ecuación secular (3.21).

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{s} = 0 \quad (3.21)$$

Estos algoritmos proporcionan una solución precisa a la ecuación (3.20), sin embargo, requieren un tiempo proporcional a varios cálculos de H , por lo que para problemas a gran escala se necesita un enfoque diferente. En la literatura se han propuesto varias estrategias heurísticas y de aproximación [44]. El enfoque de aproximación seguido en

los solucionadores es restringir el subproblema de la región de confianza a un subespacio bidimensional S .

3.11. Método de gradiente conjugado preconditionado

Una forma popular de resolver grandes sistemas simétricos positivos definidos de ecuaciones lineales $Hp = -g$ es el método de gradientes conjugados preconditionados (PCG). Este enfoque iterativo requiere la capacidad de calcular productos matriz-vector de la forma $H \cdot v$ donde v es un vector arbitrario. La matriz definida positiva simétrica M es un preconditionador para H . Es decir, $M = C^2$, donde $C^{-1}HC^{-1}$ es una matriz bien acondicionada o una matriz con valores propios agrupados.

En un contexto de minimización, puede asumir que la matriz Hessiana H es simétrica, garantizando que será positivo definido solo en la vecindad de un minimizador fuerte. El algoritmo PCG sale cuando se encuentra una dirección de curvatura negativa o cero, es decir $d^T H d \leq 0$. La dirección de salida de PCG p , es de curvatura negativa o una solución aproximada del sistema de Newton $Hp = -g$. En cualquier caso, p se utiliza para ayudar a definir el subespacio bidimensional utilizado en el enfoque de la región de confianza mencionado en los métodos de la región de confianza para la minimización no lineal de la presente tesis.

3.11.1. Restricciones de igualdad lineal.

Las restricciones lineales adicionan a la situación descrita para la minimización sin restricciones, adiciona ideas subyacentes que se pueden llevar a cabo de una manera limpia y eficiente, mediante los métodos de la región de confianza en un proceso que generan iteraciones estrictamente factibles, lo que se puede escribir como en (3.22).

$$\min\{f(x) : Ax = b\} \quad (3.22)$$

donde A es una matriz $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \leq n$). Algunas técnicas de solución preprocesan A para eliminar las dependencias lineales estrictas utilizando la factorización de A^T [34].

El método utilizado para resolver la ecuación 21 difiere del enfoque sin restricciones en dos aspectos importantes. Primero, se calcula un punto factible inicial x_0 , usando un paso de mínimos cuadrados dispersos, de modo que $Ax_0 = b$. En segundo lugar, el algoritmo PCG se reemplaza con gradientes conjugados preconditionados reducidos (RPCG), en [34] se muestra el proceso para calcular un paso de Newton reducido aproximado o una dirección de curvatura negativa en el espacio nulo de A . El paso clave del álgebra lineal implica resolver sistemas de la forma (3.23)

$$\begin{bmatrix} C & \tilde{A}^T \\ \tilde{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Donde \tilde{A} se aproxima a A , de tal manera que los no ceros pequeños de A se establecen en cero siempre que no se pierda el rango y C es una aproximación simétrica positiva definida dispersa de H , es decir $C = H$.

3.11.2. Restricciones de caja o de límites

El problema de caja constreñida tiene la forma (3.24)

$$\min\{f(x) : l \leq x \leq u\} \quad (3.24)$$

donde l es un vector de límites inferiores y u es un vector de límites superiores, así algunas o todos los componentes de l pueden ser iguales a $-\infty$ y algunas o todos los componentes de u pueden ser iguales a ∞ , este método genera una secuencia de puntos estrictamente factibles y se utilizan dos técnicas para mantener la viabilidad mientras se logra un comportamiento de convergencia robusto.

Primero, un paso de Newton modificado a escala reemplaza el paso de Newton sin restricciones para definir el subespacio bidimensional s .

Segundo, las reflexiones se utilizan para aumentar el tamaño del paso, así el paso de Newton modificado a escala surge de examinar las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para la ecuación (3.24),

$$(D(x))^{-2}g = 0 \quad (3.25)$$

Donde $D(x) = \text{diagonal}(|v_k|^{-1/2})$ y el vector $v(x)$ se define a continuación, para cada $1 \leq i \leq n$:

- Si $g_i < 0$ y $u_i < \infty$ entonces $v_i = x_i - u_i$
- Si $g_i \geq 0$ y $l_i > -\infty$ entonces $v_i = x_i - l_i$
- Si $g_i < 0$ y $u_i = \infty$ entonces $v_i = -1$
- Si $g_i \geq 0$ y $l_i > -\infty$ entonces $v_i = 1$

El sistema no lineal ecuación (3.25) no es diferenciable en todas partes, lo cual ocurre cuando $v_i = 0$, así para evitar tales puntos manteniendo una viabilidad estricta $l < x < u$. Por otro lado, el paso s_k de Newton modificado a escala para el sistema no lineal de ecuaciones dado por la ecuación (3.25) se define como la solución del sistema lineal expresada en (3.26).

$$\hat{M}Ds^N = -\hat{g} \quad (3.26)$$

en la k -ésima iteración, donde se tiene (3.27) y (3.28).

$$\hat{g} = D^{-1}g = \text{diagonal}(|v|^{1/2})g \quad (3.27)$$

$$\hat{M} = D^{-1}HD^{-1} + \text{diagonal}(g)J^v \quad (3.28)$$

Aquí J^v juega el papel del jacobiano de $|v|$. Cada componente diagonal de la matriz diagonal J^v es igual a 0, -1 o 1. Si todas las componentes de l y u son finitas, $J^v = \text{diagonal}(\text{sign}(g))$. En un punto donde $g_i = 0$, v_i podría no ser diferenciable con $J_{ii}^v = 0$ que define ese punto, lo que no es significativo para el valor que toma v_i . Además $|v_i|$ seguirá siendo discontinua en este punto, sin embargo la función $|v_i| \cdot g_i$ es continua.

Ahora, las reflexiones se utilizan para aumentar el tamaño del paso, así un paso de reflexión (único) se define como sigue. Dado un paso p que se cruza con una restricción

de límite, al considerar la primera restricción de límite cruzada por p , por lo que se supone que es la restricción de límite i ésima ya sea en el límite superior o en el inferior. Entonces el paso de reflexión $p^R = p$ excepto en el i -ésimo componente, donde $p_i^R = -p_i$.

3.12. Ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

En la optimización restringida, el objetivo general es transformar el problema en un subproblema más fácil que luego pueda resolverse y utilizarse como base de un proceso iterativo. Una característica de una gran clase de métodos tempranos es la traducción del problema restringido a un problema básico no restringido mediante el uso de una función de penalización para las restricciones que están cerca o más allá del límite de la restricción, así el problema restringido se resuelve utilizando una secuencia de optimizaciones no restringidas parametrizadas, que en el límite de la secuencia convergen al problema restringido. Estos métodos ahora se consideran relativamente ineficientes y han sido reemplazados por métodos que se han centrado en la solución de las ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que se refiere a las condiciones necesarias para la optimización de un problema de optimización restringido. Si el problema es una situación de programación llamado convexo, es decir $f(x)$ y $G_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, son funciones convexas, entonces las ecuaciones KKT son necesarias y suficientes para una punto de solución global.

Con referencia a la ecuación (3.18), las ecuaciones de Kuhn-Tucker se pueden establecer como en (3.29)

$$\begin{aligned} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla G_i(X^*) &= 0 \\ \lambda_i \cdot G_i(X^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.29}$$

además de las restricciones originales de la ecuación (3.18).

La primera ecuación de (3.29) describe una cancelación de los gradientes entre la función objetivo y las restricciones activas en el punto de solución. Para que los gradientes se cancelen, los multiplicadores de Lagrange λ_i , $i = 1, \dots, m$ son necesarios para equilibrar las desviaciones en la magnitud de la función objetivo y los gradientes de restricción. Debido a que sólo se incluyen restricciones activas en esta operación de cancelación, las restricciones que no están activas no deben incluirse en esta operación y por lo tanto, reciben multiplicadores de Lagrange iguales a 0. Esto se indica implícitamente en las dos últimas ecuaciones de Kuhn-Tucker. La solución de las ecuaciones KKT forma la base de muchos algoritmos de programación no lineal, que intentan calcular los multiplicadores de Lagrange directamente. Los métodos de cuasi-Newton restringidos garantizan la convergencia lineal al acumular información de segundo orden con respecto a las ecuaciones KKT utilizando un procedimiento de actualización de cuasi-Newton. Estos métodos se conocen comúnmente como métodos de programación cuadrática secuencial (SQP), ya que un subproblema de programación cuadrática (QP) se resuelve en cada iteración principal, que también es conocido como

programación cuadrática iterativa, programación cuadrática recursiva y métodos métricos de variables restringidas.

3.13. Programación cuadrática secuencial (SQP)

Los métodos SQP representan el estado del arte en métodos de programación no lineal. Schittkowski [45] ha implementado y probado una versión que supera a cualquier otro método probado en términos de eficiencia, precisión y porcentaje de soluciones exitosas, en un gran número de problemas de prueba.

Con base en el trabajo de Biggs [46], Han [47] y Powell [48], el método le permite imitar de cerca el método de Newton para la optimización restringida tal como se hace para la optimización no restringida. En cada iteración principal, se hace una aproximación del hessiano de la función lagrangiana utilizando un método de actualización cuasi-Newton, para generar un subproblema QP cuya solución se usa para formar una dirección de búsqueda para un procedimiento de búsqueda de línea. Dada la descripción del problema en la ecuación (3.18), la idea principal es la formulación de un subproblema QP basado en una aproximación cuadrática de la función Lagrangiana de (3.30).

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) \quad (3.30)$$

Aquí se simplifica la ecuación (3.18) asumiendo que las restricciones de límite se han expresado como restricciones de desigualdad y el subproblema QP se obtiene al linealizar las restricciones no lineales.

Subproblema de programación cuadrática (QP) de (3.31).

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) = 0, i = 1, \dots, m_e \\ \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) \leq 0, i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.31)$$

Este subproblema se puede resolver usando cualquier algoritmo QP donde, la solución se utiliza para formar una nueva iteración de (3.32).

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (3.32)$$

El parámetro de longitud de paso α_k se determina mediante un procedimiento de búsqueda de línea apropiado, de modo que se obtenga una disminución suficiente en una función de mérito en la actualización de la matriz de Hesse. La matriz H_k es una aproximación positiva definida de la matriz hessiana de la función lagrangiana de la ecuación (3.29) y su puede actualizar mediante cualquiera de los métodos cuasi-Newton, aunque el método BFGS parece ser el más popular.

Un problema con restricciones no lineales a menudo se puede resolver en menos iteraciones que un problema sin restricciones usando SQP, lo cual se debe principalmente a los límites del área factible, por lo que el método puede tomar decisiones informadas con respecto a las direcciones de búsqueda y la longitud del paso.

3.14. Implementación de SQP

La implementación de SQP consta de tres etapas principales, que se analizan brevemente en las siguientes subsecciones:

3.14.1. Actualización de la matriz de Hesse

En cada iteración principal, se calcula una aproximación cuasi-Newton positiva definida del hessiano de la función de Lagrange H , utilizando el método BFGS, donde $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, es una estimación de los multiplicadores de Lagrange, que se muestra en la ecuación (3.11), dónde se tendrá (3.33).

$$s_k = x_{k+1} - x_k$$

$$q_k = \left(\nabla f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_{k+1}) \right) - \left(\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_k) \right) \quad (3.33)$$

Powell recomienda mantener definido el hessiano positivo aunque pueda ser positivo indefinido en el punto de solución, lo cual se logra siempre que $q_k^T s_k > 0$ en cada actualización de H y se inicializa con una matriz definida positiva. Cuando $q_k^T s_k$ no es positivo, q_k se modifica elemento por elemento de modo que $q_k^T s_k > 0$. Así el objetivo general de esta modificación es distorsionar los elementos de q_k , que contribuyen a una actualización definitiva positiva, lo menos posible. Por lo tanto, en la fase inicial de la modificación, el elemento más negativo de $q_k^* s_k$ se reduce repetidamente a la mitad. Este procedimiento se continúa hasta $q_k^T s_k$ es mayor o igual que una pequeña tolerancia negativa. Si después de este procedimiento, $q_k^T s_k$ aún no es positivo, modifique q_k sumando un vector v multiplicado por un escalar constante w , es decir (3.34),

$$q_k = q_k + wv \quad (3.34)$$

Donde

$$v_i = \begin{cases} \nabla g_i(x_{k+1}) \cdot g_i(x_{k+1}) - \nabla g_i(x_k) \cdot g_i(x_k) & \text{si } (q_k)_i \cdot w < 0 \text{ \& } (q_k)_i \cdot (s_k)_i < 0, i = 1, \dots, m \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.35)$$

y aumentar w sistemáticamente hasta $q_k^T s_k$ se vuelve positivo.

Cuando el hessiano tiene que modificarse utilizando la primera fase del procedimiento anterior para mantenerlo definido como positivo, se debe modificar nuevamente usando la segunda fase del enfoque descrito anteriormente. Cuando el subproblema QP no es factible o se muestra inviable, se debe a que el problema es muy no lineal o la función

no presenta concavidad y que la convergencia puede tardar más de lo habitual, lo que indica que $q_k^T s_k$ es casi cero. Esto puede ser una indicación de que la configuración del problema es incorrecta o de que está intentando minimizar una función no continua.

3.14.2. Solución de programación cuadrática

En cada iteración principal del método SQP, se resuelve un problema QP de la forma (3.36), donde A_i se refiere a la i -ésima fila de la matriz A de $m \times n$.

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} q(d) &= \frac{1}{2} d^T H d + c^T d \\ A_i d &= b_i, i = 1, \dots, m_e \\ A_i d &\leq b_i, i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.36}$$

El método utilizado en las funciones es una estrategia de conjunto activo, también conocida como método de proyección, similar a la de Gill que se describe en [49]. Se puede modificar para problemas de Programación lineal (LP) y Programación cuadrática (QP). El procedimiento de solución consta de dos fases. La primera fase implica el cálculo de un punto factible (en caso de existir). La segunda fase implica la generación de una secuencia iterativa de puntos factibles que convergen hacia la solución. En este método, un conjunto activo \bar{A}_k , se mantiene ya que es una estimación de las restricciones activas, es decir aquellas que están en los límites de la restricción y en el punto de solución. Prácticamente todos los algoritmos QP son métodos de conjuntos activos. Este punto se enfatiza porque existen muchos métodos diferentes que son muy similares en estructura pero que se describen en términos muy diferentes.

\bar{A}_k se actualiza en cada iteración k , y esto se usa para formar una base para una dirección de búsqueda \hat{d}_k . Las restricciones de igualdad siempre permanecen en el conjunto activo \bar{A}_k . La notación de la variable \hat{d}_k se utiliza aquí para distinguirlo de d_k en las principales iteraciones del método SQP. La dirección de búsqueda \hat{d}_k se calcula y minimiza la función objetivo mientras permanece en cualquier límite de restricción activo. El subespacio factible para \hat{d}_k se forma a partir de una base Z_k cuyas columnas son ortogonales a la estimación del conjunto activo \bar{A}_k que implica $\bar{A}_k Z_k = 0$. Por tanto se garantiza que una dirección de búsqueda, que se forma a partir de una suma lineal de cualquier combinación de las columnas de Z_k , permanecerá en los límites de las restricciones activas.

Ahora, la matriz Z_k se forma a partir de las últimas $m-l$ columnas de la descomposición QR de la matriz \bar{A}_k^T , donde l es el número de restricciones activas y $l < m$. Es decir Z_k viene dado por (3.37),

$$Z_k = Q[:, l+1:m] \tag{3.37}$$

Donde la relación se define en (3.38)

$$Q^T \bar{A}_k^T = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Una vez que se encuentra Z_k , una nueva dirección de búsqueda \hat{d}_k se trata que minimice $q(d)$ donde \hat{d}_k está en el espacio nulo de las restricciones activas. Es decir \hat{d}_k es una combinación lineal de las columnas de Z_k : $\hat{d}_k = Z_k p$ para algún vector p . Entonces si ve la cuadrática como una función de p , sustituyendo por \hat{d}_k , se tiene (3.39)

$$q(p) = \frac{1}{2} p^T Z_k^T H Z_k p + c^T Z_k p \quad (3.39)$$

Diferenciar esto con respecto a p como (3.40)

$$\nabla q(p) = Z_k^T H Z_k p + Z_k^T c \quad (3.40)$$

De (3.40) $\nabla q(p)$ se conoce como el gradiente proyectado de la función cuadrática en el subespacio definido por Z_k . El término $Z_k^T H Z_k$ se denomina el hessiano proyectado. Suponiendo que la matriz hessiana H es definida positiva, que es el caso en esta implementación de SQP, entonces el mínimo de la función $q(p)$ en el subespacio definido por Z_k ocurre cuando $\nabla q(p) = 0$, que es la solución del sistema de ecuaciones lineales (3.41) y (3.42)

$$Z_k^T H Z_k p = -Z_k^T c \quad (3.41)$$

Luego se da un paso de la forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \hat{d}_k, \text{ donde } \hat{d}_k = Z_k p \quad (3.42)$$

En cada iteración, debido a la naturaleza cuadrática de la función objetivo, solo hay dos opciones de longitud de paso α . Un paso de unidad a lo largo \hat{d}_k es el paso exacto al mínimo de la función restringida al espacio nulo de \bar{A}_k . Si se puede dar tal paso sin violar las restricciones, entonces ésta es la solución para QP de la ecuación (3.36). De lo contrario, el paso \hat{d}_k a la restricción más cercana es menor que la unidad y se incluye una nueva restricción en el conjunto activo en la siguiente iteración. La distancia a los límites de la restricción en cualquier dirección \hat{d}_k está dado por (3.43)

$$\alpha = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \frac{-(A_i x_k - b_i)}{A_i d_k} \right\} \quad (3.43)$$

que se define para las restricciones que no están en el conjunto activo y donde la dirección \hat{d}_k está hacia el límite de restricción, es decir $A_i d_k > 0, i = 1, \dots, m$. Cuando se incluyen n restricciones independientes en el conjunto activo, sin la ubicación del mínimo, se calculan los multiplicadores de Lagrange λ_k , que satisfacen el conjunto no singular de ecuaciones lineales de (3.44).

$$\bar{A}_k^T \lambda_k = c \quad (3.44)$$

Si todos los elementos de λ_k son positivos, x_k es la solución óptima de QP (ecuación (3.36)). Sin embargo, si cualquier componente de λ_k es negativo y el componente no corresponde a una restricción de igualdad, entonces el elemento correspondiente se elimina del conjunto activo y se busca una nueva iteración.

Inicialización

El algoritmo requiere un punto factible para comenzar. Si el punto actual del método SQP no es factible, entonces puede encontrar un punto resolviendo el problema de programación lineal de (3.45)

$$\begin{aligned} \min_{\gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}} \quad & \gamma \\ A_i x &= b_i, i = 1, \dots, m_e \\ A_i x - \gamma &\leq b_i, i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.45)$$

La notación A_i indica la i -ésima fila de la matriz A . Puede encontrar un punto factible (si existe) en la ecuación (3.44) estableciendo x en un valor que satisfaga las restricciones de igualdad. Puede determinar este valor resolviendo un conjunto subdeterminado o sobredeterminado de ecuaciones lineales formado a partir del conjunto de restricciones de igualdad. Si hay una solución a este problema, entonces la variable de holgura γ se establece en la restricción de desigualdad máxima en este punto.

Puede modificar el algoritmo QP anterior para problemas de LP estableciendo la dirección de búsqueda en la dirección de descenso más pronunciada en cada iteración, donde g_k es el gradiente de la función objetivo (igual a los coeficientes de la función objetivo lineal).

$$\hat{d}_k = -Z_k Z_k^T g_k \quad (3.46)$$

Si se encuentra un punto factible (3.46) utilizando el método LP anterior, se ingresa a la fase QP principal. La dirección de búsqueda \hat{d}_k se inicializa con una dirección de búsqueda \hat{d}_1 encontrado al resolver el conjunto de ecuaciones lineales de (3.47)

$$H \hat{d}_1 = -g_1 \quad (3.47)$$

donde g_k es el gradiente de la función objetivo en la iteración actual x_k , es decir $Hx_k + c$. En caso de no encontrar una solución factible para el problema de QP, la dirección de búsqueda de la rutina principal de SQP se toma como una que minimiza γ .

3.14.3. Función de búsqueda de línea y mérito

La solución al subproblema QP produce un vector d_k , que se utiliza para formar una nueva iteración de acuerdo a (3.48).

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k \quad (3.48)$$

El parámetro de longitud de paso α_k se determina para producir una disminución suficiente en una función de mérito. En esta implementación se utiliza la función de mérito utilizada por Han y Powell [48] de la siguiente forma (3.49).

$$\Psi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_e} r_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=m_e+1}^m r_i \cdot \max[0, g_i(x)] \quad (3.49)$$

Powell recomienda configurar el parámetro de penalización de acuerdo a (3.50)

$$r_i = (r_{k+1})_i = \max_i \left\{ \lambda_i, \frac{(r_k)_i + \lambda_i}{2} \right\}, i = 1, \dots, m \quad (3.50)$$

Esto permite una contribución positiva de las restricciones que están inactivas en la solución QP pero que estuvieron activas recientemente. En esta implementación, el parámetro de penalización r_i se establece inicialmente en lo definido en (3.51).

$$r_i = \frac{\|\nabla f(x)\|}{\|\nabla g_i(x)\|} \quad (3.51)$$

Donde $\| \cdot \|$ representa la norma euclidiana. Esto asegura mayores contribuciones al parámetro de penalización de restricciones con gradientes más pequeños, que sería el caso de restricciones activas en el punto de solución.

3.15. Algoritmo SQP

El algoritmo SQP es similar al algoritmo de conjunto activo y se describe en el capítulo 18 de Nocedal y Wright [50]. Las diferencias más importantes entre SQP y los algoritmos de conjunto activo son:

1. Viabilidad estricta con respecto a los límites. El algoritmo SQP toma cada paso iterativo en la región restringida por límites. Además los pasos de diferencias finitas también respetan los límites. Los límites no son estrictos; un paso puede estar exactamente en un límite. Esta viabilidad estricta puede ser beneficiosa cuando su función objetivo o funciones de restricción no lineales no están definidas o son complejas fuera de la región restringida por límites.
2. Robustez para resultados no dobles. Durante sus iteraciones, el algoritmo SQP puede intentar dar un paso que falla. Esto significa que una función objetivo o función de restricción no lineal que proporcione devuelve un valor indeterminado debido a una singularidad o un valor complejo, en este caso, el algoritmo debe intentar dar un paso más pequeño para acercarse al límite.
3. Rutinas de álgebra lineal refactorizadas. El algoritmo SQP usa un conjunto diferente de rutinas de álgebra lineal para resolver el subproblema de programación cuadrática. Estas rutinas deben ser más eficientes tanto en el uso de memoria como en la velocidad que las rutinas activas.
4. Rutinas de viabilidad reformuladas. El algoritmo SQP tiene dos nuevos enfoques para la solución de la ecuación (3.31) cuando no se satisfacen las restricciones.
 - El algoritmo SQP combina las funciones objetivo y de restricción en una función de mérito. El algoritmo intenta minimizar la función de mérito sujeta a restricciones

relajadas. Este problema modificado puede conducir a una solución viable. Sin embargo, este enfoque tiene más variables que el problema original, por lo que el tamaño del problema en la ecuación (3.31) aumenta. El aumento de tamaño puede ralentizar la solución del subproblema.

- Suponga que no se satisfacen las restricciones no lineales y un intento de paso hace que la violación de la restricción aumente. El algoritmo SQP intenta obtener la viabilidad mediante una aproximación de segundo orden a las restricciones. La técnica de segundo orden puede conducir a una solución viable. Sin embargo, esta técnica puede ralentizar la solución al requerir más evaluaciones de las funciones de restricción no lineales.

3.16. Algoritmo de punto interior

El enfoque de punto interior para la minimización restringida es resolver una secuencia de problemas de minimización aproximados. El problema original de (3.52).

$$\min_x f(x), \quad \text{sujeto a } h(x) = 0 \text{ y } g(x) \leq 0 \quad (3.52)$$

Para cada $\mu > 0$, el problema aproximado es como (3.53)

$$\min_{x,s} f_\mu(x,s) = \min_{x,s} f(x,s) - \mu \sum_i \ln(s_i) \quad \text{sujeto a } h(x) = 0 \text{ y } g(x) + s \leq 0 \quad (3.53)$$

Hay tantas variables de holgura s_i como restricciones de desigualdad g . Los s_i están restringidos a ser positivos para mantener $\ln(s_i)$ acotado. A medida que μ disminuye a cero, el mínimo de f_μ debe acercarse al mínimo de f . El término logarítmico agregado se llama función de barrera. La descripción a detalle de este método se describe en [51]. Así el problema aproximado de la ecuación (3.53) es una secuencia de problemas restringidos por igualdad, los cuales son más fáciles de resolver que el problema original con restricciones de desigualdad ecuación (3.52). Para resolver el problema aproximado, el algoritmo utiliza uno de los dos tipos principales de pasos en cada iteración:

- Un paso directo en (x,s) . Este paso intenta resolver las ecuaciones KKT, para el problema aproximado mediante una aproximación lineal. Esto también se llama paso de Newton.
- Un paso CG (gradiente conjugado), usando una región de confianza.

De forma predeterminada, el algoritmo primero intenta dar un paso directo. Si no puede, intenta un paso CG. Un caso en el que no da un paso directo es cuando el problema aproximado no es localmente convexo cerca de la iteración actual.

En cada iteración, el algoritmo disminuye una función de mérito, como en (3.54)

$$f_\mu(x,s) + v \|h(x), g(x) + s\| \quad (3.54)$$

El parámetro v puede aumentar con el número de iteraciones para forzar la solución hacia la viabilidad. Si un paso intentado no disminuye la función de mérito, el

algoritmo rechaza el paso intentado e intenta un nuevo paso. Por otro lado, si la función objetivo o una función de restricción no lineal devuelve un valor complejo o un error en una iteración x_j , el algoritmo la rechaza, lo que tiene el mismo efecto que si la función de mérito no disminuyera lo suficiente, así el algoritmo intenta un paso diferente y más corto. El objetivo y las restricciones deben producir valores adecuados en el punto inicial.

3.16.1. Paso directo

Las siguientes variables se utilizan para definir el paso directo:

- De (3.55) H denota el hessiano del lagrangiano de f_μ :

$$H = \nabla^2 f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_j \lambda_j \nabla^2 h_j(x) \quad (3.55)$$

- J_g denota el Jacobiano de la función de restricción g .
- J_h denota el Jacobiano de la función de restricción h .
- $S = \text{diagonal}(s)$.
- λ denota el vector multiplicador de Lagrange asociado con las restricciones g
- $\Lambda = \text{diagonal}(\lambda)$.
- y denota el vector multiplicador de Lagrange asociado con h .
- e denota el vector de unos del mismo tamaño que g .

La ecuación (3.56) define el paso directo $(\Delta x, \Delta s)$:

$$\begin{bmatrix} H & 0 & J_h^T & J_g^T \\ 0 & S\Lambda & 0 & -S \\ J_h & 0 & I & 0 \\ J_g & -S & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ -\Delta y \\ -\Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f - J_h^T y - J_g^T \lambda \\ S\lambda - \mu e \\ h \\ g + s \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Esta ecuación (3.56) proviene directamente de intentar resolver la ecuación $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ y la ecuación $\lambda_{g,i} g_i(x) = 0 \forall i$ usando un Lagrangiano linealizado. Para resolver esta ecuación para $(\Delta x, \Delta s)$, el algoritmo realiza una factorización de la matriz. Un resultado de esta factorización es la determinación de si el Hessiano proyectado es positivo definido o no; de lo contrario el algoritmo utiliza un paso de gradiente conjugado.

3.16.2. Paso de gradiente conjugado

El método de gradiente conjugado para resolver el problema aproximado de la ecuación (3.53) es similar a otros cálculos de gradiente conjugado. En este caso el algoritmo ajusta tanto x como s , manteniendo la holgura s positiva. El enfoque es minimizar una aproximación cuadrática al problema aproximado en una región de confianza, sujeto a restricciones linealizadas.

Específicamente, se recomienda dejar que R denote el radio de la región de confianza y permitir que otras variables se definan como en Paso Directo, así el algoritmo obtiene

multiplicadores de Lagrange resolviendo aproximadamente las ecuaciones de KKT de acuerdo a (3.57)

$$\nabla_x L = \nabla_x f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_j y_j \nabla h_j(x) = 0 \quad (3.57)$$

en el sentido de mínimos cuadrados, sujeto a que λ sea positivo. Luego se necesita un paso $(\Delta x, \Delta s)$ para resolver aproximadamente de acuerdo con (3.58).

$$\min_{\Delta x, \Delta s} \nabla f^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_{xx}^2 L \Delta x + \mu e^T S^{-1} \Delta s + \frac{1}{2} \Delta s^T S^{-1} \Delta s \quad (3.58)$$

sujeto a las restricciones linealizadas de (3.59)

$$g(x) + J_g \Delta x + \Delta s = 0, h(x) + J_h \Delta x = 0 \quad (3.59)$$

Para resolver la ecuación (3.59), el algoritmo intenta minimizar una norma de las restricciones linealizadas dentro de una región con radio escalado por R . Luego, la ecuación (3.58) se resuelve con las restricciones para igualar el residuo de resolver la ecuación (3.59), permaneciendo dentro de la región de confianza del radio R y manteniendo s estrictamente positivo. El detalle sobre el algoritmo y la derivación se muestra en [52].

Capítulo 4 Despacho energético y micro-redes.

En este capítulo se presenta el soporte técnico en el que se orientó la investigación del presente trabajo.

4.1. Conceptos

Las definiciones de intensidad de corriente eléctrica i y tensión o voltaje v se muestran en (4.1)

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad v = \frac{dw}{dq} \qquad p = v \cdot i = \frac{dw}{dt} \qquad (4.1)$$

Donde q es la carga eléctrica que se mueve por unidad de tiempo t , w es la energía requerida para hacerlo y p es la potencia empleada, así con la interacción de varias potencias nos dará la relación (4.2), conocida como el Teorema de Tellegen [53].

$$\sum_i p_i = \frac{dw}{dt} \qquad (4.2)$$

Al estudiar las relaciones de equilibrio de una red de corriente alterna (ca) con entradas sinusoidales y en estado estacionario, se puede expresar en general como (4.3).

$$v(t) = R(Ie^{j\omega t}) \qquad i(t) = \frac{1}{R}(Ve^{j\omega t}) \qquad (4.3)$$

Y al expresar en el dominio de la frecuencia angular ω , se tiene (4.4).

$$V(\omega) = Z(\omega) \cdot I(\omega) \qquad I(\omega) = Y(\omega) \cdot V(\omega) \qquad (4.4)$$

Donde $Z(\omega)$ se le denomina impedancia compleja y a $Y(\omega)$ la admitancia compleja de la componente pasiva del circuito eléctrico, de acuerdo con (4.5).

$$Z(\omega) = R(\omega) + j X(\omega) \qquad Y(\omega) = G(\omega) + j B(\omega) \qquad (4.5)$$

Donde $R(\omega)=\text{Re} \{Z\}$ denominada Resistencia, $X(\omega)=\text{Im} \{Z\}$ denominada Reactancia, $G(\omega)=\text{Re} \{Y\}$ denominada Conductancia y $B(\omega) =\text{Im} \{Y\}$ denominada Susceptancia, que son funciones de la frecuencia angular ω , así para las componentes pasivas se cumple con (4.6).

$$R(\omega) = \frac{G(\omega)}{G^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad (4.6)$$

Al ingresar una potencia $p(t)$ de ca de naturaleza sinusoidal a una red pasiva se tienen las expresiones (4.7)

$$i(t) = I \cos(\omega t + \alpha) \qquad v(t) = V \cos(\omega t + \alpha + \varphi) \qquad (4.7)$$

La potencia instantánea será una señal sinusoidal con frecuencia angular al doble de las variables del voltaje y corriente de la red, de acuerdo a la función (4.8)

$$p(t) = \frac{VI}{2} [\cos \varphi + \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) - \text{sen } \varphi \text{sen}(2\omega t + 2\alpha)] \quad (4.8)$$

4.2. Flujo de potencia

En los procesos energéticos que ocurren en la red pasiva, al analizar la potencia $p(t)$, se puede descomponer de la forma (4.9),

$$p(t) = p_a(t) + p_o(t) \quad (4.9)$$

donde

$$p_a(t) = \frac{VI \cos \varphi}{2} + \frac{VI \cos \varphi}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha) \quad p_o(t) = \frac{-VI \text{sen } \varphi}{2} \text{sen}(2\omega t + 2\alpha) \quad (4.10)$$

Al introducir el concepto de valor eficaz para una onda sinusoidal para los parámetros de voltaje y corriente de acuerdo a (4.11).

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt} \quad v_{ef} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad (4.11)$$

El valor medio oscilante de la potencia activa que nos define la energía utilizable que se mide en Watt, estará determinada por (4.12)

$$\overline{p_a} = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad \overline{p_o} = 0 \quad (4.12)$$

De esta misma manera el valor de la potencia oscilante reactiva medida en VoltAmpere Reactivo, que se refiere al flujo de energía que entra a la red y su valor medio es cero por lo que es ociosa o prácticamente inútil. En (4.13), al realizar la transformación a notación fasorial con los valores efectivos la potencia total o aparente P que define el flujo de potencia en redes sometidas a excitaciones sinusoidales y en estado estacionario

$$P = p_a + j p_o \quad \begin{aligned} p_a &= V_{ef} I_{ef} \cos \varphi \\ p_o &= V_{ef} I_{ef} \text{sen } \varphi \end{aligned} \quad (4.13)$$

La existencia de la potencia reactiva provoca el inconveniente en las empresas generadoras al realizar la transmisión de energía, por lo que generalmente buscan lograr la máxima potencia transferida en la red eléctrica. Con base al teorema de Thévenin¹ se busca el conjugado de la impedancia mediante el ajuste del ángulo de

¹ El teorema de Thévenin establece que si una parte de un circuito eléctrico lineal está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte en cuestión puede sustituirse por un circuito equivalente que esté constituido únicamente por un generador de tensión en serie con una resistencia, de forma que al conectar un elemento entre los dos terminales

defasamiento entre los parámetros de la potencia.

4.3. Red eléctrica (Generación centralizada)

Bajo el esquema de generación centralizada, una red eléctrica es un conjunto de elementos que interactúan entre sí con el propósito de suministrar electricidad desde los proveedores hasta los consumidores. Consiste de tres componentes principales, las plantas generadoras que producen electricidad a partir de una fuente primaria, que pueden ser combustibles fósiles (carbón, gas natural, biomasa) o combustibles no fósiles (eólica, solar, nuclear, hidráulica); Las líneas de transmisión que transportan la electricidad de las plantas generadoras a los centros de demanda y la subred de distribución que consiste en los transformadores que reducen el voltaje para que las líneas de entrega y demás accesorios puedan suministrar la energía al consumidor final. En la industria de la energía eléctrica, la red eléctrica es un término usado para definir una red de electricidad que realizan estas tres operaciones:

1. Generación de electricidad: Las plantas generadoras que usualmente se ubican cerca de las grandes fuentes del energético primario y alejadas de áreas pobladas. Esta energía generada se le incrementa su tensión eléctrica para su entrega a la red de transmisión y reducir las pérdidas.
2. Transmisión de electricidad: La red de transmisión transportará la energía a grandes distancias, acercándolo a los grandes centros de consumo.
3. Distribución de electricidad: Se considera a partir de la subestación que se encarga de reducir el voltaje y entregarlo a las líneas locales para su reducción de tensión eléctrica para la entrega al consumidor final, de acuerdo al contrato de servicio individual.

4.4. Gestión de la red eléctrica.

La preparación del plan de comercio de energía eléctrica es una de las principales tareas del centro de comercio de energía en la mayoría de las naciones, de tal manera que se debe atender la demanda en forma segura y rentable con la adecuada gestión de la red eléctrica. Para el caso particular de nuestro país, se tiene el Centro Nacional de Control de Energía (CENACE) que es un organismo público descentralizado cuyo objeto es ejercer el Control Operativo del Sistema Eléctrico Nacional, atendiendo al mercado eléctrico mayorista y garantizar imparcialidad en el acceso a la Red Nacional de Transmisión y a las Redes Generales de Distribución. Es responsable de formular los programas de ampliación y modernización de la Red Nacional de Transmisión y de las Redes Generales de Distribución, los cuales en caso de ser autorizados por la Secretaría de Energía (SENER) se incorporan al Programa de Desarrollo del Sistema Eléctrico Nacional (PRODESEN). Así una de las funciones principales del CENACE es el despacho energético, que como operador independiente del mercado eléctrico mayorista y del sistema eléctrico nacional en México, tiene como misión, sustentar eficientemente las

A y B, la tensión que queda en él y la intensidad que circula son las mismas tanto en el circuito real como en el equivalente

transacciones de los productos de la electricidad entre generadores y consumidores [54]. En este contexto el CENACE requiere que la gestión de los recursos de generación de energía se efectúe mediante una estrategia adecuada para garantizar el suministro confiable de electricidad, atendiendo los picos de demanda así como los imprevistos que se puedan presentar durante la operación de la red eléctrica. En la actualidad, los planes de generación de energía diarios a corto plazo en el país y en el extranjero bajo el concepto de generación centralizada son relativamente maduros [55] y la investigación sobre el plan de energía anual a largo plazo también es abundante [56].

La relación entre varias fuentes de energía y cargas, se equilibra en tiempo real y se establece un modelo de plan de comercio de energía que satisface el despacho de generación de energía buscando su mayor eficiencia, al realizar la gestión de manera científica y racional durante el funcionamiento de la red. Así la complejidad del modelo matemático del sistema de energía de múltiples potencias, la gran cantidad de variables involucradas y el largo tiempo de cálculo, los altos requisitos computacionales y la potencia de procesamiento de computadora existente y los métodos de cálculo se han mejorado en gran medida.

4.5. Micro-red

Las micro-redes a diferencia de una red eléctrica principal, consisten en unidades de generación distribuida, dispositivos de almacenamiento y cargas controlables ubicadas cerca del cliente y que abarcan un área física limitada

4.5.1. Control y operación.

Los beneficios de la microrred sobre la generación centralizada pueden ser ambientales y económicos, por lo que han tenido gran aceptabilidad y grado de proliferación en la industria bajo el esquema de cogeneración y están determinados principalmente por las capacidades previstas del controlador y sus características operativas. Aunado al crecimiento en la penetración de las unidades generadoras de Recursos Energéticos Distribuidos (DER), las características de carga y las limitaciones de la calidad de la energía, así como las políticas de participación en el mercado, las estrategias de control y de operación requeridas de una micro-red pueden ser significativamente, e incluso conceptualmente, diferentes a las de los sistemas de energía convencionales por las principales razones siguientes:

- La micro-red depende inherentemente a un grado significativo de desequilibrio debido a la presencia de cargas y/o unidades DER
- La energía eléctrica en una micro-red, también suele depender de la generación y suministro calor de cogeneración en procesos alternos.
- La política del presupuesto monetario a menudo dicta que una micro-red debe acomodar fácilmente la conexión y desconexión de unidades DER y cargas mientras mantiene su operación.
- Las unidades de almacenamiento de energía a corto y largo plazo pueden desempeñar un papel importante en el control y el funcionamiento de una micro-red

- Las características dinámicas y de estado estacionario de las unidades DER, particularmente las unidades acopladas electrónicamente, son diferentes a las de las grandes unidades convencionales de turbina-generador.
- Una parte notable del suministro dentro de una micro-red puede provenir de fuentes "no controlables" con incertidumbre; por ejemplo unidades basadas en el viento o solares.
- Es posible que se requiera una micro-red para proporcionar niveles de calidad de energía predeterminados o servicios preferenciales para algunas cargas

4.5.2. Estructura y características.

La figura 4.1 muestra un ejemplo de la estructura de micro-red, la cual puede operar en modo "conectado" y formar parte de un sistema de distribución de energía eléctrica e incluye una variedad de unidades DER, así como diferentes tipos de usuarios finales de electricidad. Las unidades DER, también conocidas como generadores distribuidos por sus siglas en inglés (DG), a diferencia de la red eléctrica nacional pueden contener sistemas de almacenamiento distribuido (DS) con diferentes capacidades y características. El punto de interconexión eléctrica de la micro-red a la red superior, en el bus de baja tensión del transformador de la subestación, constituye el punto de acoplamiento común de la micro-red (PCC), así la micro-red atiende la demanda de una variedad de clientes, como pueden ser: edificios residenciales, entidades comerciales y parques industriales, entre otros.

La micro-red además de operar en modo conectado, con la adecuada gestión también se espera que proporcione suficiente capacidad de generación, control y estrategia operativa para abastecer al menos una parte de la carga después de desconectarse del sistema de distribución en el PCC y permanecer operativa como una entidad autónoma y se dice que opera en modo isla. Generalmente en la práctica, las empresas de servicios públicos no permite la puesta en isla debido al riesgo de la resincronización de la micro-red, principalmente debido a problemas de seguridad de las personas y los equipos, sin embargo la gran cantidad de penetración de las unidades DER potencialmente requiere disposiciones para los modos de operación tanto en isla como conectados a la red y una transición suave entre ambos, lo que significa reducir los transitorios de sincronización para permitir la mejor utilización de los recursos de la micro-red.

Como lo muestra la figura 4.1, dentro de los DG que pueden utilizar las micro-redes se tiene los ciclos combinados de calor y energía (CHP) en su modalidad de cogeneración, las máquinas convencionales de combustión interna (DE), sin embargo la tendencia es utilizar las fuentes de energía renovable (FER) o "limpias" que incluyen matrices fotovoltaicas (PV), generadores eólicos (WT), pila de combustible (FC), una micro-turbina (MT), entre otros, así como los sistemas de almacenamiento de energía (DS)

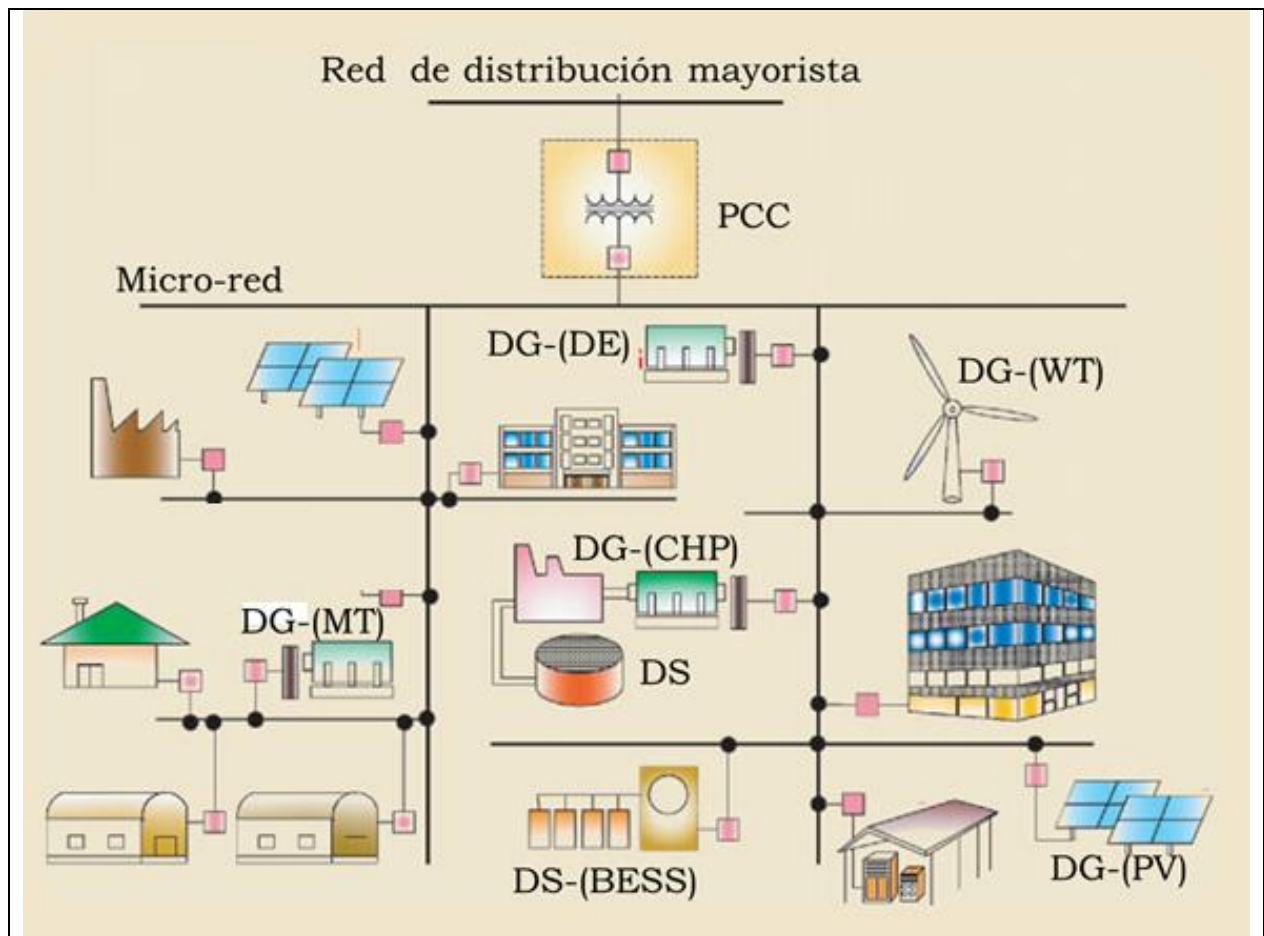


Figura 4.1. Una estructura típica de micro-red que incluye cargas, unidades DER y DS, atendidas por un sistema de distribución.

Las unidades DER en términos de su interfaz con una micro-red, se dividen en dos grupos. El primero incluye unidades convencionales o rotativas que se interconectan mediante máquinas rotativas y el segundo consta de unidades acopladas electrónicamente que utilizan convertidores electrónicos de potencia para proporcionar los medios de acoplamiento con el sistema principal. Los conceptos de control, estrategias y características de los convertidores electrónicos de potencia, como medio de interfaz para la mayoría de los tipos de unidades DG y DS, son significativamente diferentes a los de las máquinas rotativas convencionales. Por lo tanto, las estrategias de control y su comportamiento dinámico, particularmente en un modo de funcionamiento autónomo, pueden ser notablemente diferentes a los de un sistema de energía convencional.

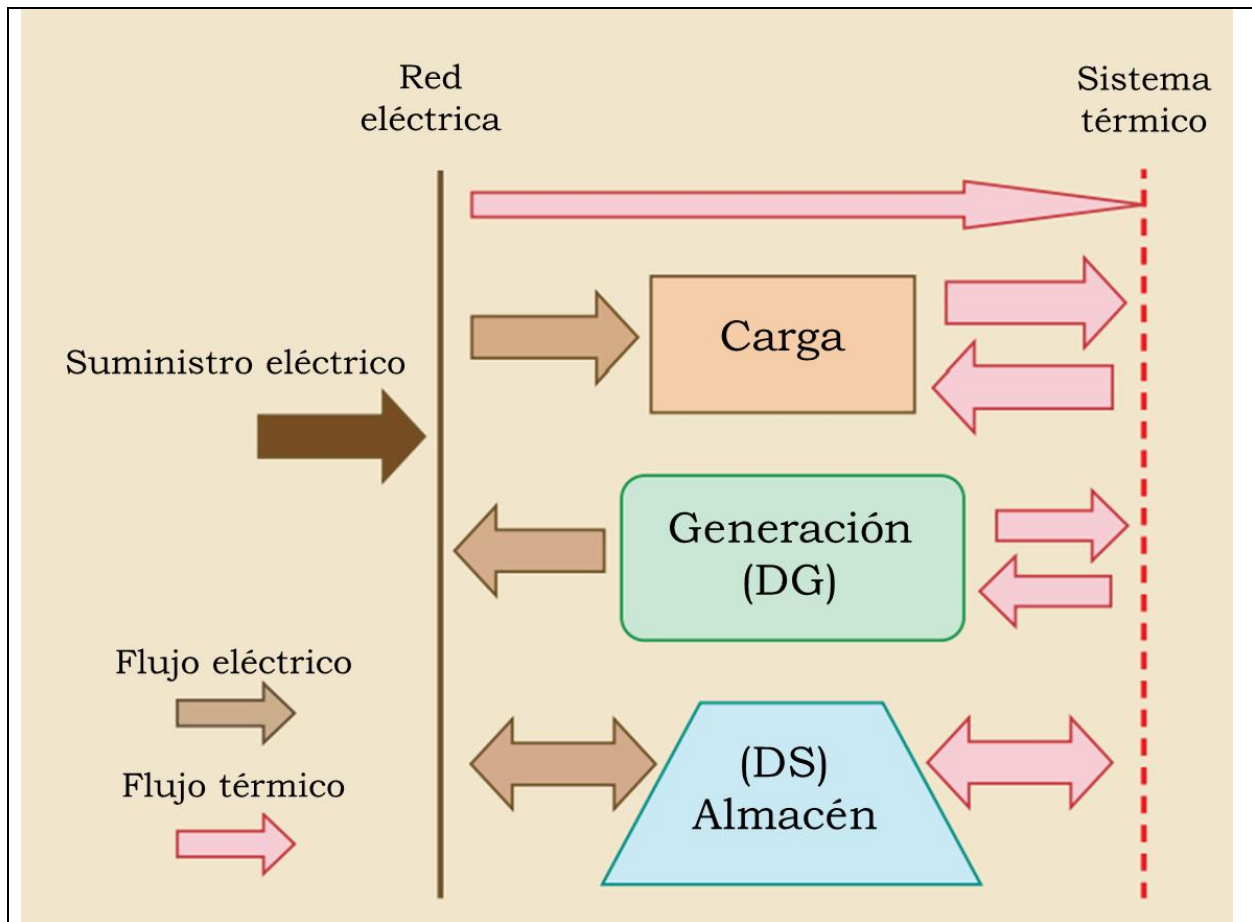


Figura 4.2. Una representación general de estrategia de una micro-red combinada.

4.5.3. Control en DG.

En contraste con las estrategias y controles operativos bien establecidos de un sistema de energía interconectado, los tipos de controles y estrategias de administración de energía previstos para una micro-red se determinan principalmente en función de las tecnologías DER contenidas, así los requisitos de carga y las necesidades operativas esperadas plantean diferentes escenarios. La figura 4.2 muestra una representación esquemática de los componentes básicos de una micro-red que incluye redes de carga, generación/almacenamiento, electricidad y térmicas, donde se implica dos niveles de controles; es decir, controles a nivel de componente y de sistema. En este sentido las unidades DER, que considera tanto los DG como a las DS generalmente se conectan a niveles de voltaje medio o bajo a la micro-red.

La figura 4.3 muestra una unidad de DG que comprende una fuente de energía primaria, un medio de interfaz y un equipo de conmutación en el punto de conexión de la unidad (PC). En una unidad DG convencional como puede ser un generador síncrono impulsado por un motor alternativo o un generador de inducción impulsado por una turbina eólica de velocidad fija) la máquina giratoria:

1. Transforma la energía de la fuente de energía primaria a energía eléctrica.

2. Actúa como medio de interfaz entre la fuente y la micro-red. Para una unidad DG acoplada electrónicamente, el convertidor de acoplamiento:
3. Proporciona otra capa de conversión y/o control en sus parámetros fundamentales de voltaje, corriente y/o frecuencia
4. Actúa como medio de interfaz con la micro-red.

La potencia de entrada al convertidor de interfaz desde el lado de la fuente puede ser corriente alterna (CA) a frecuencia fija o variable o también corriente directa (CD). Así en el lado de la micro-red del convertidor tiene una frecuencia de 50 o 60 Hz de acuerdo al estándar de la red nacional. La figura 4.3 también proporciona una representación de alto nivel de una unidad DS para la cual la "fuente de energía primaria" debe ser reemplazada por el "medio de almacenamiento".

Tabla 4.1. Medios de interfaz para unidades DER.

	Energía primaria Fuente (PES)	Interfaz/Inversión	Control de flujo de energía
Generador Distribuido convencional	Motores alternativos pequeña hidroeléctrica	Generador sincrónico	AVR y gobierno de control. (+P, ±Q)
	Aerogenerador de velocidad fija	Generador de inducción	Control de calado o cabeceo de la turbina. (+P, -Q)
Generador Distribuido no convencional	Aerogenerador de velocidad variable	Convertidor electrónico de potencia. (conversión ca-cd-ca)	Velocidad de turbina y cc
	Micro-turbina		Controles de voltaje de enlace (+ P, ± Q)
	Fotovoltaica solar	Convertidor electrónico de potencia. (conversión cd-cd-ca)	Enlace MPPT y CC
Almacenamiento a largo plazo (DS)	Pila de combustible		Controles de voltaje (+ P, ± Q)
	Almacenamiento de la batería	Convertidor electrónico de potencia. (conversión cd-cd-ca)	Estado de carga y/o salida
Almacenamiento a corto plazo (DS)			Controles de voltaje/frecuencia (± P / ± Q)
	Super condensador	Convertidor electrónico de potencia. (conversión cd-cd-ca)	Estado de carga (± P, ± Q)
	Volante (Flywheel)	Convertidor electrónico de potencia. (conversión ca-cd-ca)	Control de velocidad (±P, ±Q)

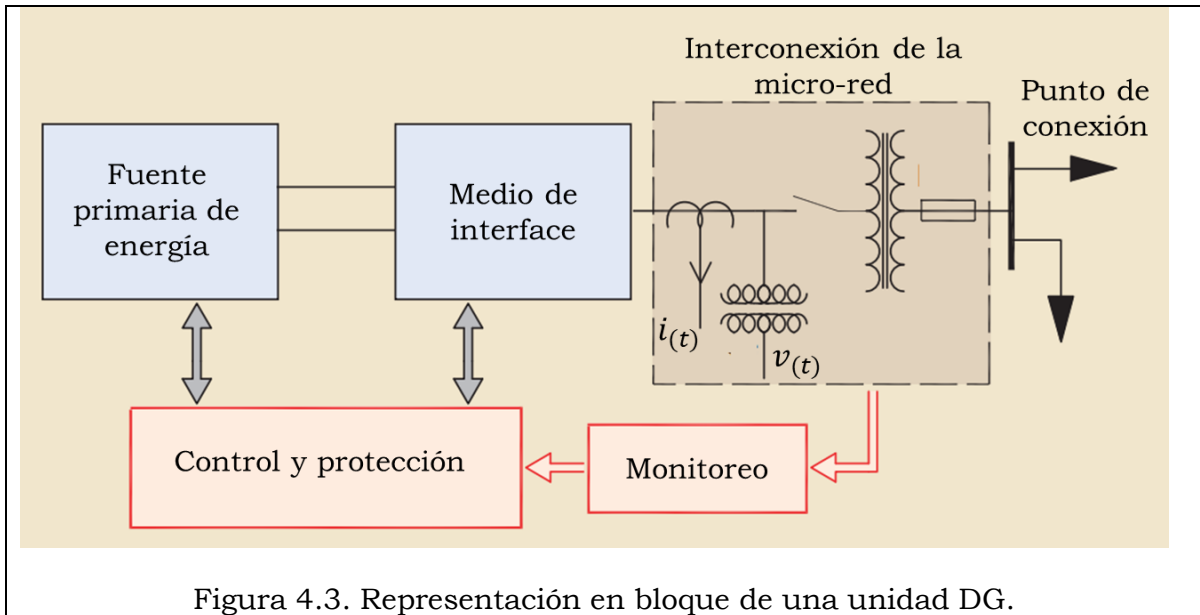


Figura 4.3. Representación en bloque de una unidad DG.

La Tabla 4.1 describe las configuraciones de interfaz típicas y los métodos para el control del flujo de energía de las unidades DG y DS para las fuentes de energía primaria y los medios de almacenamiento ampliamente utilizados, respectivamente. Cabe señalar que además de los dos tipos básicos de unidades DG y DS, una unidad DER puede ser de tipo híbrido; es decir, una unidad que incluye tanto "fuente de energía primaria" como "medio de almacenamiento". Una unidad DER híbrida a menudo se interconecta con la micro-red del host a través de un sistema de conversión que incluye convertidores bidireccionales CA-CD y CD-CD

4.5.4. DG despachables.

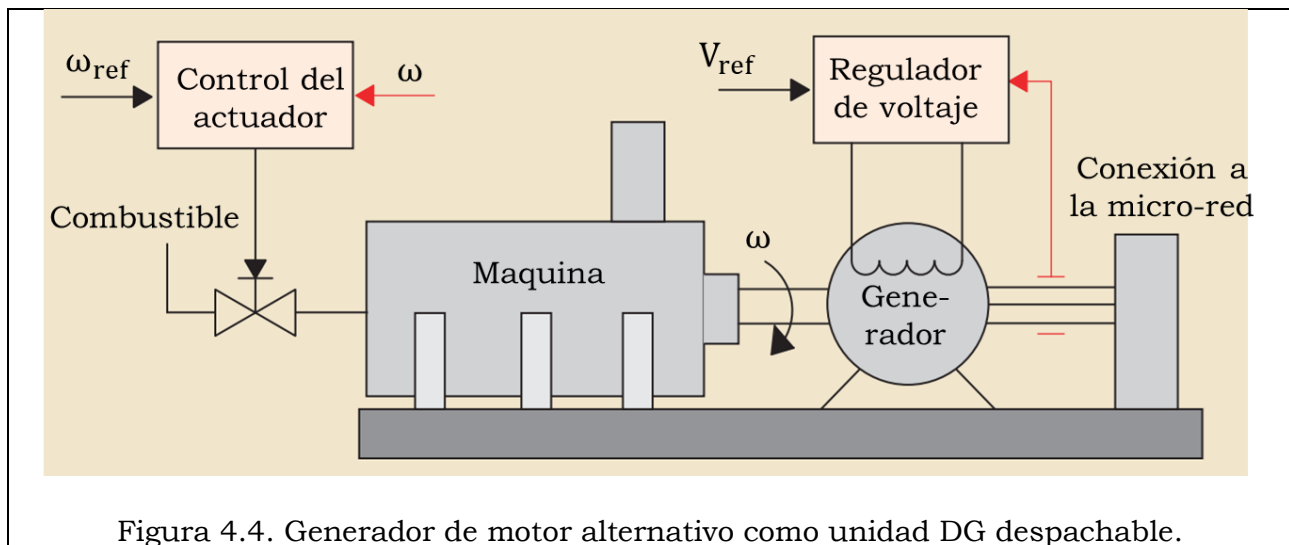


Figura 4.4. Generador de motor alternativo como unidad DG despachable.

En términos de control de flujo de energía, una unidad DG es una unidad despachable o no despachable, así la potencia de salida de una unidad DG despachable se puede controlar en forma externa, a través de puntos de ajuste proporcionados por un sistema

de control y supervisión, de acción rápida y respuesta lenta para reducir efectos transitorios. Un ejemplo de una unidad DG despachable convencional es la configuración que se muestra en la figura 4.4, que utiliza una máquina de combustión interna (DE) como fuente de energía primaria. Una unidad DG basada en DE normalmente está equipada con un regulador para el control de velocidad y el ajuste del flujo de combustible.

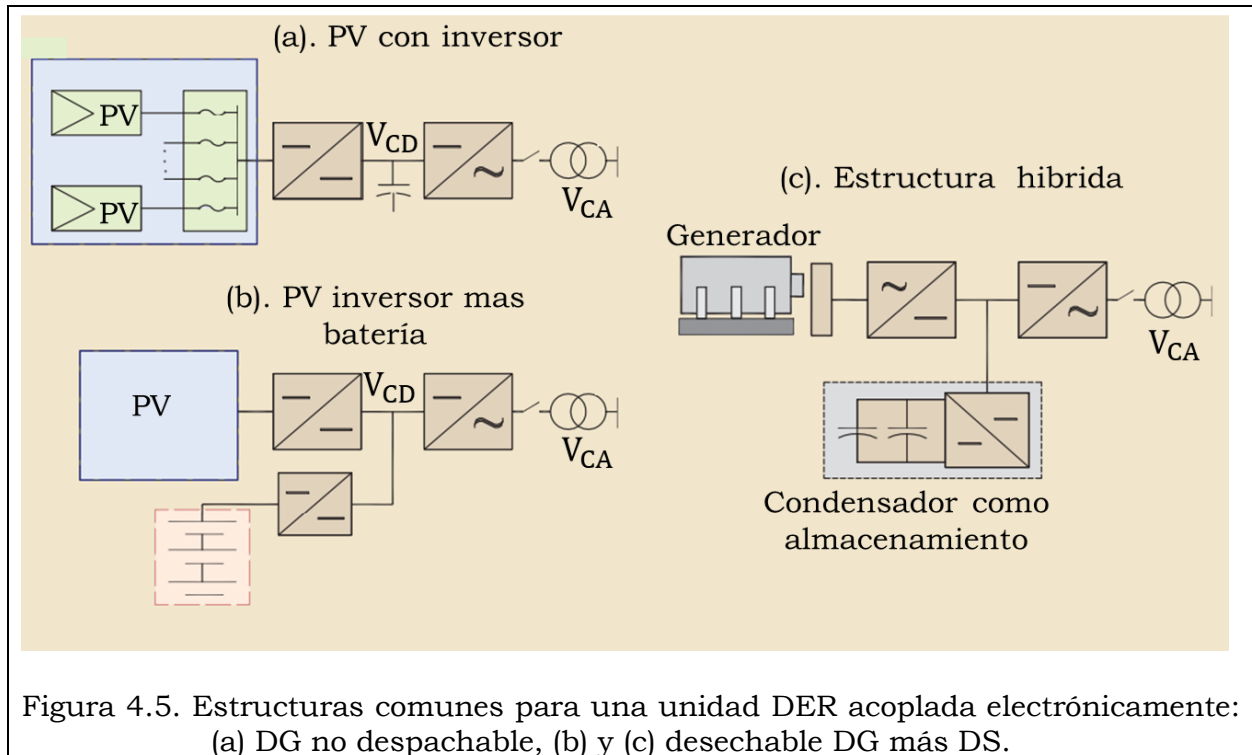
El regulador de voltaje automático (AVR) controla el voltaje interno del generador síncrono. El Control del actuador y el AVR controlan las salidas de potencia real y reactiva de la unidad DG basándose en una estrategia de despacho.

4.5.5. DG no despachables.

En alternativa a los DG despachables, la potencia de salida de una unidad DG no despachable normalmente se controla en función de las condiciones de funcionamiento óptimas de su fuente de energía primaria, como lo es para un generador eólico no despachable normalmente se opera en base al concepto de seguimiento de potencia máxima para extraer la máxima potencia posible del régimen de viento. Por tanto la potencia de salida de la unidad varía según las condiciones del aire. Las unidades de DG que utilizan fuentes de energía renovable son a menudo unidades no despachables, así para maximizar la potencia de salida de una unidad DG basada en energías renovables, normalmente se utiliza una estrategia de control basada en el seguimiento del punto máximo de potencia (MPPT) para entregar la potencia máxima en todas las condiciones viables.

La figura 4.5 muestra tres arquitecturas comunes para una unidad DER con interfaz electrónica. La figura 5 (a) muestra una unidad de DG basada en fotovoltaica (PV) no distribuible para la cual la matriz PV, a través de un sistema convertidor, está interconectada con la micro-red. El convertidor es un sistema CD-CD-CA compuesto por un convertidor CD-CD y un convertidor CD-CA, esta configuración también puede representar una unidad DG para la cual la fuente de energía primaria, en contraste con la matriz PV es de naturaleza distribuible, por ejemplo una pila de combustible. De manera similar si la matriz fotovoltaica se sustituye por un almacenamiento de batería, constituye una unidad DS acoplada electrónicamente.

La figura 4.5 (b) muestra una unidad DER híbrida acoplada electrónicamente para la cual el sistema de convertidor está compuesto por dos convertidores CD-CD en paralelo y un convertidor CD-CA, a pesar de que la matriz fotovoltaica proporciona energía no distribuible, el sistema convertidor se puede controlar para proporcionar una energía distribuible en la salida de la unidad, esto implica que una unidad de DG basada en viento no despachable puede convertirse en una unidad DER híbrida despachable. La figura 4.5 (c) muestra una unidad DG de grupo electrógeno acoplada electrónicamente que está aumentada con una unidad de almacenamiento de energía capacitiva.



El grupo electrógeno es una unidad DG despachable de acción lenta que está acoplada a la micro-red a través de un sistema convertidor CA-CD-CA. La unidad de almacenamiento capacitivo está interconectada con el enlace de CD del sistema convertidor CA-CD-CA a través de un convertidor CD-CD y proporciona requisitos de flujo de energía a corto plazo durante el arranque y/o intervalos de aceleración/desaceleración del grupo electrógeno lento.

Una característica sobresaliente de una unidad DER acoplada electrónicamente es su capacidad inherente para una respuesta dinámica rápida a través de su convertidor de interfaz y otra característica es la capacidad del convertidor de interfaz para limitar la contribución de cortocircuito de la unidad a menos del 200% de la corriente nominal y prácticamente evitar la contribución de corriente de falla. A diferencia de una unidad DG convencional, la acoplada electrónicamente no exhibe ninguna inercia durante los transitorios de la micro-red y por lo tanto, no tiene una tendencia intrínseca a mantener la frecuencia de la micro-red, sin embargo los controles rápidos del convertidor también se pueden aprovechar para ayudar en la regulación de frecuencia. Otra característica del sistema de convertidor de interfaz de la Figura 4.5 consiste en proporcionar el desacoplamiento eléctrico entre la fuente de energía primaria y el sistema de distribución, así las interacciones dinámicas entre los dos subsistemas son a menudo menos severas en comparación con el caso de un DG convencional.

4.5.6. Cargas en la micro-red.

Una micro-red puede servir cargas eléctricas, en un modo conectado a la red superior del sistema de distribución de servicios públicos, a menudo se puede considerar como un "bus de holgura" eléctrico y suministrar/absorber cualquier discrepancia de energía

en la energía generada por la micro-red para mantener el equilibrio neto de energía. La reducción de carga o generación interna de la micro-red también es una opción si la potencia neta de importación/exportación tiene límites estrictos basados en estrategias operativas u obligaciones contractuales. En un modo de funcionamiento autónomo o isla, a menudo se requiere la eliminación de carga/generación para mantener el equilibrio de potencia y en consecuencia, estabilizar el voltaje/ángulo de la micro-red, así la estrategia operativa debe garantizar que las cargas críticas reciban prioridad de servicio. Además el funcionamiento deberá incluir funciones como la diferenciación del servicio al cliente, la mejora de la calidad de la energía de cargas específicas y la mejora de la fiabilidad de las categorías de carga preespecificadas. El control de carga también se puede ejercer para optimizar las clasificaciones de las unidades DS y las unidades DG despachables al reducir la carga máxima y una amplia gama de variaciones de carga.

En la práctica, parte de una carga no sensible se puede considerar una carga controlable y se puede ingresar en una estrategia de control de respuesta a la demanda para reducir la carga máxima y suavizar el perfil de carga, o para programar el servicio de carga para intervalos de tiempo específicos cuando hay energía adicional, para Por ejemplo, de unidades DG intermitentes, está disponible. La parte no controlable de una carga no sensible es el primer candidato para el deslastre de carga y la respuesta a la demanda, que se ejecutan y supervisan normalmente a través del controlador de gestión de energía de la micro-red [57].

4.5.7. Estrategia de control

Las estrategias de control para las unidades DER dentro de una micro-red se seleccionan en función de las funciones requeridas y los posibles escenarios operativos, por lo que los controles de una unidad DER también están determinados por la naturaleza de sus interacciones con el sistema y otras unidades DER. Las principales funciones de control para una unidad DER son el control de voltaje, frecuencia y/o potencia activa/reactiva.

Las estrategias generalmente se dividen en formación de cuadrícula y sus controles de seguimiento, donde cada categoría se divide en estrategias no interactivas e interactivas con la micro-red. El enfoque de seguimiento se emplea cuando no se requiere el control directo de voltaje y/o frecuencia. Además si la potencia de salida de la unidad se controla independientemente de las otras unidades o cargas, constituye una estrategia no interactiva de la red. Un ejemplo de la estrategia de red no interactiva es el control MPPT de una unidad solar fotovoltaica. Una estrategia de control interactiva con la red se basa en especificar puntos de ajuste de potencia real/reactiva como comandos de entrada, donde los puntos de ajuste de potencia se especifican con base en una estrategia de distribución de potencia o en la compensación de potencia real/reactiva de la carga o del alimentador.

El control de formación de red no interactivo es un método explícito para el control de voltaje y frecuencia de una unidad despachable, en ausencia de la red eléctrica. Con base en esta estrategia, una unidad DER intenta suministrar el equilibrio de potencia mientras regula el voltaje y estabiliza la frecuencia de la micro-red autónoma. En el caso de que dos o más unidades de DG comparten la demanda de carga y responden

simultáneamente a las variaciones en la carga, entonces se puede aplicar una estrategia de control interactivo mediante el cambio de voltaje y frecuencia de las unidades de DER.

El control de seguimiento de red o control de exportación de energía consiste en la estrategia de manipulación de la exportación de energía, se utiliza a menudo para controlar la potencia de salida DER dentro de los límites de voltaje y frecuencia determinados por la micro-red. Si el convertidor de acoplamiento es un convertidor de fuente de voltaje (VSC), se puede usar una estrategia controlada por corriente para determinar las formas de onda de voltaje de referencia para la modulación de ancho de pulso (PWM) del VSC. Las señales de referencia también se sincronizan con la frecuencia de la micro-red mediante el seguimiento de la forma de onda de voltaje de la red superior, esta estrategia de control se puede implementar en un marco "dq0" síncrono que especifica los componentes directo en el eje d y en cuadratura con el eje q , de las corrientes de salida del convertidor correspondientes a los componentes de potencia de salida real y reactiva, respectivamente.

4.6. Despacho de potencia y soporte de potencia real / reactiva

El despacho de potencia y control de potencia real/reactiva se utilizan normalmente para el control de potencia de salida de unidades DER asignables, utilizando valores de referencia pre-especificados para el despacho de potencia real y compensación de potencia reactiva.

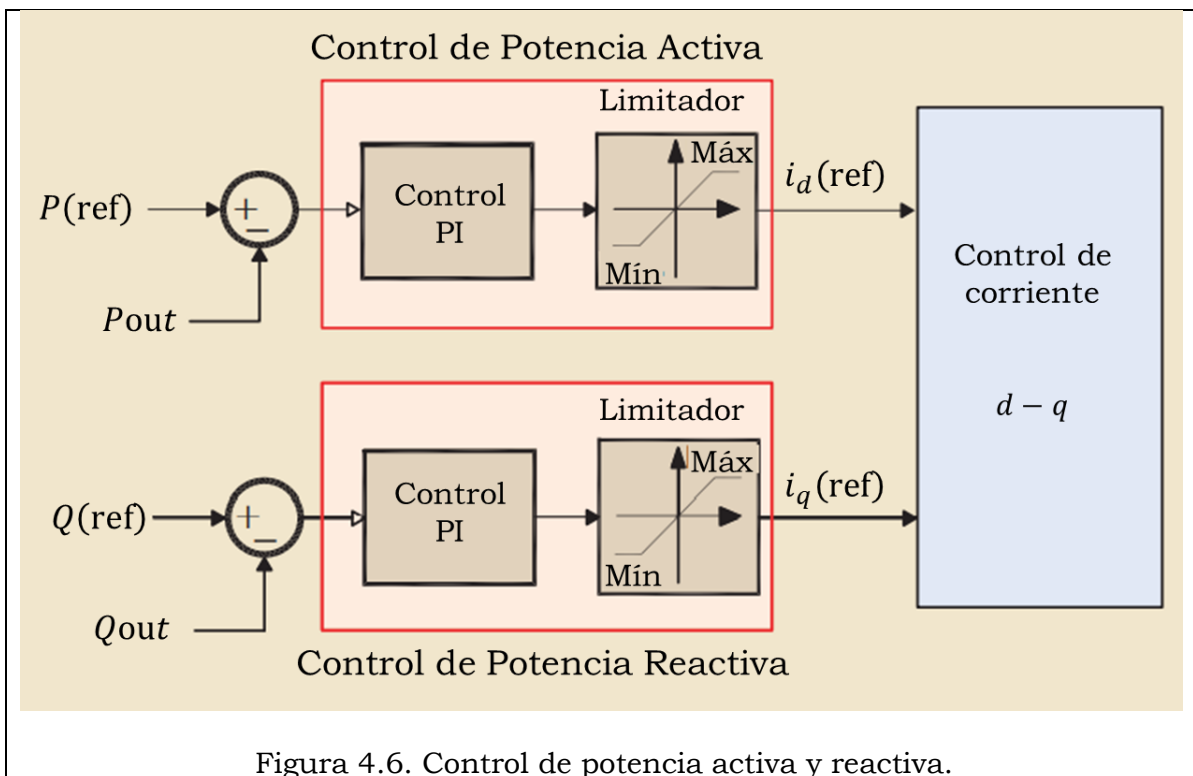


Figura 4.6. Control de potencia activa y reactiva.

La figura 4.6 muestra un diagrama de bloques de control basado en puntos de ajuste pre-especificados para controles de potencia real y reactiva de una unidad DER. Los

puntos $P(\text{ref})$ y $Q(\text{ref})$ son los ajustes de potencia, y P_{out} y Q_{out} son las salidas de potencia real y reactiva tomadas directamente de las tensiones y corrientes de salida medidas de la unidad. Los valores de referencia se pueden establecer mediante una unidad de gestión de energía de supervisión o se pueden calcular localmente de acuerdo con un perfil de energía pre-especificado para optimizar la exportación de energía real/reactiva desde la unidad. Otros métodos comúnmente aplicados se basan en compensar variaciones en la carga local, perfiles de corte de pico y/o suavizar las fluctuaciones en el flujo de potencia de la fuente. Dos casos específicos de compensación de potencia reactiva se basan en la regulación de voltaje de la unidad en el PC y la compensación del factor de potencia.

4.7. Control de formación de cuadrícula

La estrategia de control de formación de rejilla emula el comportamiento de una "fuente oscilante" dentro de la micro-red autónoma. Se puede asignar una unidad de formación de rejilla para regular el voltaje en el PCC y establecer predominantemente la frecuencia del sistema, esta unidad debe ser suficientemente grande y tener la capacidad de reserva adecuada para suministrar el equilibrio de energía, así en el caso en que dos o más unidades DER participen activamente en la estabilización de la red y la regulación de voltaje, entonces se utilizan estrategias de control de caída de frecuencia y caída de voltaje para compartir componentes de potencia real y reactiva. Para el caso en que el voltaje y la frecuencia pueden desviarse de los valores nominales dentro de límites aceptables, dependiendo del nivel de carga y las características de caída, lo que se conoce como generadores tipo rampa [13].

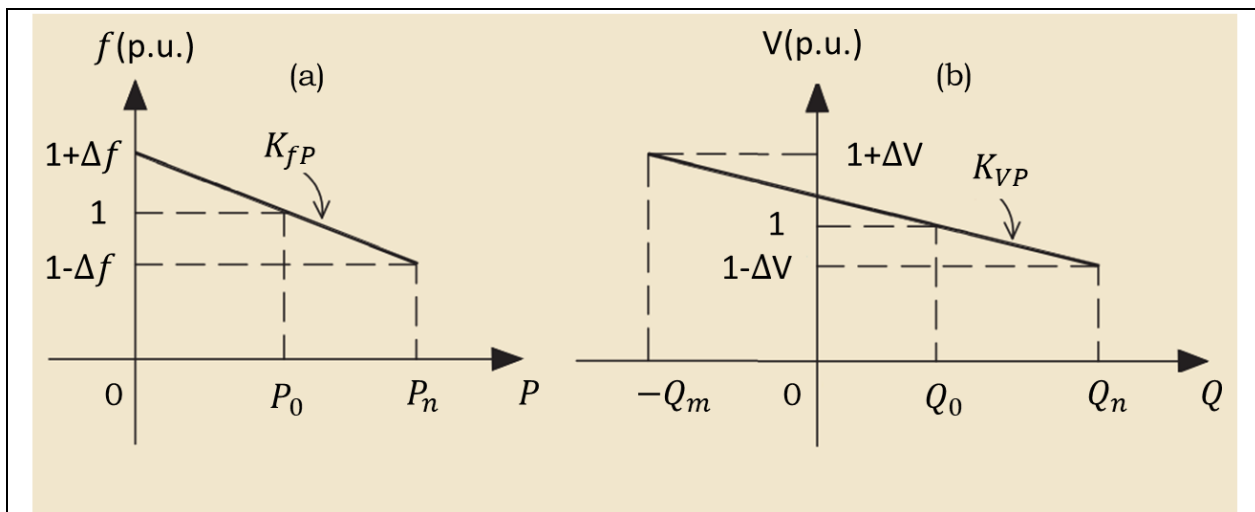


Figura 4.7 Características de caída para la carga compartida entre múltiples unidades DER: (a) caída de fP , (b) caída de VQ .

En la figura 4.7 se muestran las características de caída de frecuencia (fP) y caída de tensión (VQ) donde cada una se especifica por su pendiente K_{fP} o K_{VP} y un punto base que representa la frecuencia nominal f_0 , P_0 o la tensión nominal V_0 , Q_0 , respectivamente. Los coeficientes de caída y los puntos base se pueden controlar mediante un proceso de restauración para ajustar dinámicamente los puntos operativos de las unidades. Esto se logra cambiando dinámicamente los niveles de distribución de

energía para establecer la frecuencia y los voltajes en nuevos valores. La acción de restauración normalmente se impone muy lentamente y también puede aprovecharse durante la re-sincronización de una micro-red autónoma. La estrategia de control de caída es similar a lo mostrado en la figura 4.6, donde las entradas al controlador son las desviaciones medidas localmente en la frecuencia y el voltaje terminal de la unidad, ahora en el caso de que las unidades DER tengan capacidades diferentes, la pendiente de cada característica se selecciona proporcionalmente a la capacidad nominal de la unidad correspondiente para evitar sobrecargas.

Por lo anterior, la gestión de energía y el buen funcionamiento de una micro-red con más de dos unidades DER, especialmente en modo autónomo requiere una estrategia de gestión de potencia (PMS) y una estrategia de gestión de energía (EMS). La respuesta rápida del PMS/EMS es más crítica para una micro-red en comparación con un sistema de energía convencional por las siguientes razones:

- Presencia de múltiples unidades DER pequeñas con diferencias significativas, capacidades y características de potencia
- No se tiene ninguna fuente potencialmente dominante de generación de energía durante un modo autónomo; es decir, falta de bus infinito
- Respuesta rápida de unidades DER acopladas electrónicamente que pueden afectar adversamente la estabilidad de voltaje/ángulo cuando no existen las disposiciones adecuadas.

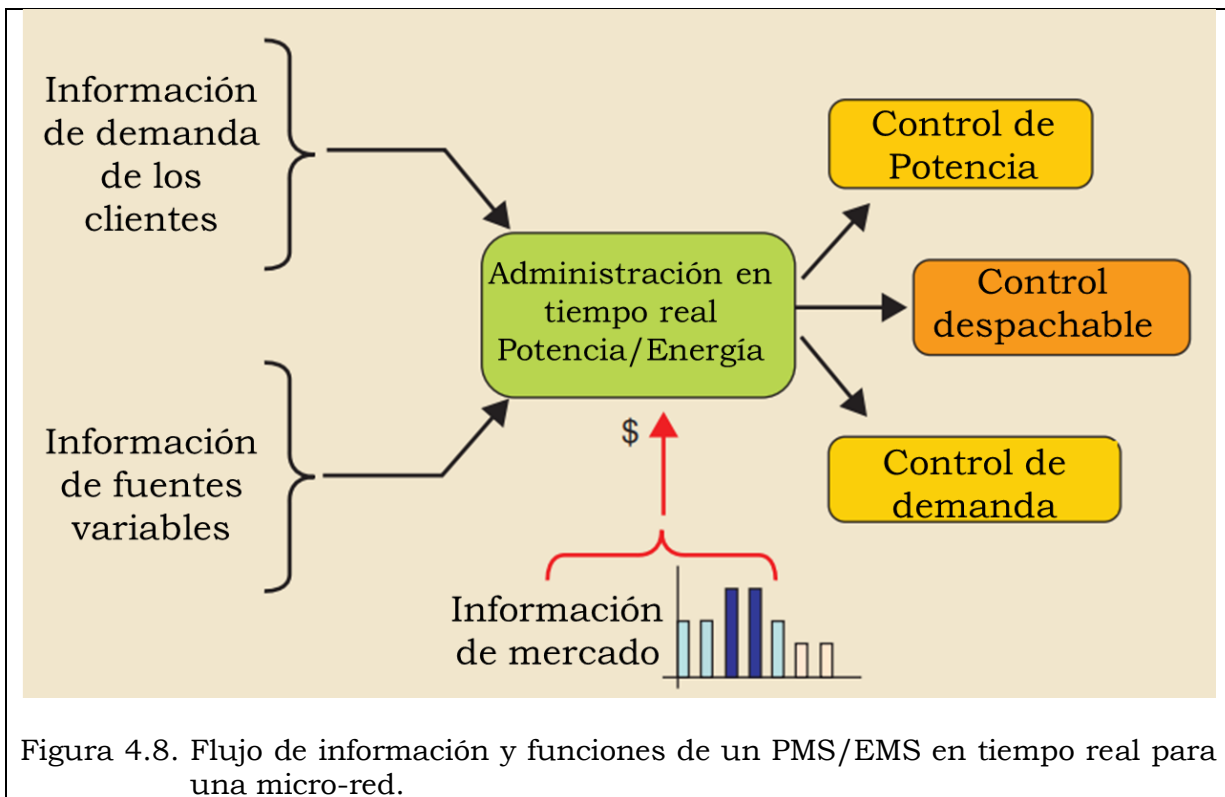


Figura 4.8. Flujo de información y funciones de un PMS/EMS en tiempo real para una micro-red.

La Figura 4.8 muestra el flujo de información y las funciones de un PMS/EMS para una micro-red, donde el bloque de administración en tiempo real recibe los valores presentes y pronosticados de carga, generación e información de mercado para imponer controles apropiados sobre el flujo de energía, la generación de salida, el nivel de consumo de la red pública, las fuentes despachables y las cargas controlables, respectivamente. El PMS/EMS asigna referencias de potencia real y reactiva para el DER a unidades para:

- Compartir adecuadamente la potencia real/reactiva entre las unidades DER.
- Responder adecuadamente a las perturbaciones y transitorios de la micro-red.
- Determinar los puntos de ajuste de potencia de las unidades DER para equilibrar la potencia de la micro-red y restaurar la frecuencia.
- Habilitar la re-sincronización de la micro-red con la red principal, si es necesario.

En un modo conectado a la red, las unidades DER suministran energía pre-especificada, por ejemplo para minimizar la importación de energía de la red con la reducción de picos y cada unidad se controla para representar un bus PQ potencia real/reactiva o un bus de potencia/voltaje PV – bus. Por lo tanto, se espera que la red principal se adapte a la diferencia en la oferta y demanda de energía real/reactiva dentro de la micro-red. Sin embargo, en un modo autónomo, la potencia de salida de las unidades debe satisfacer la demanda de carga total de la micro-red, de lo contrario, debe someterse a un proceso de eliminación de cargas para adaptarse a la generación y la demanda. Además, se requieren estrategias de control de potencia real/reactiva rápidas y flexibles para minimizar el impacto de la dinámica de la micro-red, referente a transitorios en isla y amortiguamiento de oscilaciones de frecuencia y potencia. El PMS/EMS debe adaptarse tanto al equilibrio de energía a corto plazo como a los requisitos de gestión de energía a largo plazo.

El balance de energía a corto plazo puede incluir:

- Disposiciones para la capacidad de seguimiento de carga, regulación de voltaje y control de frecuencia basado en el intercambio de energía real entre unidades DER y/o deslastre de carga para aliviar el desajuste de energía.
- Disposiciones para una respuesta dinámica aceptable y restauración de voltaje / frecuencia durante y después de los transitorios.
- Disposiciones para cumplir con las limitaciones de calidad de energía de cargas sensibles.
- Disposición para re-sincronización posterior a la restauración del sistema principal.

La gestión energética a largo plazo puede incluir:

- Disposiciones para mantener un nivel apropiado de capacidad de reserva mientras se reprograman los puntos operativos de las unidades DER

despachables en base a un proceso de optimización para a) controlar la importación/exportación de energía neta desde/hacia la red principal.

- Minimizar la pérdida de energía y maximizar salidas de energía de las unidades basadas en energías renovables y/o minimizar el costo de producción de energía de las unidades basadas en combustible.
- Consideración de los requisitos/limitaciones específicos de cada unidad DER, incluido el tipo de unidad, el costo de generación, la dependencia del tiempo de la fuente principal, los intervalos de mantenimiento y los impactos ambientales
- Disposiciones para la gestión de respuesta a la demanda, mediante el control de perfil de carga y restauración de cargas no sensibles que se desconectan/desprenden durante los transitorios de la micro-red.

4.8. Modelo de Control Predictivo

La estrategia del modelo de control predictivo (MPC) se ha conocido recientemente como un poderoso método de control para aplicaciones industriales, especialmente para sistemas altamente no lineales con incertidumbres y restricciones, que permite el control de sistemas multi-variables con restricciones tanto en los estados como en las entradas de control. Su capacidad para manejar procesos estocásticos y su control de ciclo cerrado heredado lo convierte en un gran candidato para administrar recursos renovables, sin embargo la parte más importante de un enfoque predictivo que se basa en modelos es encontrar un modelo de predicción para aproximar las futuras señales de entrada, salida y estado del sistema. Definir un modelo de predicción preciso es un problema difícil en los algoritmos de control predictivo, ya que en aplicaciones prácticas no es accesible cierto modelo matemático del sistema. Además cuando el sistema no es lineal, el modelado del sistema se vuelve no convexo y no hay beneficio del uso de modelos de predicción estándar en los algoritmos predictivos. Los investigadores han utilizado varios enfoques de modelado de sistemas, como redes neuronales y sistemas difusos, para obtener un modelo de predicción preciso para algoritmos predictivos, sin embargo, la mayoría de los trabajos relacionados en esta área se aplican a una planta linealizada o una planta no lineal sin considerar sus incertidumbres.

El modelo de control predictivo clásico se puede establecer como un modelo no lineal simple en (4.14)

$$x(k + 1) = f_k(x(k), u(k)) \quad (4.14)$$

donde $x(k)$ y $u(k)$ denotan el estado y los vectores de entrada en el tiempo k respectivamente. f_k es la función de mapeo de los estados y entradas actuales al siguiente estado y valores de entrada. Por lo tanto, el modelo del sistema desde el primer paso hasta el último paso en el horizonte se define como en (4.15)

$$\begin{aligned} x(2) &= f_1(x(1), u(1)) \\ x(3) &= f_2(x(2), u(2)) \\ &\vdots \\ x(N_p + 1) &= f_{N_p}(x(N_p), u(N_p)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que el horizonte de control y el horizonte de estados se definen como N_c y N_p respectivamente. Por tanto, la secuencia de entrada U estará definida como en sería (4.16).

$$U = (u(1), \dots, u(N_c)) \quad (4.16)$$

La función de costo para el algoritmo de control predictivo clásico se define como (4.17) y el objetivo del control es minimizar el error de seguimiento hacia la trayectoria deseada con un mínimo esfuerzo de control, por tanto la función de costo incluye la forma cuadrática de la señal de control u y el vector de estado x .

$$J(k) = \sum_{p=1}^{K_p} \|\hat{x}(k_j + p | k)\|_Q^2 + \sum_{p=1}^{K_c} \|\hat{u}(k_u + p | k)\|_R^2 \quad (4.17)$$

donde Q y R son las matrices de ponderación definidas positivas de los estados y las señales de control, respectivamente. Además, $\hat{x}(k)$ y $\hat{u}(k)$ son el estado predicho y las señales de entrada predichas en el paso de tiempo k respectivamente. Las restricciones del modelo son el estado predicho y las ecuaciones de entrada obtenidas del modelo de predicción (4.18). En el método clásico de control predictivo, el modelo de predicción es un modelo simple de respuesta al impulso que también incluye la señal de perturbación.

$$\hat{x}(k + 1) = f(\hat{x}(k), \hat{u}(k), d(k)) \quad (4.18)$$

donde $d(k)$ es la perturbación del sistema en el momento k , por lo que la función de costo $J(k)$ se minimiza en cada paso del algoritmo de control predictivo del modelo en todo el horizonte de control y estado. Así en cada paso solo se aplica la primera ley de control al sistema y el procedimiento se repite en el siguiente paso. Por lo tanto, el estado optimizado se define como (4.19).

$$(x_{op}, u_{op}) = arg\{\min J(k)\}, \quad c(x, u) \leq 0 \quad (4.19)$$

donde c es la función de desigualdad y x_{op} y u_{op} son las variables óptimas para resolver el problema de optimización. Por otro lado, la función lagrangiana $L(x, \lambda)$ se define en (4.20).

$$L(x, \lambda) = J(k) + \lambda^T c(x, u) \quad (4.20)$$

Los valores óptimos para la variable de dirección de búsqueda p y el multiplicador de Lagrange λ se obtienen como se describe en (4.21).

$$(p_{op}, \lambda_{op}) = arg\left\{\min p^T L_x(x, \lambda) + \frac{1}{2} p^T L_{xx}(x, \lambda) P\right\} \quad (4.21)$$

donde p_{op} y λ_{op} son los valores óptimos de p y λ respectivamente. Por lo tanto, el algoritmo de control predictivo del modelo clásico es el siguiente:

- En el momento $k = 0$, determine el valor de estado $x(0)$ y obtenga el valor de entrada $u(0)$ resolviendo el problema de optimización.
- en el tiempo $k > 0$, obtenga las predicciones de estado, entrada y perturbación de (4.18), con K_c como horizonte de perturbación y entrada, además K_p como horizonte de estado.
- en el momento $k > 0$, resuelva el problema de optimización (4.17) para obtener la señal de entrada óptima a través del horizonte de control.
- aplicar la señal de control óptima en el tiempo k al sistema y obtener los valores de estado actualizados.
- $k = k + 1$, y vaya al segundo paso.

Por lo tanto, resolver el problema de optimización es complicado y requiere mucho tiempo, ya que el algoritmo predice los estados y las entradas en cada paso, de esta manera calcula la función de costo para todo el horizonte. Cuanto más preciso sea el modelo de predicción, se obtendrá el problema de optimización menos complicado y el controlador más rápido.

4.9. Programa de Respuesta a la demanda

La gestión de la energía tiene que ver con el compromiso y el envío óptimo de los generadores convencionales, las fuentes de energía renovable y los dispositivos de almacenamiento en el lado de la oferta, mientras que los programas de Respuesta a la Demanda (DR) se orientan a proporcionar alivio de la demanda en el lado del cliente [58]. La inclusión de programas de DR hace que la micro-red tenga mayor fiabilidad, ya que esto garantizaría unas condiciones de funcionamiento óptimas, además conducen a una reducción de los costes operativos y cierto grado de flexibilidad de la red, así como ayuda a mitigar el efecto intermitente de generación de las RES [59]. Las empresas de suministro eléctrico se han reestructurado para que su operación se adapte al mercado abierto y desregulación de la industria eléctrica con cambios en la filosofía de funcionamiento, pasando en su forma tradicional de suministrar toda la demanda requerida siempre que ocurra, al nuevo enfoque donde establece que el sistema será más eficiente si las fluctuaciones en la demanda se mantienen lo más pequeñas posible, así el funcionamiento fiable del sistema eléctrico requiere un equilibrio perfecto entre el suministro y la carga en tiempo real, lo cual no es una tarea fácil dado que tanto los niveles de oferta como de demanda podrían cambiar rápida e inesperadamente debido a muchas razones, como cortes forzados de unidades de generación, cortes de líneas de transmisión y distribución, así como cambios repentinos de carga. Al considerar que la infraestructura del sistema eléctrico es muy grande en capital, la respuesta del lado de la demanda es uno de los recursos de mayor disponibilidad para operar el sistema de acuerdo con la nueva filosofía.

La respuesta a la demanda (DR) se puede definir como los cambios en el uso de la electricidad por parte de los clientes finales de sus patrones de consumo normales en respuesta a los cambios en el precio de la electricidad a lo largo del tiempo, que implica los pagos o bonificaciones de incentivos diseñados para inducir un menor uso de electricidad en momentos de precios elevados del mercado mayorista o cuando la fiabilidad del sistema se ve comprometida, incluye todas las modificaciones intencionales a los patrones de consumo de electricidad de los clientes de uso final que

tienen la intención de alterar el tiempo, el nivel de demanda instantánea o el consumo total de electricidad.

Se consideran tres acciones generales mediante las cuales se puede lograr una respuesta del cliente, que implican costos y medidas tomadas por el cliente.

1. El cliente puede reducir su consumo de electricidad durante los períodos pico críticos cuando los precios son altos sin cambiar el patrón de consumo durante otros períodos, lo que implica una pérdida temporal de comodidad, por ejemplo cambiar temporalmente la configuración del termostato de los calentadores o acondicionadores de aire.
2. Los clientes pueden responder a los altos precios de la electricidad cambiando algunas de sus operaciones de máxima demanda a períodos de menor actividad, por ejemplo cambiar algunas actividades del hogar como lavavajillas y bombeo, entre otros, a períodos de menor actividad y para un cliente industrial debe reprogramar algunas de sus actividades donde surgirán costos de reprogramación para compensar los servicios perdidos.
3. El cliente usa la generación in situ (generación distribuida propiedad del cliente), así pueden experimentar muy poco o ningún cambio en su patrón de uso de electricidad, sin embargo desde la perspectiva de la empresa de servicios públicos, el patrón de electricidad cambiará significativamente y la demanda parecerá ser menor.

Los DR se basan en incentivos (IBP) o en precios (PBP):

Los IBP se dividen además en programas clásicos y programas basados en el mercado. El IBP clásico incluye programas de control directo de carga y programas interrumpibles/restringibles. El IBP basado en el mercado incluye programas de DR de emergencia, licitación bajo demanda, mercado de capacidad, mercado de servicios auxiliares. En el IBP clásico, los clientes participantes reciben pagos de participación generalmente como un crédito en la factura o una tasa de descuento por su participación en los programas. En los programas basados en el mercado, los participantes son recompensados con dinero por su desempeño dependiendo de la cantidad de reducción de carga durante condiciones críticas. En los programas de control de carga directa, las empresas de servicios públicos tienen la capacidad de apagar remotamente el equipo de los participantes con poca antelación. Los equipos típicos controlados a distancia son acondicionadores de aire y calentadores de agua. Este tipo de programas pueden ser de interés principalmente para clientes residenciales y en cierta medida, para pequeños clientes comerciales.

En los programas de control de carga directa, las empresas de servicios públicos tienen la capacidad de apagar remotamente el equipo de los participantes con poca antelación. Los equipos típicos controlados a distancia son acondicionadores de aire y calentadores de agua. Este tipo de programas pueden ser de interés principalmente para clientes residenciales y, en cierta medida, para pequeños clientes comerciales.

Los programas de PBP se basan en tarifas de precios dinámicas en las que las tarifas eléctricas no son planas, por lo que las tarifas fluctúan según el costo de la electricidad en tiempo real. El objetivo final de estos programas es aplanar la curva de demanda ofreciendo un precio alto durante los períodos pico y precios más bajos durante los

períodos no pico. Estas tarifas incluyen la tarifa por tiempo de uso (TOU), el precio máximo crítico (CPP), el precio por día extremo (EDP), el CPP por día extremo (ED-CPP) y el precio en tiempo real (RTP). El tipo básico de PBP son las tarifas TOU. Estas tasas de precios de la electricidad por unidad de consumo difieren en diferentes bloques de tiempo.

4.10. Contingencia ambiental

Con el inicio de la industrialización el uso de los combustibles han incrementado la concentración del dióxido de carbono en la atmósfera y otros gases que son muy perjudiciales para la salud, como los óxidos de azufre y los óxidos de nitrógeno, así se inició la contaminación atmosférica con la presencia en el aire de materias o formas de energía que implican riesgo, daño o molestia grave para las personas y seres vivos, así como el ataque o degradación a distintos materiales. La contaminación atmosférica puede tener carácter local, cuando los efectos ligados a su origen se sufren en las inmediaciones del mismo, o global cuando por las características del contaminante se ve afectado el equilibrio del planeta y zonas alejadas a las que contienen los focos emisores, como lo son la lluvia ácida y el calentamiento global [60]. La contaminación atmosférica consiste en la liberación de sustancias químicas y partículas en la atmósfera alterando su composición y suponiendo un riesgo para la salud de las personas y de los demás seres vivos. Los gases contaminantes del aire más comunes son el monóxido de carbono, el dióxido de azufre, los clorofluorocarbonos y los óxidos de nitrógeno producidos por la industria y por los gases producidos en la combustión. Los fotoquímicos como el ozono y el smog (smoke-fog) se aumentan en el aire por los óxidos del nitrógeno e hidrocarburos y reaccionan a la luz solar. El material particulado o el polvo contaminante en el aire se mide por su tamaño en micrómetros, y es común en erupciones volcánicas.

Por otro lado, de acuerdo a la Organización Mundial de la Salud, el estado de la atmósfera actual provoca, por simple acto de respirar partículas finas contaminantes, la muerte a alrededor de siete millones de personas al año, viéndose muchas más perjudicadas [61]. En este sentido el incremento extraordinario en la concentración de ozono ha obligado a las autoridades de algunas metropolis a decretar la contingencia ambiental (EC), que consiste en regular diversas actividades ya sea por recomendación o por restricción directa. Como son: la recomendación de limitar al máximo las actividades al aire libre de los niños y jóvenes que habitan la metrópoli. Además de la restricción directa en la limitación de actividades como circulación vehicular, suspensión de la limpieza, desengrase y reducción de combustión en horas-pico en la industria. Las cuadrillas gubernamentales encargadas de pintado y pavimentación también suspenderán sus actividades. Así como la quema de cualquier material o residuo sólido a cielo abierto, además de las chimeneas para todos los sectores.

4.11. Sistema de almacenamiento eléctrico a base de baterías

Derivado de la aleatoriedad intrínseca en las fuentes de energía renovables, como por ejemplo: la velocidad del viento sobre las turbinas eólicas, la radiación solar en las fuentes fotovoltaicas, la altura de las olas del mar en las fuentes mareomotrices, entre otros, lo que da como consecuencia períodos con exceso y deficiencia de energía. Esto ha llevado a que se desarrollen diferentes formas para almacenar la energía sobrante a fin de utilizarlo cuando sea necesario y las condiciones de

operación del sistema eléctrico lo permitan, lo que implica trabajar en procesos multidisciplinares entre temas de ingeniería y ciencias que permiten entender y proponer actuales y futuras implementaciones en el área de almacenamiento de energía, que tiene un rol muy importante para asegurar el futuro energético y que considera:

- Servirá como una reserva de electricidad de mayor capacidad que cualquier reserva de combustibles fósiles.
- Estabiliza la red de distribución y transmisión.
- Permite el uso más eficiente de la generación existente.
- Hace viable económicamente las energías renovables.
- Sirve como un amortiguador de precios, es decir es un elemento para suministrar energía cuando los costos de electricidad son altos (horas-pico).
- Reduce o disminuye la necesidad de instalar nuevas generadoras.
- Realiza un seguimiento de la carga, alternando la respuesta ante variaciones entre el suministro de electricidad y de demanda.
- Permite tener una capacidad de reserva.
- Soporte de estabilidad de voltaje.
- Mejor desempeño de los sistemas de transmisión y distribución.
- Asiste la integración de fuentes solares y eólicas reduciendo la volatilidad de la salida y su variabilidad, mejorando la calidad de la energía, reduciendo los problemas de congestión, entre otras.

En la literatura de micro-redes, los sistemas de almacenamiento distribuido (DS) considera las técnicas: de bombeo hidroeléctrico, aire comprimido, almacenamiento térmico, super-condensador, volantes de inercia, baterías y pilas de combustible de hidrógeno, entre otras. Estos sistemas deben estar cercanos al punto en el que se consume, lo que genera menos pérdidas y evita las limitaciones impuestas por una red de transmisión congestionada. Además, la creciente tendencia hacia una alta penetración de las fuentes de energía renovable se deriva de sus ventajas ecológicas y de precio competitivo sobre la generación convencional.

Sea B_j^t la energía almacenada de la j -ésima batería al final de la ranura t , con la energía disponible inicial B_j^0 mientras que $B_j^{máx}$ denota la capacidad de la batería, de modo que $0 \leq B_j^t \leq B_j^{máx}$, $j \in J := \{1, \dots, J\}$. Sea $P_{B_j}^t$ la potencia entregada o extraída del j -ésimo dispositivo de almacenamiento en la ranura t , que equivale a cargar $P_{B_j}^t \geq 0$ o descargar $P_{B_j}^t \leq 0$ la batería. Claramente, la energía almacenada obedece a la ecuación dinámica (4.22)

$$B_j^t = B_j^{t-1} + P_{B_j}^t, j \in J, t \in T \quad (4.22)$$

Las variables $P_{B_j}^t$ están restringidas de las siguientes formas:

- i) La cantidad de carga/descarga está limitada de acuerdo con (4.23) y (4.24), es decir:

$$P_{B_j}^{mín} \leq P_{B_j}^t \leq P_{B_j}^{máx} \quad (4.23)$$

$$-\eta_j B_j^{t-1} \leq P_{B_j}^t \quad (4.24)$$

con límites $P_{B_j}^{min} < 0$ y $P_{B_j}^{max} > 0$, y $\eta_j \in [0,1]$ es la eficiencia de la unidad DS j . La restricción en (4.24) significa que una fracción de la energía almacenada está disponible para descarga.

- ii) La energía almacenada final también está acotada en aras de los horizontes de programación futuros, es decir $B_j^t \geq B_j^{min}$. Para maximizar la vida útil de DS, se puede emplear un costo de almacenamiento $H_j^t(B_j^t)$ para alentar a la energía almacenada a permanecer por encima de una profundidad de descarga específica, indicada como $DoD_j \in [0,1]$, donde 100% (0%) de profundidad de descarga significa que la batería está vacía (llena) [15]. Tal que el costo se define como $H_j^t(B_j^t) := \psi_j^t [(1 - DoD_j) B_j^{max} - B_j^t]$ [62].

Tenga en cuenta que el costo de almacenamiento $H_j^t(B_j^t)$ puede interpretarse como una imposición de una restricción suave que evita grandes variaciones de la energía almacenada. Claramente, los pesos más altos $\{\psi_j^t\}$ fomentan una variación menor. Si se va a permitir un intercambio de alta potencia, estos pesos se pueden elegir muy pequeños, o incluso se pueden seleccionar $H_j^t(B_j^t) \equiv 0$ por completo.

Capítulo 5 Caso de estudio.

En este capítulo para materializar del modelo matemático planteado en la presente tesis, se aplica a un caso de estudio particular donde se muestran los resultados numéricos de los diferentes escenarios en los que se trató de llevar a los extremos de operación la micro-red para definir la robustez de dicho modelo, así como definir los límites de operación dentro de la zona convexa de la función objetivo.

5.1. Introducción.

El concepto de micro redes surge como una alternativa natural a los sistemas de energía eléctrica convencionales, donde los grandes generadores en sitios remotos podrían ir acompañados de generadores más pequeños y líneas de transmisión más cortas cercanas a las cargas, así la aplicación de generadores distribuidos (DG) individuales presentan situaciones a resolver al considerar la generación y las cargas asociadas como un subsistema o una "micro-red" [63]. Las fuentes pueden operar en paralelo a la red o pueden operar en modo isla, proporcionando servicios de centrales eléctricas. En la literatura, el despacho económico de una micro-red generalmente se puede presentar como un problema de optimización, en la que un conjunto de generadores atiende los requerimientos de energía de diversas cargas, buscando encontrar el ajuste en sus variables de tal manera que sea óptima en la función objetivo deseada, ya sean los costos o los aspectos técnicos, así en los últimos años, en forma globalizada su desarrollo se está orientando al incremento del uso de fuentes de energía renovables (RES), como la energía eólica y solar debido al grave agotamiento global de la energía y los problemas ambientales, por lo que en la literatura se encuentran diversos estudios que muestran el esfuerzo de lograr una forma eficaz para el uso de la energía renovable en el despacho económico dinámico (DED) [13], adaptándose también a cada situación y condición específica, que consiste en cumplir los requisitos de un sistema en funcionamiento real al buscar el costo más bajo en un ciclo de programación, además de ajustar el nivel de contribución de las diferentes generaciones de distribución (DG) durante varios lapsos de análisis que considere el comportamiento de costos, confiabilidad y eficiencia del sistema.

La complejidad que involucra la aleatoriedad e interrupciones en la generación de las RES[14, 27], es uno de los factores que orientan los esfuerzos para la búsqueda de alternativas de solución con un modelo robusto para la operación de las micro-redes, por lo que se introducen los sistemas de almacenamiento e interconexión con una red superior. En este contexto los Sistemas de Almacenamiento de Energía en Baterías (BESS) [64], con nuevas tecnologías ofrecen un sistema eléctrico factible con operación condicionada a considerar las particularidades y naturaleza de cada sistema de generación, combinado con el perfil estocástico de la energía primaria, aunado al intercambio comercial de energía con la red de distribución, presentan la necesidad de empatar todas estas variables en el proceso de gestión energética para la determinación del despacho energético que optimice sus costos considerando las restricciones tanto técnicas como económicas de la administración de la micro red. Desde la óptica comercial dentro de la factibilidad del consumidor, se tiene el programa de incentivos para la Reducción de la Demanda Eléctrica (EDR) [14, 65], ya que para considerar éste, es necesario investigar y delimitar escenarios prácticos en el proceso de despacho

económico dinámico en micro redes para lograr beneficios reales al cliente, de tal manera que la reducción del consumo de energía debe ser más rentable que solo la posible compensación energética en el bus de la micro red, además de considerar cuestiones de programación que implique no solo reducir los costos de combustible, sino también mejorar el patrón de consumo de energía para cualquier carga.

En conjunto con las variables mencionadas anteriormente, en las zonas urbanas de alta actividad generadora de polución se presentan las regulaciones medioambientales de lapsos de contingencia ambiental (EC) que obligan a reducir o regenerar los gases emitidos por la actividad industrial, lo que impacta directamente en la generación de energía basada en la combustión [21]. De esta forma RES, BESS, DG, EDR, EC e Interconexión a una red superior deben cumplir con los ajustes para la gestión del exceso/deficiencia de energía generada en redes más pequeñas, considerando las variaciones de carga. Por tanto, las nuevas tendencias de despacho económico implican la incorporación de múltiples variables que deben ser incluidas en la formulación del problema para lograr un sistema eléctrico flexible y confiable, considerando diversas topologías e incluyendo diferentes niveles de penetración de fuentes de energía renovable.

5.2. Modelo matemático

El presente trabajo considera las diferentes características de los generadores distribuidos en cuanto a su función de costo operativo variable, por lo tanto se tiene que la función objetivo está determinada en (5.1).

$$\begin{aligned} \text{Min} \left\{ (w) \left[\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I C_i(P_{i,t}) + \sum_{t=1}^T C_r(Pr_t) \right] + (1-w) \left[\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J C_b(Pdr_{j,t}) \right] \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_k C_k(P_{i,t}) \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde C_i es la función de costo de los DG convencionales, C_r es la función de costo de intercambio comercial con la red superior, C_b es la función de costo en la bonificación a clientes en programa EDR y C_k es la función de costo de regeneración de los gases emitidos por los generadores convencionales.

En (5.2) se muestra la función de costo de operación del generador convencional (despachable) como una función cuadrática de la generación potencia activa.

$$C_i(P_{i,t}) = a_i P_{i,t}^2 + b_i P_{i,t} \quad (5.2)$$

En (5.3) se define la relación de intercambio de potencia de acuerdo al contrato comercial con la red de distribución.

$$C_r(Pr_t) = \begin{cases} \gamma_c Pr_t & Pr_t > 0 & \text{Toma energía de la red superior} \\ 0 & Pr_t = 0 & \text{Desconectado} \\ -\gamma_v Pr_t & Pr_t < 0 & \text{Entrega energía a la red superior} \end{cases} \quad (5.3)$$

En (5.4) y (5.5) se modelan el monto de la bonificación a cada uno de los clientes en programa EDR en función a su prioridad, factor de costo y reducción de consumo permitido.

$$C_b(x_{j,t}) = y_{j,t} - \lambda_{j,t} C(\theta, x)_{j,t} \quad (5.4)$$

$$C(\theta, x) = (K_1 x^2 + K_2 x - K_2 x \theta) \quad (5.5)$$

En (5.5) el comportamiento del costo incurrido por un cliente de tipo θ está normalizado de $[0,1]$ que disminuye el consumo de energía x en función de la potencia reducida en EDR hacia el administrador de la micro-red), K_1 y K_2 son los coeficientes cuadrático y lineal de la función de costo del programa EDR.

En (5.6) se describe el comportamiento de los costos de regeneración de la clase k^{th} de los contaminantes y la definición de su operación en situación de contingencia ambiental.

$$C_k(P_{i,t}) = \alpha_t \beta_k P_{i,t} \quad (5.6)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{Operación normal} \\ 1 & \text{Contingencia ambiental} \end{cases}$$

El problema se encuentra sujeto a las siguientes restricciones:

En (5.7) se establece el equilibrio de energía en el bus y asegura que la energía generada es igual a la demanda neta.

$$\sum_{i=1}^I P_{i,t} + Pw_t + Ps_t + Pr_t + Pss_t = DT_t - \sum_{j=1}^J x_{j,t} \quad (5.7)$$

De (5.8) a (5.12) se definen los límites de operación de los generadores distribuidos (DG) en la micro-red.

$$P_{i,min} \leq P_{i,t} \leq P_{i,max} \quad (5.8)$$

$$0 \leq Pw_t \leq W_t \quad (5.9)$$

$$0 \leq Ps_t \leq S_t \quad (5.10)$$

$$-Pr_{max} \leq Pr_t \leq Pr_{max} \quad (5.11)$$

$$-Pss_{max} \leq Pss_t \leq Pss_{max} \quad (5.12)$$

En (5.13) se describen los límites de ajuste para los DG tipo rampa despachables

$$DR_i \leq P_{i,t+1} - P_{i,t} \leq UR_i \quad \text{para } t = 1, 2, 3, \dots, T - 1 \quad (5.13)$$

En (5.14) se asegura que el incentivo diario total recibido por el cliente sea igual o superior a su costo diario de interrupción.

$$\sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] \geq 0 \quad (5.14)$$

En (5.15) se asegura que la mayor reducción de potencia de los clientes, obtenga el mayor beneficio.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] \\ \geq \sum_{t=1}^T [y_{j-1,t} - (K_{1,j-1}x_{j-1,t}^2 + K_{2,j-1}x_{j-1,t} - K_{2,j-1}x_{j-1,t}\theta_{j-1})] \end{aligned} \quad (5.15)$$

para $j = 2, 3, \dots, J$

En (5.16) se logra que el incentivo total pagado por la utilidad es menor que lo presupuestado para la micro-red.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J y_{j,t} \leq UB \quad (5.16)$$

Con (5.17) se hace posible que la potencia diaria total limitada por cada cliente es inferior a su capacidad diaria de energía interrumpible.

$$\sum_{t=1}^T x_{j,t} \leq CM_j \quad (5.17)$$

En (5.18) y (5.19) se modela el rendimiento de funcionamiento dinámico de la unidad BESS

$$\begin{aligned} SoC_{SS_{t+1}} &= SoC_{SS_t} - \frac{\eta_{SS_t} P_{SS_t}}{Cap_{SS}} \\ \begin{cases} P_{SS_t} > 0 & \text{En estado de descarga} \\ P_{SS_t} < 0 & \text{En estado de carga} \\ P_{SS_t} = 0 & \text{Almacenamiento inactivo} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$SoC_{SS_{min}} \leq SoC_{SS_{t+1}} \leq SoC_{SS_{max}} \quad (5.19)$$

En (5.20) se define el dominio de las variables:

$$i, j, k, t \in \mathbb{N}$$

$$Pw_t, Ps_t, Ph_t, P_{i,t}, x_{j,t} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (5.20)$$

$$Pr_t, Pss_t \in D := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq x_{max}\} \quad x_{max} \in \mathbb{R}^+$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

5.3. Micro-red

El problema de despacho económico propuesto que se describe en las ecuaciones (5.1) a (5.20) se materializa en el caso que se muestra en la figura 5.1 y consiste en una micro red que contiene de 2 generadores convencionales basados en diésel (P_1, P_2), un sistema de conversión de energía eólica (Pw), un sistema solar fotovoltaico (Ps), interconexión a la red de distribución para transferencia de energía bidireccional (Pr) delimitado mediante un convenio comercial, un sistema de almacenamiento de energía con baterías (Pss) y cinco clientes (D_1, D_2, D_3, D_4 y D_5), se considera un intervalo de operación de 24 hrs, donde las variables de decisión a definir son: $P_1, P_2, Pr, Pss, Pw, Ps, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ buscando minimizar el costo total de la operación en el ciclo de estudio.

De los datos de entrada los correspondientes a los valores para Pw_t y Ps_t se estimaron utilizando el MPC en base a las lecturas de velocidad del viento con un anemómetro instalado a una altura de 12 m, así como la irradiación global estocástica y difusa detectada por hora utilizando el modelo de plano inclinado simplificado en la ubicación en N 18° 53' 33.356" O 99° 17' 21.335" A 1,570 mts. de altitud sobre el nivel del mar.

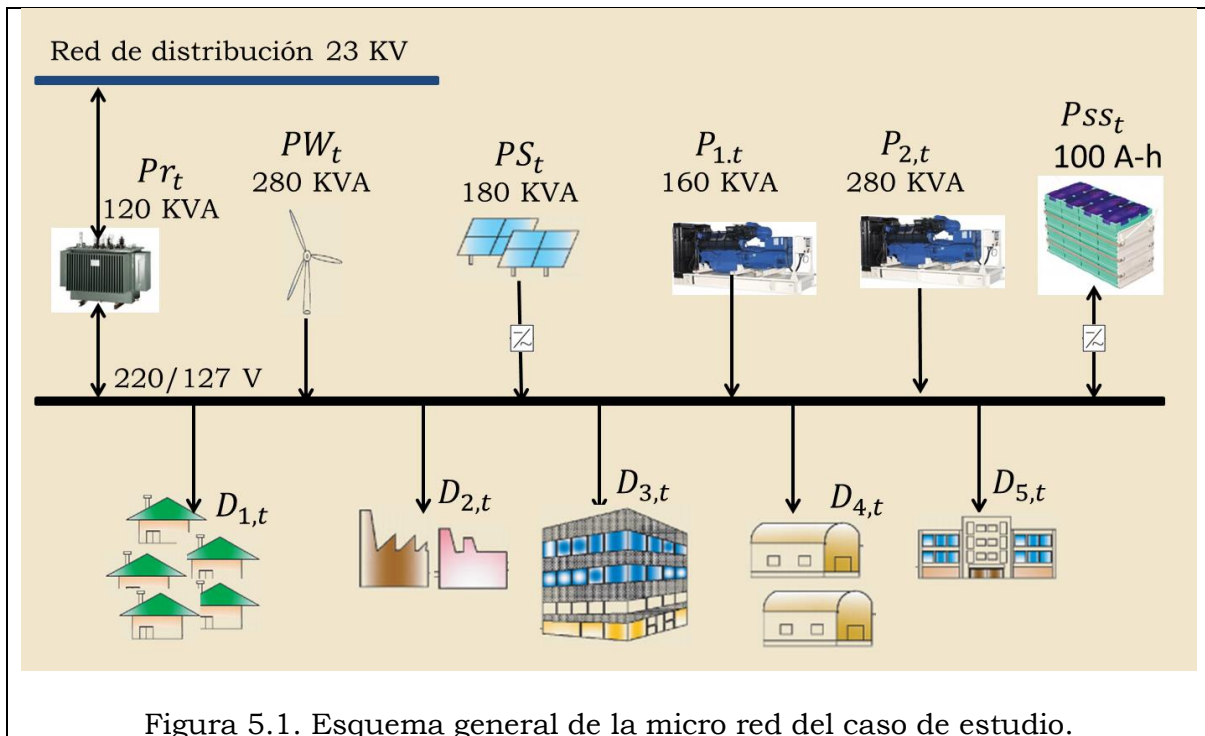


Figura 5.1. Esquema general de la micro red del caso de estudio.

En este mismo sentido se realizó el cálculo de la demanda total DT_t , con el historial de consumo y el presupuesto contratado para cada uno de los usuarios de la micro-red y

para los casos de contingencia (EC) que corresponde al valor binario de α_t que consiste en el arranque/paro del sistema de regeneración de contaminantes CO₂, SO₂ y NO_x emitidos por los generadores convencionales, lo cual se tomó del historial que ha emitido la autoridad regulatoria ambiental, asimismo el coeficiente de reducción en la demanda para cada cliente negociado $\lambda_{j,t}$ en programa EDR, los cuales se muestran en la tabla 1 para cada uno de los 24 lapsos analizados en el ciclo de estudio.

Por otro lado, La propuesta considera la ponderación de los costos de generación convencional e interconexión w con un valor de 0.4, el costo en dólares estadounidenses (\$ USD) de KVA-h transferidos con la red principal es asimétrico de tal manera que la venta es \$ 0.85 y los costos de compra son \$ 1.80. Las capacidades máximas de las plantas generadoras son $W_{t,max}$ 280 KVA, $S_{t,max}$ 180 KVA y las condiciones de contrato e instalación solo permiten la máxima transferencia de energía con la red de distribución de 120 KVA y el bono máximo de presupuesto en EDR es de \$ 400.00. Adicionalmente de la capacidad del banco de baterías con 100 Amp-hr con una potencia máxima de transferencia $P_{ss,t,max}$ de 4.4 KW y una eficiencia η_{ss} 0.82

Tabla 5.1. Valores de entrada para: programa EC, producción eólica y solar, demanda total e factor de interrupción en EDR en el escenario base.

t	α_t	Pw_t (KVA)	Ps_t (KVA)	DT_t (KVA)	$\lambda_{j,t}$
1	0	141	0	272	1.57
2	0	140	0	268	1.4
3	0	154	0	266	2.2
4	0	158	0	264	3.76
5	0	158	0	266	4.5
6	0	175	0	274	4.7
7	0	183	18	281	5.04
8	0	193	63	291	5.35
9	0	203	99	320	6.7
10	0	205	117	328	6.16
11	0	204	153	342	6.38
12	0	199	162	352	6.82
13	0	194	171	339	7.3
14	0	189	165	356	7.8
15	0	180	162	360	8.5
16	0	167	158	356	7.1
17	0	156	117	348	6.8
18	0	142	63	342	6.3
19	0	124	9	330	5.8
20	0	106	0	311	4.2
21	0	134	0	291	3.8
22	0	144	0	280	3.01
23	0	147	0	277	2.53
24	0	143	0	273	1.42

En la tabla 2, se muestran las características de los DG convencionales y los coeficientes de regeneración β_k para CO₂, SO₂ y NO_x son 0.45, 0.65 y 0.8 respectivamente. En la tabla 3, se muestran los datos de entrada de los coeficientes de

la función de costo en la bonificación del programa EDR, así como la clasificación en priorización de cada uno de los clientes.

Tabla 5.2. Coeficientes de costo y límites de operación de los generadores convencionales.

i	a_i	b_i	$P_{i,min}$ (KVA)	$P_{i,max}$ (KVA)	DR_i (KVA)	UR_i (KVA)
1	0.25	0.35	0	160	1	160
2	0.17	0.25	0	280	3	280

Tabla 5.3. Coeficientes de costo a clientes en EDR y su prioridad.

j	$K_{1,j}$	$K_{2,j}$	θ_j	CM_j
1	1.079	1.32	0	45
2	1.378	1.63	0.45	38
3	1.847	1.64	0.9	52
4	1.152	1.15	0.35	27
5	1.534	1.18	0.28	15

El caso de estudio considera las siguientes condiciones: cada elemento del sistema tiene sus dispositivos de autoprotección funcionando correctamente, contiene la instrumentación para monitoreo, además del equipamiento para todas las acciones de control, todos los DG operan en forma de rampa (despachables) y consecuentemente contienen su sistema de ajuste y control, se tienen las interfaces y protocolos de comunicación para el correcto funcionamiento en monitoreo y gestión de la smart grid (SG), la micro red está sincronizada con la red principal de distribución, los valores de limitación de carga han sido definidos por el cliente y no afectan la rentabilidad de su operación de tal forma que el bono resultante represente un beneficio real en el programa EDR, también se tiene acceso a un sistema de procesamiento de contaminantes autónomo que le permite cumplir con las restricciones del plan de contingencia ambiental.

5.4. Resultados

El modelo del sistema de la micro red de corriente alterna que se muestra en la figura 5.1 y que se describe en las ecuaciones (5.1) a (5.21), con los datos de entrada definidos en el caso de estudio se resolvió mediante el algoritmo planteado en el punto 5.2 de la presente tesis. Las simulaciones se llevaron a cabo en un equipo de cómputo con procesador de 64 bits AMD A12-9700P Cores 4C a 2.5 GHz con 8GB de RAM.

En el escenario inicial se tomaron los valores que en la operación de la micro red se consideran como normales o promedio general en cada una de las variables de entrada, así en la tabla 5.4, se muestran los resultados de los valores de potencia a los que se debe ajustar cada uno de los DG de la micro red de la simulación base que denominamos escenario 1,

De los resultados que se registraron en la tabla 5.4 en el escenario 1 denominado Operación normal, se observa que los RES operan a su máxima contribución y en los lapsos de intercambio negativos para la red de distribución y BESS es cuando se está en condiciones de venta y carga de energía respectivamente, en este escenario no se registra contingencia ambiental, así la producción de los generadores convencionales se mantiene en valores muy bajos y permanecen conectadas por si se presentara una demanda o imprevisto que requiera su contribución, en este escenario es notable resaltar que en la mayoría de los lapsos en que la restricción EDR es mayor coincide con la venta a la red de distribución y la carga de BESS sucede cuando se presenta un "exceso" de producción, lo cual coincide con la estrategia técnica de despacho y se ilustra en la figura 5.2.

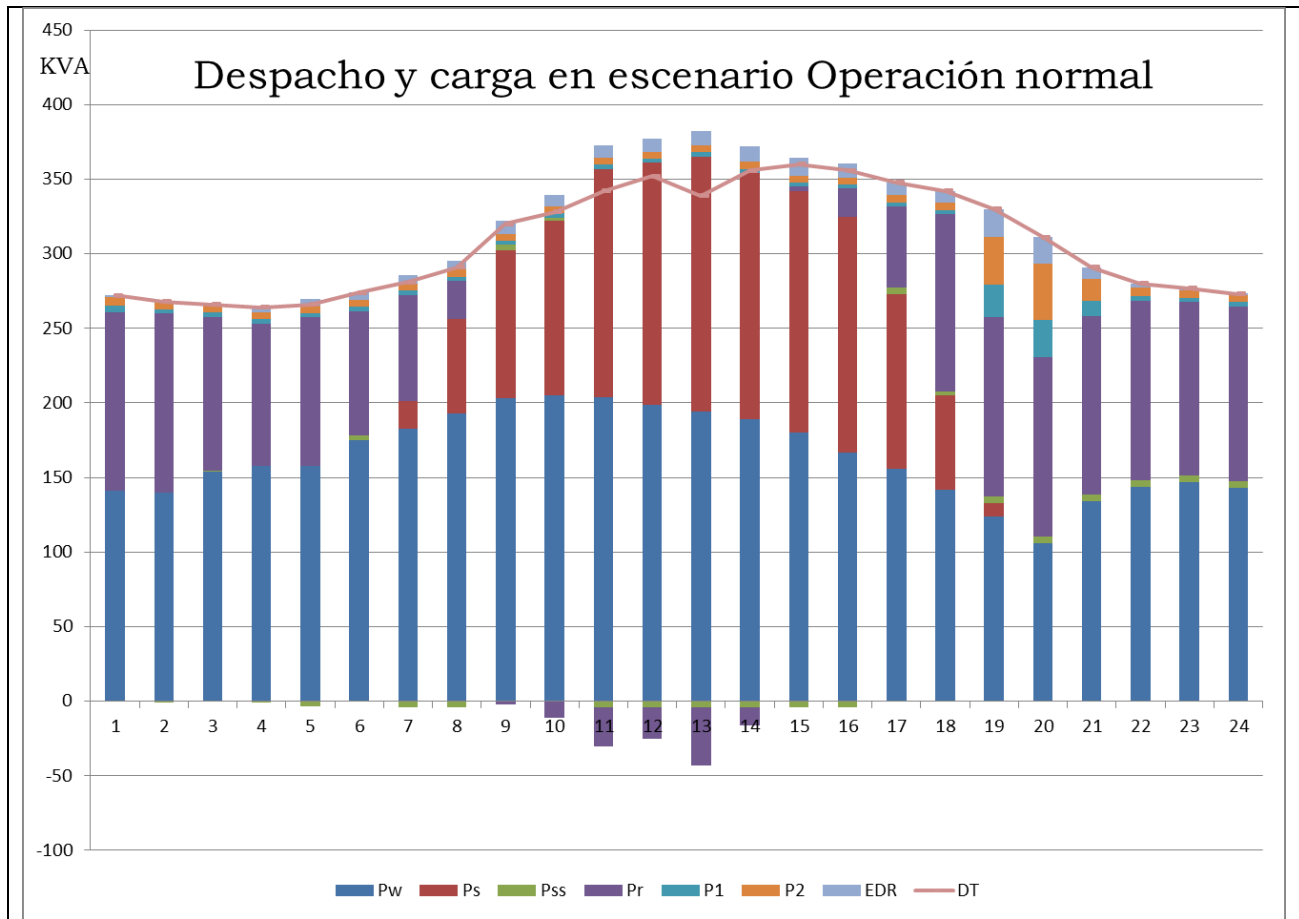


Figura 5.2. Contribución de los generadores para el escenario de Operación normal.

Con relación a los totales del ciclo estudiado en el escenario 1, se tiene que la contribución total en KVA-hr. fue: la planta eólica con 3,939, la planta solar con 1,457, el balance de carga/descarga del sistema de almacenamiento de baterías fue de 3.8 KW-hr, el balance con la red de distribución fue de 1,516, el generador convencional 1 con 120, el generador 2 con 184 y la reducción del programa EDR fue de 169.8, lo que dió un costo operativo de \$ 1,271.43 durante el ciclo.

Tabla 5.4. Valores del vector de salida en el escenario 1 Operación normal.

Lapso	Contingencia Ambiental	Eólico	Solar	Batería	Red de distribución	Generador Diesel 1	Generador Diesel 2	Demanda reducida	Demanda Total
t	α_t	P_{W_t} (KVA)	P_{S_t} (KVA)	P_{SS_t} (KW)	P_{r_t} (KVA)	$P_{1,t}$ (KVA)	$P_{2,t}$ (KVA)	x_t (KVA)	D_T (KVA)
1	0	141	0	0	120	3.9	6	1.1	272
2	0	140	0	-0.8	119.9	2.9	4.6	1.1	268

3	0	154	0	0.6	103	2.9	4.6	1.5	266
4	0	158	0	-0.3	95.2	2.9	4.6	3.4	264
5	0	158	0	-3.4	99.4	2.9	4.6	5.1	266
6	0	175	0	3.4	83.2	2.9	4.6	4.9	274
7	0	183	18	-4.4	71.4	2.9	4.6	5.5	281
8	0	193	63	-4.4	25.8	2.9	4.6	6.1	291
9	0	203	99	3.9	-2	2.9	4.6	8.6	320
10	0	205	117	2.3	-11.4	2.9	4.6	7.6	328
11	0	204	153	-4.4	-26.1	2.9	4.6	8	342
12	0	199	162	-4.4	-20.9	2.9	4.6	8.8	352
13	0	194	171	-4.4	-38.8	2.9	4.6	9.8	339
14	0	189	165	-4.4	-11.7	2.9	4.6	10.7	356
15	0	180	162	-4.4	3	2.9	4.6	12	360
16	0	167	158	-4.4	18.6	2.9	4.6	9.3	356
17	0	156	117	4.4	54.3	2.9	4.6	8.8	348
18	0	142	63	2.5	119.1	2.9	4.6	7.9	342
19	0	124	9	4.4	120	21.7	32.3	18.6	330
20	0	106	0	4.4	120	25.3	37.5	17.8	311
21	0	134	0	4.4	120	10	15	7.6	291
22	0	144	0	4.4	120	3.5	5.5	2.6	280
23	0	147	0	4.4	116.3	2.9	4.6	1.8	277
24	0	143	0	4.4	117.4	2.9	4.6	1.2	273
Totales									
	0	3,939	1,457	3.8	1,516	120	184	169.8	7,387

Para determinar el análisis de sensibilidad se introdujo una primer variante a la operación normal que es la presencia de la contingencia ambiental, donde se activó de los lapsos 7 a 10 y de 18 a 20 como se muestra en los valores obtenidos en la tabla 5.5, del escenario 2 denominado contingencia ambiental.

De los valores en la tabla 5.5 de los períodos 1 a 6 la generación se basa en la energía eólica y la compra a la red de distribución, mientras que la producción convencional se mantiene baja y se aprovecha para la carga de baterías, al llegar a los primeros periodos de contingencia ambiental, la producción convencional se reduce al mínimo y se aprovecha la generación solar, en los periodos siguientes de 11 a 17 sin contingencia ambiental, nuevamente se incrementa en forma ligera la producción convencional y el exceso de los RES se utiliza para la carga de baterías y la venta del exceso a la red de distribución, así al entrar al periodo 18 ya con contingencia ambiental, nuevamente los generadores convencionales reducen al mínimo su producción para reducir la emisión de gases contaminantes, sin embargo en los períodos 19 y 20, no es suficiente la producción RES y las baterías y la red de distribución se van a su máximo de contribución, así como la reducción del programa EDR también llega a su máximo, por lo que los generadores convencionales se ven forzados a incrementar su producción con la consecuente incremento en el valor del costo de operación.

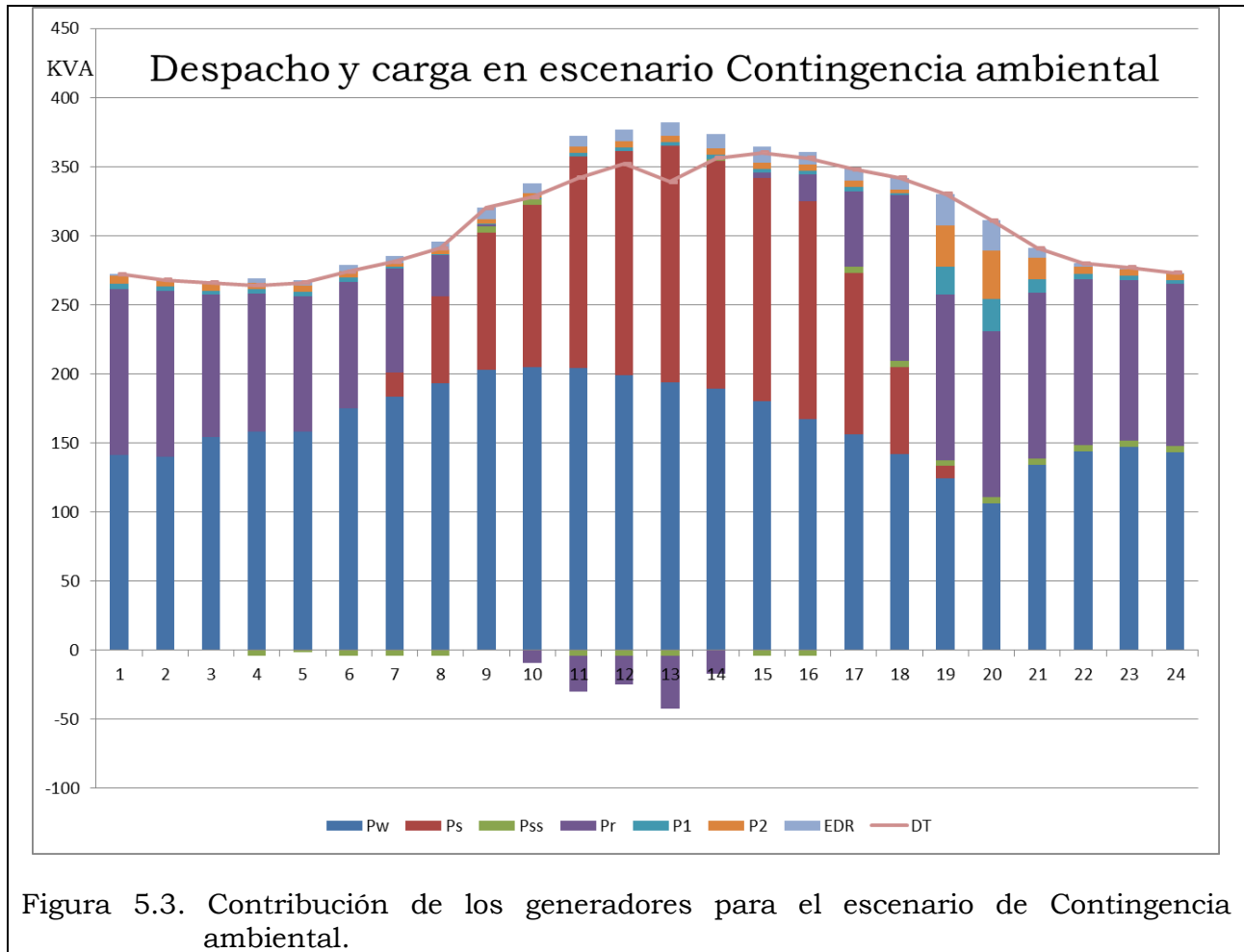


Figura 5.3. Contribución de los generadores para el escenario de Contingencia ambiental.

Con relación a la diferencia en los totales del ciclo estudiado en el escenario 2 (Contingencia ambiental) y en comparativa al escenario 1, se tiene que la contribución total en KVA-hr. fue: la planta eólica y solar no tuvieron cambios, en los generadores convencionales se registró una disminución de 13 en cada uno, el programa EDR se incrementó en 1.2 y la compra de energía a la red de distribución se incrementó en 24 mientras que el balance de energía con BESS registró un aumento de 0.6 como lo muestra la figura 5.3, finalmente la diferencia en costo operativo del ciclo fue con un incremento de \$ 254.39, que podemos inferir que se refiere al costo de la contingencia ambiental.

Tabla 5.5. Valores del vector de salida en el escenario 2 Contingencia ambiental.

t	α_t	P_{w_t} (KVA)	P_{s_t} (KVA)	P_{ss_t} (KW)	P_{r_t} (KVA)	$P_{1,t}$ (KVA)	$P_{2,t}$ (KVA)	x_t (KVA)	D_T (KVA)
1	0	141	0	0	120	4	6.1	1	272
2	0	140	0	-0.1	120	2.9	4.6	0.7	268
3	0	154	0	0.1	103.2	2.9	4.6	1.2	266
4	0	158	0	-4.4	100	2.9	4.6	3.2	264
5	0	158	0	-1.7	98.1	2.9	4.6	4.1	266
6	0	175	0	-4.4	91.5	2.9	4.6	4.5	274
7	1	183	18	-4.4	75.3	1	3	5.1	281
8	1	193	63	-4.4	29.8	1	3	5.6	291

9	1	203	99	4.4	1.5	1	3	8.2	320
10	1	205	117	4.4	-9.5	1	3	7.2	328
11	0	204	153	-4.3	-25.7	2.9	4.6	7.7	342
12	0	199	162	-4.4	-20.4	2.9	4.6	8.4	352
13	0	194	171	-4.4	-38.3	2.9	4.6	9.4	339
14	0	189	165	1.6	-17.2	2.9	4.6	10.2	356
15	0	180	162	-4.4	3.5	2.9	4.6	11.5	360
16	0	167	158	-4.4	19.1	2.9	4.6	8.9	356
17	0	156	117	4.4	54.8	2.9	4.6	8.3	348
18	1	142	63	4.4	120	1	3	8.6	342
19	1	124	9	4.4	120	20	29.7	23	330
20	1	106	0	4.4	120	23.5	34.9	22.1	311
21	0	134	0	4.4	120	10.1	15.2	7.3	291
22	0	144	0	4.4	120	3.6	5.6	2.4	280
23	0	147	0	4.4	116.5	2.9	4.6	1.7	277
24	0	143	0	4.4	117.5	2.9	4.6	0.7	273
Totales									
	7	3,939	1,457	4.4	1,540	107	171	171	7,387

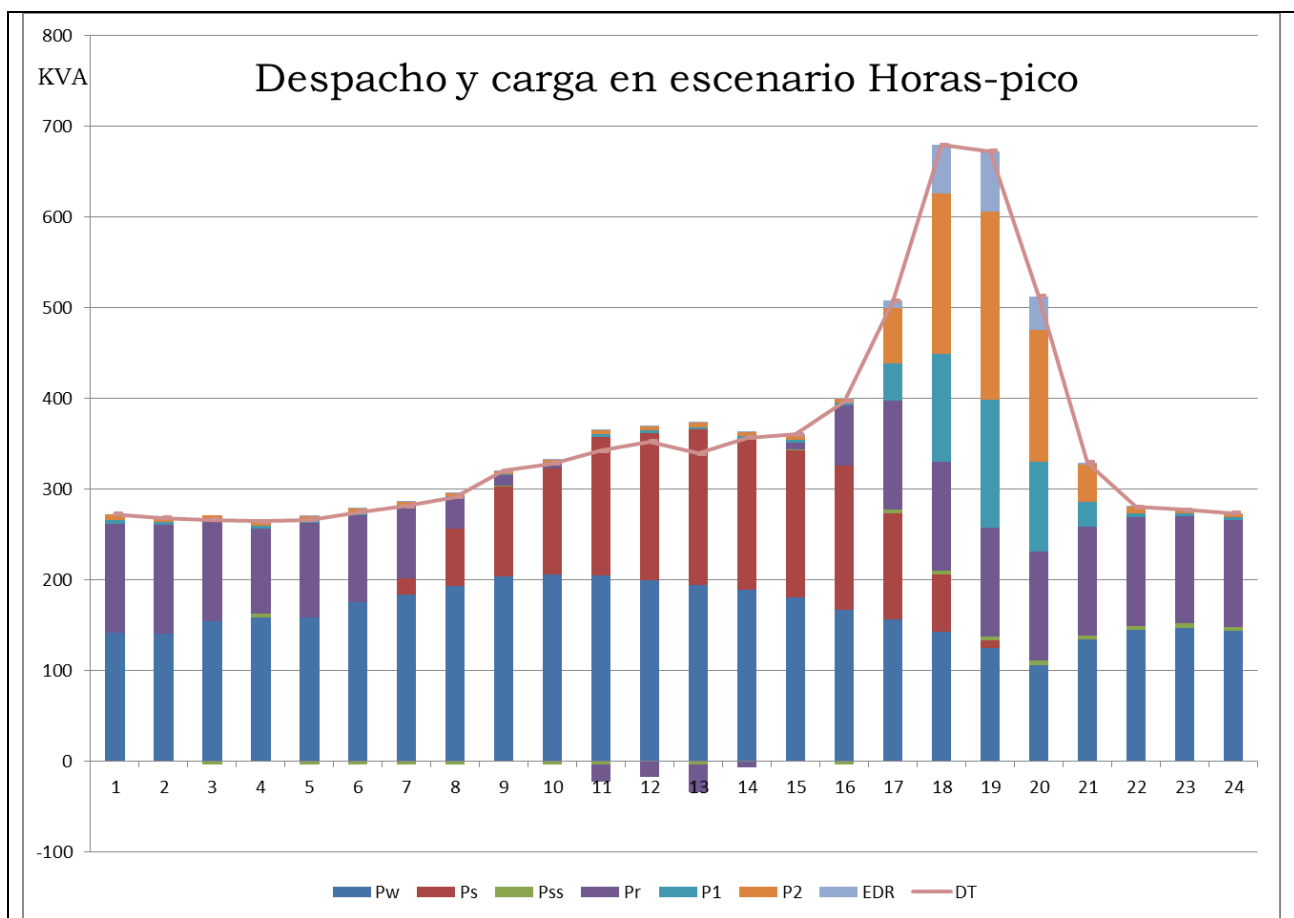


Figura 5.4. Contribución de los generadores para el escenario de Horas pico.

La siguiente variante que se analizó fue el incremento de la carga en horas-pico, así en los lapsos para t del 16 a 21 se presenta el escenario 3 denominado Horas-pico y sus resultados se muestran en la tabla 5.6 y en la figura 5.4.

Tabla 5.6. Valores del vector de salida en el escenario 3 horas-pico.

t	α_t	P_{w_t} (KVA)	P_{s_t} (KVA)	P_{ss_t} (KW)	P_{r_t} (KVA)	$P_{1,t}$ (KVA)	$P_{2,t}$ (KVA)	x_t (KVA)	D_T (KVA)
1	0	141	0	0	120	4.3	6.7	0	272
2	0	140	0	0	120	3.1	4.9	0	268
3	0	154	0	-4.4	108.9	2.9	4.6	0	266
4	0	158	0	4.4	94.1	2.9	4.6	0.8	264
5	0	158	0	-4.4	104.7	2.9	4.6	0.3	266
6	0	175	0	-4.4	95.6	2.9	4.6	0.3	274
7	1	183	18	-4.4	80	1	3	0.4	281
8	1	193	63	-4.4	34.9	1	3	0.5	291
9	1	203	99	1.6	11.6	1	3	0.9	320
10	1	205	117	-4.4	5.7	1	3	0.7	328
11	0	204	153	-4.4	-18.8	2.9	4.6	0.8	342
12	0	199	162	0.3	-17.6	2.9	4.6	0.9	352
13	0	194	171	-4.4	-30.1	2.9	4.6	1	339
14	0	189	165	0.8	-7.5	2.9	4.6	1.2	356
15	0	180	162	1.7	7.4	2.9	4.6	1.4	360
16	0	167	158	-4.4	67	2.9	4.6	1	396
17	0	156	117	4.4	120	41.1	60.8	7.8	507
18	1	142	63	4.4	120	120	176	54	679
19	1	124	9	4.4	120	141	208	66.1	672
20	1	106	0	4.4	120	98.8	146	37.2	512
21	0	134	0	4.4	120	27.5	40.8	2.3	329
22	0	144	0	4.4	120	4.6	7	0.3	280
23	0	147	0	4.4	118.1	2.9	4.6	0	277
24	0	143	0	4.4	118.1	2.9	4.6	0	273
Totales									
	7	3,939	1,457	4.4	1,732	479	717	177.9	8,504

En el escenario 3 Horas-pico se aprecia que la prioridad en la atención de la demanda se inicia con los generadores RES, continua con los elementos de interconexión (baterías y red de distribución) para continuar con la generación convencional y finalmente con la reducción de la demanda EDR. Para este caso particular se detecta que de los periodos 16 a 21 se tiene notable incremento de la demanda, la cual se atiende con los generadores RES y la interconexión alcanza su máximo al igual que el programa EDR, pero a pesar de eso es necesario elevar la generación convencional a pesar de coincidir con la penalización por contingencia ambiental, donde los lapsos críticos se registran en los periodos 18 y 19 ya que se supera en 100% la demanda normal. Ahora al comparar este escenario 3 con relación al escenario 2, se encuentran las siguientes diferencias en KVA-hr: la demanda total se incrementa en 1,117, que se distribuye con un incremento con la red de distribución de 192.4, generadores convencionales con 372 y 546 más 6.9 de EDR con un incremento de \$ 14,161.84, que podemos inferir que se refiere al costo de la sobrecarga en horas-pico.

Finalmente se introdujo la variante de falla en los generadores RES en el escenario 4 denominado Falla y sus resultados se presentan en la tabla 5.7.

Tabla 5.7. Valores del vector de salida en el escenario 4 Falla.

t	α_t	P_{w_t} (KVA)	P_{s_t} (KVA)	P_{ss_t} (KW)	P_{r_t} (KVA)	$P_{1,t}$ (KVA)	$P_{2,t}$ (KVA)	x_t (KVA)	D_T (KVA)
1	0	141	0	0	120	4.3	6.7	0	272
2	0	140	0	0	120	3.1	4.9	0	268
3	0	154	0	-4.4	109.5	2.6	4.3	0	266
4	0	158	0	-3.6	102.7	2.7	4.3	0	264
5	0	158	0	-4.4	105.5	2.7	4.3	0	266
6	0	175	0	-4.4	96.5	2.7	4.3	0	274
7	1	0	18	4.4	120	52.6	77.8	8.2	281
8	1	0	63	4.4	120	40.1	59.4	4	291
9	1	0	0	4.4	120	71.5	106	18.6	320
10	1	205	0	-1	120	1	3	0	328
11	0	204	153	-4.4	-17.5	2.6	4.3	0	342
12	0	199	162	-4.4	-11.5	2.6	4.3	0	352
13	0	194	171	-4.4	-28.5	2.6	4.3	0	339
14	0	189	165	-4.4	-0.5	2.6	4.3	0	356
15	0	180	162	-4.4	15.4	2.6	4.3	0.1	360
16	0	167	158	-4.2	68.2	2.6	4.3	0	396
17	0	156	117	4.4	120	42.9	63.5	3.3	507
18	1	142	63	4.4	120	122	179	48.9	679
19	1	124	9	4.4	120	143	211	61	672
20	1	106	0	4.4	120	101	149	32.1	512
21	0	134	0	4.4	120	28.1	41.7	0.8	329
22	0	144	0	4.4	120	4.5	7.1	0	280
23	0	147	0	4.4	119.1	2.7	3.9	0	277
24	0	143	0	4.4	120	2.2	3.4	0	273
Totales									
	7	3360	1241	4.4	2119	645	958	177	8504

De la tabla 5.7 del escenario 4, en los horarios 7 a 9 en que se presenta la falla en P_w que se muestran en rojo, la carga es atendida con la opción de menor costo, que son P_s y P_{ss} , para después pasar con la compra con la red superior P_r , seguido de los generadores convencionales P_1 y P_2 para finalmente utilizar el programa EDR en sus valores máximos permisibles que no afecten a los usuarios. Ahora en el caso crítico que es el lapso 9 donde coinciden la falla de P_w , P_s y la contingencia ambiental, los generadores P_{ss} y P_r se van a su máximo y a pesar de los costos de operación y regeneración de contaminantes de los generadores P_1 y P_2 en este se tiene la mayor contribución de potencia, para que finalmente el valor de EDR se eleve en forma considerable. De esta manera en los casos de los lapsos de t 11 a 14 se puede considerar la forma de trabajo como normal y se observa que en estos casos P_r y P_{ss} son negativos, que corresponde a venta de potencia y carga de BESS. Asimismo para el resto de los periodos de este ciclo de estudio permanece en forma similar a lo explicado en el escenario 3 y se muestra en la figura 5.5. Con relación a los totales al comparar el escenario 4 con el escenario 3 en KVA-hr, se registra una disminución por falla de 579 y 216 para las plantas eólica y solar respectivamente, que las compensa con incremento en 386.8, 166, 242 y -0.9 en la interconexión con la red de distribución, los generadores convencionales y EDR respectivamente, con un incremento de \$ 3,689.06 de costo de gastos de operación, que se puede decir que fue la base del costo de la falla en los generadores.

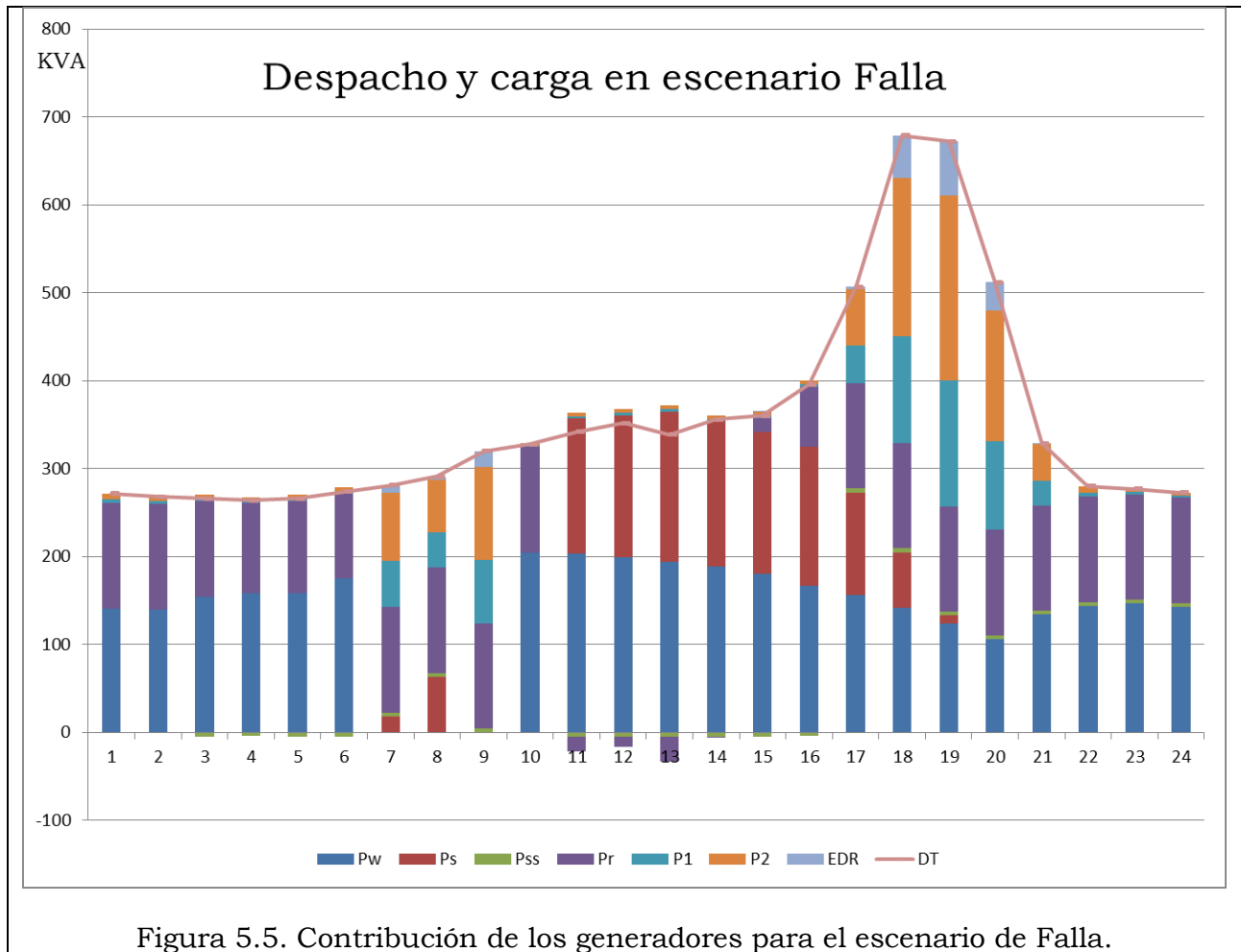


Figura 5.5. Contribución de los generadores para el escenario de Falla.

5.5. Discusión

La figura 5.6 muestra el comportamiento de cada una de las fuentes de potencia de la MG ante cada uno de los escenarios de estudio mencionados. En la figura 5.6 (a) se muestra la contribución de la planta eólica y se aprecia su fallo de los lapsos 7 a 9 en el escenario 4; en la figura 5.6 (b) se muestra el comportamiento del suministro de la planta fotovoltaica, en la que se aprecia su fallo en los lapsos 9 y 10 del escenario 4; en la figura 5.6 (c) se presenta el flujo de potencia entre la micro-red y el sistema de almacenamiento de energía eléctrica donde los valores negativos son para carga de baterías y los positivos son de descarga; en la figura 5.6 (d) se muestra el intercambio de potencia con la red superior donde los casos positivos se refieren a la compra de energía y los negativos son para su venta; en la figura 5.6 (e) y (f) se muestra la contribución de potencia de los generadores convencionales y se aprecia sus picos de contribución en los fallos de los RES y en el notable incremento de la demanda en las horas pico; en la figura 5.6 (g) se presenta el comportamiento del programa de reducción de la demanda EDR y finalmente en la figura 5.6 (h) se describe el comportamiento de la demanda que debe atender el administrador de la micro-red. Con esta apreciación grafica se observa la coherencia entre la atención técnica de la demanda y la estrategia de atención priorizando las RES.

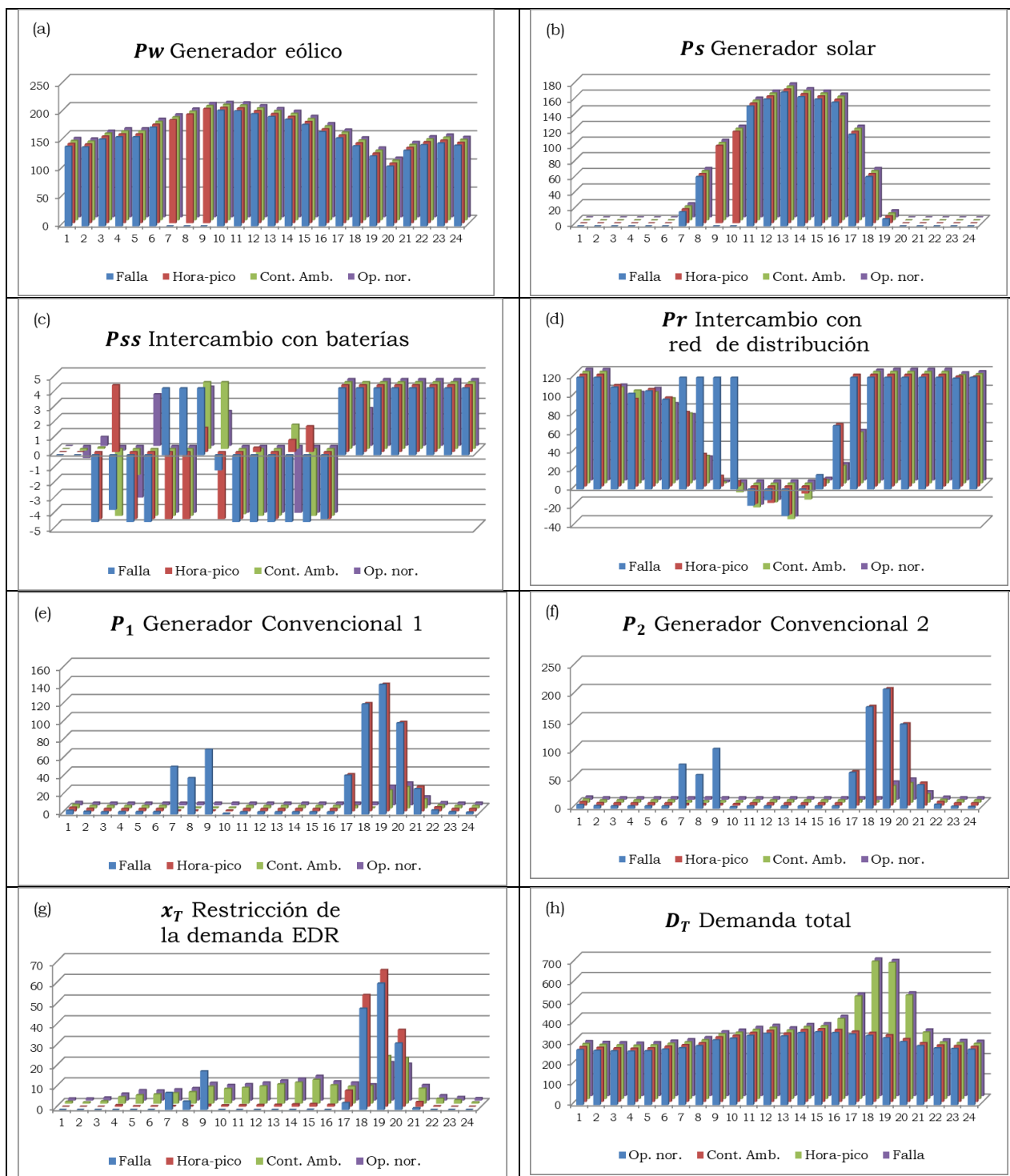


Figura 5.6. Gestión de los DG en los diferentes escenarios.

Conclusiones.

De acuerdo a lo expresado en el planteamiento del problema definido en el punto 3.5 del presente documento y con fundamento en las referencias [5, 7, 8, 9] se establecieron los objetivos enunciados en los puntos 3.6 y 3.7 de la presente tesis, así con los sustentos de conocimiento científico y técnico que se describen en los capítulos 2, 3 y 4, se logró materializar el caso de estudio planteado en el capítulo 5, con el modelo matemático definido por el conjunto de ecuaciones (5.1) a (5.20), con lo que se obtuvo lo descrito en los puntos 5.4 y 5.5 de la presente publicación, logrando lo siguiente:

- Se establecieron los elementos y variables consideradas, así como las condiciones de operación en el sistema de la micro-red modelada que incluye fuentes alternas de energía y generadores despachables.
- Se generó el modelo matemático de la función de precio, para su minimización, con base a la literatura técnica y científica actual.
- Se definieron las condiciones propias, así como las limitantes a considerar en la búsqueda de la optimalidad en la solución del caso planteado, así como las consideraciones técnicas que deben asumirse.
- Las acotaciones de funcionamiento de la micro-red se consideran como valores de entrada del algoritmo, de tal manera que los límites de operación del algoritmo quedaron perfectamente definidos.
- Se estableció la herramienta de programación matemática adecuada a los requerimientos de funcionamiento del caso de estudio planteado para el presente trabajo.
- El modelo matemático planteado para el estudio funcionó en forma apropiada, logrando cumplir con la estrategia de atención técnica y a la vez obtener la reducción de costos de la función objetivo planteada.
- Se seleccionó el caso de estudio que logró mostrar la funcionalidad del modelo matemático en una micro-red a nivel de simulación de un proyecto que se está desarrollando con posibilidades de ejecutarse.
- La propuesta de programación matemática funcionó correctamente y permitió evaluar los escenarios planteados en el estudio.
- El modelo de la programación matemática de la función mono-objetivo y multi-variable planteada logro obtener la minimización de costos de operación de una micro-red en su actividad de gestión de las fuentes de energía consideradas.
- Se cumplió con todas las características enunciadas en el cuerpo del objetivo general planteado.
- Finalmente se realizó la publicación del presente trabajo de investigación.

Trabajos futuros.

Derivado de la presente investigación se pueden desprender diversos trabajos en diferentes líneas de investigación complementaria, como pueden ser:

- Implementar un programa complementario de Modelo de Control Predictivo en tiempo real para ajustar el análisis de ciclo en tiempo real, como acción de control primaria.
- Desarrollar el código de programación del modelo matemático propuesto en sistemas abiertos para difusión libre.
- Adicionar al modelo matemático el factor de incertidumbre de producción de las fuentes RES a través de un motor de variables aleatorias como puede ser el simulador de Monte Carlo.
- Complementar con una alternativa de modelo matemático multi-objetivo para probar su eficiencia en relación con el modelo desarrollado, entre otras.

Referencias.

- [1] Carta G, R. C. P. A. C. S. M. A. C. G. J A, Centrales de energías renovables, generación eléctrica con energías renovables, 2009 ed., M. Martín-Romo, Ed., Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A., 2009.
- [2] N. Unidas, Protocolo de Kyoto de la convención marco de las naciones unidas sobre el cambio climático, Kyoto, 1997.
- [3] S. d. Energía, «Inventario Nacional de Energías Limpias,» [En línea]. Available: <https://www.gob.mx/sener/articulos/inventario-nacional-de-energias-limpias?idiom=es>. [Último acceso: 19 noviembre 2020].
- [4] Pansini, K. S. A.J. Guide to electric power generation, London, UK: The Fairmont Press, Inc., 2006.
- [5] Camara de Diputados del Honorable Congreso de la Unión, Ley de la Industria Eléctrica, Ciudad de México, 2014.
- [6] R. H. Lasseter, «Microgrids and distributed generation,» Journal of Energy Engineering, vol. 133, pp. 144-149, 2007.
- [7] Mariam M. B. M. C. L., «Microgrid: Architecture, policy and future trends,» Renewable and Sustainable Energy Reviews, pp. 477-489, July 2016.
- [8] Bari A, J. J. S. W. J. A., Challenges in the smart grid applications: An overview, 2014.
- [9] Alireza Rezvani M. G. M. I. A. A., «Environmental/economic scheduling of a micro-grid with a renewable energy sources,» Journal of Cleaner Production, vol. 87, pp. 216-226, 2015.
- [10] Liang Luo S. S. A. A. R. M. R. M. S. S. N. A. M. P., «Optimal scheduling of a renewable based microgrid considering photovoltaic system and battery energy storage under uncertainty,» Journal of Energy Storage, vol. 28, 2020.
- [11] B. M.-i. D. N. Farhad Nazari-Herisa, «Network constrained economic dispatch of renewable energy and CHP based microgrids,» Electrical Power and Energy Systems, vol. 110, pp. 144-160, 2019.
- [12] M. N.-H. K. Z. B. M.-I. Mehrdad Ghahramani, «Energy and reserve management of a smart distribution system by incorporating responsive-loads /battery/wind turbines considering uncertain parameters,» Energy, vol. 183, pp. 205-219, 2019.
- [13] X. L. M. D. Hongbin Wu, «Dynamic economic dispatch of a microgrid: Mathematical models and solution algorithm,» Electrical Power and Energy Systems, vol. 63, pp. 336-346, 2014.
- [14] S. J. Hamid Karimi, «Optimal energy management for multi-microgrid considering demand response programs: A stochastic multi-objective framework,» Energy, vol. 195, 2020.
- [15] L. H. C. D. W. H. O. P. M. B. Mathiesen BV, «Smart Energy Systems for coherent 100% renewable energy and transport solutions,» Applied Energy, vol. 145, pp. 139-154, 2015.
- [16] L. R. Rong Aiyong, «An efficient envelope-based Branch and Bound algorithm for non-convex combined heat and power production planning,» European Journal of Operational Research, vol. 183, pp. 412-431, 2007.
- [17] R. H. K. A. Abdolmohammadi, «A Benders decomposition approach for a combined heat and power economic dispatch,» Energy Conversion and Management, vol. 71, pp. 21-31, 2013.
- [18] P. J. M. N. T. C. Sashirekha A, «Combined heat and power (CHP) economic dispatch solved using Lagrangian relaxation with surrogate subgradient multiplier updates,» International Journal of Electrical Power & Energy Systems, vol. 44, pp. 421-430, 2013.
- [19] M. W. H. L. Jinhao Wang, «Energy Management Strategy for Microgrid Including Hybrid Energy Storage,» de Asian Conference on Energy, Power and Transportation Electrification (ACEPT) IEEE, 2018.
- [20] K. S. Jayashree, «Methodologies for Optimal Sizing of Battery Energy Storage in Microgrids: A Comprehensive Review,» de 2020 International Conference on Computer Communication and Informatics, Coimbatore, INDIA , 2020.
- [21] H. M.-P. O. A.-M. R. T.-O. F. Daniel Santillán-Lemus, «Optimal Economic Dispatch in Microgrids with Renewable Energy Sources,» Energies, vol. 181, pp. 1-14, 2019.
- [22] W. W. Weiye Zheng, «Dynamic Economic Dispatch for Microgrids: A Fully Distributed Approach,» IEEE, pp. 1-3, 2016.
- [23] Z. Yan, «A model predictive control based distributed coordination of multi-microgrids in energy internet,» Acta Automat Sinica , vol. 8, n° 43, pp. 1443-1456, 2017.
- [24] C. S. Raimondi, «A two-layer stochastic model predictive control scheme for microgrids,» IEEE Trans Control Syst Technol, vol. 1, n° 26, pp. 1-13, 2018.

- [25] H. Tazvinga, X. Xia y B. Zhu, «Model Predictive Control for Energy Dispatch of a Photovoltaic-Diesel-Battery Hybrid Power System,» Cape Town, South Africa, 2014.
- [26] P. D. Michael Zachar, «Nonlinear Economic Model Predictive Control for Microgrid Dispatch,» IFAC-PapersOnLine, Vols. %1 de %22405-8963, 2016.
- [27] C. G. G. V. M. G. P. A. Calderaro V, «Active management of renewable energy sources for maximizing power production,» *Electr Power Energy Syst*, n° 57, pp. 64-72, 2014.
- [28] X. Xia y N. Nwulu, «Optimal dispatch for a microgrid incorporating renewables and demand response.,» *Energy*, vol. 101, pp. 16-28, 2017.
- [29] Z. Z.-q. X. Y.-m. M. J. Zhao Xin-gang, «Economic-environmental dispatch of microgrid based on improved quantum particle swarm optimization,» *Energy*, vol. 195, pp. 1-13, 2020.
- [30] J. a. D. S. Moré, «Computing a Trust Region Step,» *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 3, p. 553-572, 1983.
- [31] R. R. S. a. G. S. Byrd, *Mathematical Programming*, vol. 40, 1988, p. 247-263.
- [32] T. Steihaug, «The Conjugate Gradient Method and Trust Regions in Large Scale Optimization,» *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol., pp. vol. 20, p. 626-637, 1983.
- [33] M. T. C. a. Y. L. Branch, «A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems,» *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, p. 1-23, 1999.
- [34] T. a. A. V. Coleman, «A Preconditioned Conjugate Gradient Approach to Linear Equality Constrained Minimization,» *Computational Optimization and Application*, vol. 20, n° 1, p. 61-72, 2001.
- [35] J. a. R. M. Nelder, «A Simplex Method for Function Minimization,» *Computer J*, vol. 7, p. 308-313, 1965.
- [36] C. Broyden, «The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms,» *J. Inst. Maths. Applics*, vol. 6, p. 76-90, 1970.
- [37] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Scotland UK: John Wiley and Son, 1987.
- [38] D. Goldfarb, «A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means,» *Mathematics of Computing*, vol. 24, p. 23-26, 1970.
- [39] D. Shanno, «Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization,» *Mathematics of Computing*, vol. 24, p. 647-656, 1970.
- [40] W. Davidon, «Variable Metric Method for Minimizatio,» A.E.C. Research and Development Report, n° ANL-599, 1959.
- [41] R. a. M. P. Fletcher, «A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization,» *Computer Journa*, vol. 6, p. 163-168, 1963.
- [42] J. C. J. A. R. M. H. W. a. P. E. W. Lagarias, «Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,» *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, n° 1, p. 112-147, 1998.
- [43] J. a. D. S. Moré, «Computing a Trust Region Step,» *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, p. 553-572, 1983.
- [44] T. Steihaug, «The Conjugate Gradient Method and Trust Regions in Large Scale Optimization,» *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 20, p. 626-637, 1983.
- [45] K. Schittkowski, «NLQPL: A FORTRAN-Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems,» *Annals of Operations Research*, vol. 5, pp. 485-500, 1985.
- [46] M. Biggs, «Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming,» North-Holland, p. 341-349, 1975.
- [47] S. Han, «A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming,» *J. Optimization Theory and Applications*, vol. 22, p. 297, 1977.
- [48] M. Powell, «A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations,» *Lecture Notes in Mathematics, Numerical Analysis*, p. 630, 1978.
- [49] P. W. M. a. M. W. Gill, *Numerical Linear Algebra and Optimization*, vol. 1, 1991.
- [50] J. a. S. J. W. Nocedal, *Numerical Optimization*, Second Edition ed., S. S. i. O. Research, Ed., Springer Verlag, 2006.
- [51] R. A. ., J. L. M. J. N. a. D. O. Waltz, «An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps,» *Mathematical Programming*, vol. 107, n° 3, p. 391-408, 2006.
- [52] R. A. ., J. L. M. J. N. a. D. O. Waltz, «An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps,» *Mathematical Programming*, vol. 107, n° 3, p. 391-408, 2006.
- [53] L. S. Bijit, *Redes Eléctricas*, Madrid, España: Pearson Educación, S.A, 2006.
- [54] C. N. d. C. d. Energía, *Plan estratégico 2017-2021*, Cd. de Mexico , 2018.
- [55] L. X. L. Q. Jiang Dongrong, «Economically distributing strategies for daily generation scheduling in a power system under power market environment,» *Proceedings of the CSEE*, vol. 7, n° 24, pp. 90-94, 2004.
- [56] W. X. W. J. Zhang Xian, «A long-term allocating strategy of power generators,» *Proceedings of the CSEE*, vol. 1, n° 25, pp. 6-12, 2005.
- [57] D. K. Neha Yadav, «Microgrid Economic load Dispatch including Storage and Reserve,» de IEEE 8th Power India International Conference (PIICON), 2018.
- [58] M. &. E.-S. E. Albadí, «Demand response in electricity markets: An overview.,» *IEEE Power engineering society general meeting*, p. 1-5, 2007.
- [59] A. Z. S. J. P. S. M. Mazidi, «Integrated scheduling of renewable generation and demand response programs in a microgrid,» *Energy Convers Management*, n° 86, pp. 1118-1127, 2014.
- [60] E. M. A. y. Y. D. d. M. Morales., *Contaminación atmosférica*, Madrid, España: Universidad de Castilla-La Mancha. ISBN 8484273245, 2004.
- [61] «Aire tóxico: el asesino invisible,» *El pais*, May 2018. [En línea]. Available: <https://www.elpais.com.uy/vida-actual/aire-toxico-asesino-invisible.html>. [Último acceso: 3 Dic 2020].
- [62] Y. Zhang, N. Gatsis y G. B. Giannakis, «Robust energy management for microgrids with high-penetration renewables,» *IEEE Transactions on Sustainable Energy* , vol. 4, n° <http://dx.doi.org/10.1109/TSTE.2013.2255135>, pp. 944-953, 2013.

- [63] R. H. Lasseter, «Microgrids and Distributed Generation,» JOURNAL OF ENERGY ENGINEERING, vol. 133, n° 3, pp. 144-149, 2007.
- [64] D. M. H. J. H. P. a. P. Y. Liu Xiaoping, Dynamic Economic Dispatch for Microgrids Including Battery Energy Storage, China: 2nd IEEE International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems, 2010.
- [65] M. S. S. S. M. Vahid Davatgaran, «Smart distribution system management considering electrical and thermal demand response of energy hubs,» Energy, vol. 169, n° 15, pp. 38-49, 2019.