



U

P

T

“DESPACHO ENERGÉTICO ÓPTIMO EN MICRO-  
REDES QUE INCLUYEN FUENTES ALTERNAS DE  
ENERGÍA”

Tesis que presenta  
Ing. Francisco Daniel Santillán Lemus

Para obtener el grado de:  
MAESTRO EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

Director de Tesis:  
Dr. Hertwin Minor Popocatl  
MC. Edgar León Olivares

Tulancingo de Bravo, Hidalgo

SEPTIEMBRE 2017

©UPT 2017  
Derechos reservados

El autor otorga a UPT el permiso de reproducir y  
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes.





U

P

T

“DESPACHO ENERGÉTICO ÓPTIMO EN MICRO-  
REDES QUE INCLUYEN FUENTES ALTERNAS DE  
ENERGÍA”

Tesis de Maestría en  
Automatización y Control

Por:  
FRANCISCO DANIEL SANTILLÁN LEMUS  
Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica

Director de Tesis:  
Dr. Hertwin Minor Popocatl  
MC. Edgar León Olivares

Tulancingo de Bravo, Hidalgo, Septiembre 2017





Universidad Politécnica de Tulancingo



## ACTA DE COLOQUIO DE TESIS

En la UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE TULANCINGO, el día 25 de agosto de 2017, se reunieron los profesores: **DR. JESÚS ARTURO MONROY ANIEVA**, **DR. FELIPE COYOTL MIXCOATL**, **DR. HERTWIN MINOR POPOCATL** Y **MTRO. EDGAR LEÓN OLIVARES**, integrantes del jurado de **PRE-EXAMEN DE GRADO DE LA MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL** del Ing.:

*Francisco Daniel Santillán Lemus*

Que presentó el trabajo de Tesis titulado: “ DESPACHO ENERGÉTICO ÓPTIMO EN MICRO-REDES QUE INCLUYEN FUENTES ALTERNAS DE ENERGÍA”

Después de escuchar la presentación y defensa del trabajo de tesis, el jurado examinó y resuelve: Aprobarlo

**DR. JESÚS ARTURO MONROY ANIEVA**  
Presidente

**DR. FELIPE COYOTL MIXCOATL**  
Secretario

**DR. HERTWIN MINOR POPOCATL**  
Vocal

**MTRO. EDGAR LEÓN OLIVARES**  
Vocal





Fecha: 25 de agosto de 2017

## DICTAMEN DE COLOQUIO DE TESIS

Ing. Francisco Daniel Santillán Lemus  
**PRESENTE**

Nos referimos al trabajo de tesis titulado: **"DESPACHO ENERGÉTICO ÓPTIMO EN MICRO-REDES QUE INCLUYEN FUENTES ALTERNAS DE ENERGÍA"**, el cual ha sido validado y aprobado por el Comité de Sinodales; por lo anterior, se le autoriza la impresión final del manuscrito y se le solicita entregue un ejemplar empastado a cada integrante del Jurado de Examen, así como a la Dirección de Investigación y Posgrado\*.

Presidente  
Dr. Jesús Arturo Monroy Anieva

Secretario  
Dr. Felipe Coyotl Mixcoatl

Vocal  
Dr. Hertwin Minor Popocatl

Vocal  
Mtro. Edgar León Olivares

\*\*Para ser válido este documento, deberá estar firmado por todos los integrantes del Jurado de Tesis

# **Dedicatoria.**

A la memoria de las personas que me dieron el ser y a quienes les debo todo lo que soy. En gratitud a su incondicional apoyo total que me dieron hasta el último de sus días, mis padres:

**Josefina Lemus Huerta de Santillán, EPD.**

**Francisco Santillán Trejo, EPD.**

A esas personas que recibí en calidad de préstamo, con el regalo de la oportunidad de escribir en la historia de sus vidas y tal vez les sirva como agente de motivación como ellos lo han sido para mí, ustedes mis hijos que siempre están en mí pensamiento. Se presentan por edad.

Eliud Daniel.

Danna Galilea.

Francisco Noé.

# Agradecimientos:

A todos mis profesores que de alguna manera contribuyeron a refrescar algunos conocimientos, así como a actualizarme en los recientes desarrollos, en especial a los que participaron como asesores y revisores en el presente trabajo, que se enlistan en orden cronológico de participación.

Dr. Rubén Tapia Olvera.

Dr. Hertwin Minor Popocatl.

Dr. Omar Aguilar Mejía.

MC. Edgar León Olivares.

Dr. Felipe Coyotl Mixcoatl.

Dr. Jesús Arturo Monroy Anieva.

Al CONACYT por ser una Institución que realmente fomenta la investigación al otorgar las becas PNPB, que sin lugar a dudas es un factor de desarrollo de la sociedad al seguir destinando a esta actividad parte de mis contribuciones fiscales aunadas a las de todos mis compatriotas.

# Índice general.

<b>Capítulo 1 Introducción.</b>	<b>Pag.</b>
1.1. Prefacio.	... 1
1.2. Antecedentes de energía eléctrica en México.	... 2
1.3. Centro Nacional de Control de Energía.	... 3
1.4. Despacho económico óptimo.	... 3
1.5. Generación distribuida.	... 4
1.6. Planteamiento del problema.	... 5
1.7. Objetivo general.	... 5
1.8. Objetivos específicos.	... 5
1.9. Análisis bibliográfico.	... 6
1.10. Organización de la tesis.	... 6
<b>Capítulo 2 Fundamento teórico.</b>	
2.1. Valores extremos.	... 7
2.1.1. Prueba de la primer derivada.	
2.1.2. Prueba de la segunda derivada.	
2.1.3. Condiciones necesarias y suficientes.	
2.2. Funciones cóncavas y convexas.	... 10
2.3. Programación lineal.	... 11
2.3.1. Modelo general.	
2.3.2. Dualidad.	
2.3.3. Poliedro de solución.	
2.3.4. Métodos de solución de Programación lineal.	
2.3.4.1. Método simplex.	
2.3.4.2. Algoritmo del punto interior legado.	
2.3.4.3. Algoritmo del punto interior.	
2.3.4.4. Algoritmo simplex doble.	
2.3.4.5. Método de conjunto activo.	
2.4. Programación cuadrática.	... 15
2.4.1. Modelo.	
2.4.2. Algoritmo general.	
2.5. Programación no lineal.	... 16
2.6. Optimización.	... 17
2.6.1. Clasificación.	
2.6.2. Criterios de optimalidad.	
2.6.3. Multiplicadores de Lagrange.	
2.6.4. Criterio de la segunda derivada para extremos con restricción.	
2.6.5. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.	
2.7. Técnicas de optimización.	... 22
2.7.1. Requerimientos.	
2.7.2. Categorización.	
2.7.3. Técnicas de optimización.	

2.8.	Métodos convencionales.	... 24
2.8.1.	Enfoque sin restricciones.	
2.8.2.	Enfoque lineal.	
2.8.3.	Enfoque no lineal.	
2.8.4.	Enfoque cuadrático.	
2.8.5.	Método de Newton.	
2.8.6.	Método de punto interior.	
2.8.7.	Programación entero mixta.	
2.8.8.	Programación de flujo de red.	
2.9.	Métodos de búsqueda inteligente.	... 26
2.9.1.	Optimización de red neuronal.	
2.9.2.	Algoritmos evolutivos.	
2.9.3.	Búsqueda tabú.	
2.9.4.	Optimización de Inteligencia de enjambre.	
2.10.	No cuantitativos con incertidumbre.	... 30
2.10.1.	Enfoque probabilístico.	
2.10.2.	Aplicación de conjuntos difusos.	
2.10.3.	Proceso analítico jerárquico.	
2.11.	Aplicación a sistemas de potencia.	... 31

### **Capítulo 3 Despacho energético.**

3.1.	Contexto.	... 32
3.2.	Consideraciones de modelado.	... 33
3.2.1.	Función objetivo.	
3.2.2.	Restricciones.	
3.2.3.	Enfoque de solución al modelo.	
3.3.	Flujos de potencia.	... 35
3.3.1.	El análisis del flujo de potencias (AFP).	
3.3.2.	Problema básico.	
3.3.3.	Caso de barra uni-nodal.	
3.3.4.	Pérdidas reactivas.	
3.4.	Estructura de optimización.	... 39
3.5.	Variables de interés.	... 40
3.6.	Generación distribuida.	... 40
3.6.1.	Definición.	
3.6.2.	Parámetros.	
3.6.3.	Fuentes.	
3.6.4.	Tecnología de construcción.	
3.6.5.	Generadores distribuidos.	
3.7.	Micro-redes.	... 44
3.7.1.	Concepto.	
3.7.2.	Características.	
3.7.3.	Componentes.	
3.7.4.	Comparativa de estructura de red.	
3.7.5.	Modelo matemático.	
3.8.	Contaminación ambiental.	... 47

- 3.8.1. Concepto.
- 3.8.2. Clasificación.
- 3.8.3. El ciclo del carbono y el oxígeno.
- 3.8.4. El ciclo del nitrógeno.
- 3.8.5. Contaminación del aire.
- 3.8.6. Contaminantes generados en una micro-red.
- 3.8.7. Técnicas de regeneración del aire.
- 3.8.8. Costos de tratamiento de polución.

## **Capítulo 4 Caso de estudio.**

4.1. Introducción.	... 53
4.2. Planteamiento.	... 54
4.3. Modelado.	... 55
4.3.1. Función de costo.	
4.3.2. Costo de generadores convencionales diesel.	
4.3.3. Costo de interconexión.	
4.3.4. Costo de bonificación DR.	
4.3.5. Costo de tratamiento de polución.	
4.3.6. Restricciones.	
4.3.7. Variables a determinar.	
4.4. Modelo del caso de estudio	... 60
4.4.1. Índices.	
4.4.2. Parámetros.	
4.4.3. Variables de decisión.	
4.4.4. Función objetivo.	
4.4.5. Restricciones.	
4.5. Selección de solucionador	... 61
4.6. Datos.	... 61
4.7. Método de solución.	... 62
4.8. Análisis y comparación de resultados.	... 63
<b>Conclusiones.</b>	... 68
<b>Aportaciones.</b>	... 69
<b>Publicaciones.</b>	... 69
<b>Trabajos futuros.</b>	... 69
<b>Apéndice.</b>	... 70
<b>Referencias.</b>	... 72

# Capítulo 1 Introducción.

## 1.1. Prefacio.

En afán de incrementar la eficiencia y productividad para ofrecer satisfactores, surgen las máquinas que para su funcionamiento requieren de energía, tal es el caso de la actividad industrial y hasta en los hogares con los aparatos electrodomésticos, de tal manera que con el crecimiento de la automatización y las telecomunicaciones se ha expandido a diversas ramas de estudio, como es el surgimiento de la domótica y el internet de las cosas en su más amplio concepto, entre otros.

Para el desarrollo de la sociedad, la utilización de la energía se ha convertido en uno de los pilares que la soportan y su consecuente necesidad de disponibilidad es vital para definir el avance de las economías mundiales. Los años de energético barato y aparentemente infinito que se dieron durante gran parte del siglo XX basado en energías fósiles, se han transformado en este siglo XXI con el inicio de una época en la que las reservas probadas de petróleo y gas natural tienen la posibilidad real del agotamiento total en un horizonte posterior al 2050 [1]. A estos hechos se suma, la creciente conciencia del poder que representa para algunos de los países productores el tener en sus manos la llave del suministro de las principales potencias mundiales y la aparentemente incontrolable inestabilidad de Oriente Medio, donde a los tradicionales conflictos árabe-israelíes se han sumado en la última década la guerra de los extremistas islámicos.

Estos factores, así como la incorporación de enormes superpotencias como China al mercado energético, ha dado como resultado una sucesión aparentemente interminable de crisis de los hidrocarburos, lo que hace necesario buscar energéticos alternos, mediante el fomento de la investigación y uso de las energías renovables como son; biomasa, viento, agua y sol, donde la forma con mayor versatilidad para aplicar estos energéticos es mediante el uso de la energía eléctrica. En sentido estricto, se define como renovable cualquier proceso que no altere el equilibrio térmico del planeta, que no genere residuos irre recuperables, además que la velocidad de su consumo no sea superior a la velocidad de regeneración de la fuente energética y de la materia prima utilizada en el mismo [1].

Los trastornos en nuestro planeta causados por el efecto invernadero han motivado a representantes de diversos países a integrar el Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC) y su protocolo de Kyoto, que representa el inicio de la implementación de una estrategia de respuesta internacional para combatir el cambio climático, donde se han estimulado políticas internacionales para la creación de un mercado internacional de carbono, el establecimiento de nuevos mecanismos institucionales e impulso al desarrollo de sistemas de negociación de emisiones, que actualmente se encuentran en proceso de implementación mundial. En sus primeros compromisos del Protocolo de Kyoto, se limita a reducir las emisiones contaminantes atmosféricas y uno de los sectores que puede regularse es la generación de energía eléctrica [2].

La electricidad generada a partir de fuentes renovables, como lo es la energía solar fotovoltaica, la eólica y los bio-carburantes, se encuentra en crecimiento de tal manera que en algunos países ya superó a la de origen nuclear. En este contexto, la Asociación Mexicana de Energía en nuestro país reportó en el VIII Congreso Anual de Asociaciones del Sector Energético (junio 2016) que la generación de energía eléctrica mediante ciclo combinado paso del 10% en 1999 al 50% en 2015 del consumo nacional.

## 1.2. Antecedentes de energía eléctrica en México.

El uso de la electricidad en la República Mexicana inició en el año de 1879, con la instalación de una central termoeléctrica en la ciudad de León, Gto., para satisfacer la demanda de energía eléctrica de una empresa textil. En 1891 se establece en la ciudad de México la Compañía Mexicana de Gas y Luz Eléctrica, que fue la primer empresa dedicada a la generación y venta de energía eléctrica para alumbrado público, transporte urbano y uso doméstico.

Al consolidarse el triunfo de la revolución mexicana y con base en la Constitución Política de 1917, el gobierno empezó a ocuparse del servicio público de energía eléctrica, donde operaban empresas eléctricas en la figura de concesionarias, mismas que se multiplicaron en función de sus intereses en los lugares que el país registró necesidad. Así el gobierno se enfrentó a los requerimientos de prever que se llevara la energía eléctrica a la pequeña y mediana industria, al campo y en general a todos los centros de población que carecían de ella.

El 14 de agosto de 1937 el Presidente de la Nación, General Lázaro Cárdenas del Río, expidió la ley que creó la Comisión Federal de Electricidad (CFE) con el objeto de organizar un sistema nacional de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, sin propósito de lucro y con la finalidad de obtener a un costo mínimo, el mayor rendimiento posible en beneficio de los intereses generales.

El 14 de enero de 1949 se confirió a la Comisión Federal de Electricidad el carácter de organismo público descentralizado con personalidad jurídica y patrimonio propios, lo cual propició su desarrollo y el día 27 de septiembre de 1960 se adquirió la mayoría de las acciones que constituían el capital de The Mexican Light and Power Co, quedando registrado en la historia de México como el día de la nacionalización del servicio público de energía eléctrica, que al consumarse se reserva en exclusividad a la nación mexicana lo referente a la generación, conducción, transformación, distribución y abastecimiento de energía eléctrica, que tenía por objeto la prestación de servicio público, sin concesiones a particulares y debiendo aprovechar los bienes y recursos naturales requeridos para estos fines.

La decisión de nacionalizar el servicio de energía eléctrica, la unificación de frecuencia en el país a 60 Hz, misma que se concluyó en 1976, así como la interconexión del Sistema Eléctrico Nacional en 1978, permitieron a la explotación más racional de todos los medios de generación, transmisión y distribución existentes, además de seleccionar de los recursos energéticos disponibles para la utilización en centrales generadoras y aplicar nuevas tecnologías en la interconexión de los sistemas eléctricos. Lo que propició la aplicación de economías de escala, con lo que se abatieron los costos de inversión y operación, así como se redujeron las necesidades de reserva para el mantenimiento y conservación del fluido eléctrico, lo que logró mayor confiabilidad y rendimiento.

Al expandirse los sistemas eléctricos durante el proceso de interconexiones entre centrales y áreas anteriormente aisladas, se presentó la necesidad de aprovechar racionalmente las instalaciones a fin de garantizar el máximo rendimiento de la infraestructura. Para tal objeto, se organizaron grupos de operación responsables de coordinar y ejecutar las actividades necesarias tendientes a mantener la continuidad, la calidad tanto en el voltaje como en la frecuencia y la economía del servicio con la máxima seguridad.

Con base en principios técnico-económicos y con el fin de integrar bajo una misma dirección y por ende, incrementar la eficiencia en la administración del despacho de carga utilizando metodología uniforme, a partir de 1962 se funda la Oficina Nacional de Operación de Sistemas y en razón de la

evolución del sistema en 1976, se crea el Despacho Nacional de Carga, como órgano coordinador responsable de las oficinas de operación del sistema eléctrico de todo el país, con el objeto fundamental de operar la red de todo el territorio nacional, aplicando las medidas necesarias para mantener el suministro de energía eléctrica en forma continua, con óptima calidad, seguridad de los sistemas y al mínimo costo de generación, dentro de las normas establecidas [3].

### 1.3. Centro Nacional de Control de Energía.

En 1977 el Despacho Nacional de Carga cambió su denominación por Centro Nacional de Control de Energía, para transformarse en 1994 en Coordinación con la función básica de dirigir la operación y supervisión de la infraestructura eléctrica propiedad de CFE, para garantizar como fin último la prestación del servicio público de energía eléctrica a los usuarios con seguridad, calidad, continuidad y economía.

Derivado de las recientes modificaciones constitucionales referente a la reforma energética en el año 2013, en forma particular las mencionadas en la Ley de la Industria Eléctrica, el 28 de agosto de 2014 se crea como un organismo público descentralizado de la Administración Pública Federal el Centro Nacional de Control de Energía (CENACE), sectorizado a la Secretaría de Energía, con personalidad jurídica y patrimonio propios. Tiene a su cargo el control operativo del Sistema Eléctrico Nacional, la operación del Mercado Eléctrico Mayorista y el acceso abierto no indebidamente discriminatorio a la Red Nacional de Transmisión y las Redes Generales de Distribución, para garantizar la operación del referido Sistema en condiciones de eficiencia, calidad, confiabilidad, continuidad, seguridad y sustentabilidad.

CENACE administra la gestión y despacho de las plantas de generación eléctrica que opera CFE y las empresas privadas, las subestaciones eléctricas y todas las redes de transmisión y distribución que existen en el país, para asegurar de que primero se despachara la energía eléctrica barata y hasta el final la de mayor costo [3].

### 1.4. Despacho económico óptimo.

La situación del Despacho Energético Óptimo (DEO), consiste en satisfacer una determinada demanda prevista de energía eléctrica, buscando minimizar en un período definido en la medida de lo posible los costos de; producción, transmisión y distribución, considerando las restricciones; operativas, de transporte y calidad, a partir de un conjunto de generadores eléctricos.

Con base a la demanda de energía eléctrica a satisfacer, se debe calcular la entrega de energía por las distintas centrales de generación en cada intervalo de tiempo dentro de un horizonte definido en tiempo mayor, donde se busca optimizar los recursos disponibles con un determinado objetivo que generalmente es buscar el mayor beneficio económico, al mismo tiempo cumplir con los requisitos de calidad de servicio y las restricciones operativas definidas. La optimización en el despacho se puede abordar en distintas vertientes en relación a su función objetivo, como ejemplo tenemos los casos que se mencionan a continuación [4]:

1. El horizonte de tiempo a considerar depende del tipo de estudio que se realice, por ejemplo, para la toma de decisiones de inversión en la expansión del sistema que es largo plazo (10 a 20 años), mientras para la planificación de la operación del sistema que es a mediano plazo (de algunos días a meses).

2. Para el caso particular de generación hidráulica, donde influye el almacenamiento del agua, la decisión del uso de la misma, producir en un momento dado, supone considerar no sólo la reducción del costo de operación en el instante que se utiliza, sino también el aumento de costos que el uso actual del agua puede ocasionar en el futuro por no disponer de ella, lo que introduce una vinculación en el tiempo, entre el presente y el futuro, de forma que el problema de optimización no se puede plantear en forma separada para cada paso de tiempo y la solución óptima es un equilibrio entre el beneficio presente del uso del agua y el beneficio futuro de su almacenamiento.
3. El costo del déficit de energía o de falla, es un concepto relevante considerar, así la falla se puede analizar desde dos puntos de vista; la falta de potencia que se relaciona con la imposibilidad de atender un pico de demanda o interrupciones de corta duración, como es el arranque en procesos industriales o atención en hospitales, puede afectar actividades críticas con consecuencias muy relevantes; la falta de energía que está asociada a la interrupción del suministro durante un período considerable como son los cortes de suministro por varios días en determinados horarios.
4. Otra situación que incrementa la complejidad del análisis, se presenta cuando los datos de entrada presentan incertidumbre como son las variables estocásticas, como son los procesos variantes en el tiempo, como son entre otros:
  - Comportamiento de la demanda,
  - Los aportes de agua en hidroeléctricas,
  - El viento en plantas eólicas,
  - La disponibilidad de máquinas.

Para el tratamiento de la incertidumbre en los modelos, generalmente se realizan predicciones a través de modelos específicos que se incorporan a los modelos del despacho, que su funcionamiento ya fue probado en optimización determinística.

### 1.5. Generación distribuida.

En los últimos años, se está prestando mayor atención al desarrollo de fuentes de energía renovables, tales como la energía eólica y la energía solar debido a los efectos globales de los problemas ambientales y de energía, adicional a lo complicado que se está presentando en la transmisión de la energía en la modalidad de generación centralizada, así como la liberación de los mercados energéticos y en este nuevo contexto se presentan nuevas necesidades como;

- Adecuar la oferta de productos energéticos a la cobertura de necesidades, mejorando la fiabilidad del suministro de electricidad,
- Fomentar la energía generada por fuentes renovables y respetuosas con el medio ambiente, incrementando su aportación al balance energético,
- Mejorar la eficiencia de uso de los productos energéticos,
- Minimizar el impacto ambiental de nuestro consumo energético, contribuyendo a la reducción de las emisiones de polución.

Así surge el concepto de Generación Distribuida (GD), conocida también como, generación in-situ, embebida, descentralizada o dispersa, que consiste básicamente en la generación de energía eléctrica por medio de muchas pequeñas fuentes de energía en lugares lo más próximos posibles a las cargas con la configuración de micro-redes o redes locales. Lo que presenta las siguientes ventajas:

- Facilidad en la ubicación para instalación de generadores,
- Menores montos de inversión,
- Menor tiempo de construcción (modularidad),
- Reducir costos y restricciones por transmisión,
- Uso de fuentes alternas y ‘limpias’,
- Disminuir la dependencia de los combustibles fósiles y
- Diversificación de mercado, entre otras.

Con el desarrollo de la filosofía en la técnica de generación distribuida, las micro-redes proporcionan una alternativa efectiva y sustentable para el uso integral de las energías renovables.

En este sentido, la Alianza Mundial por la Energía Descentralizada (WADE del inglés: World Alliance for Decentralized Energy) fundada en 1997, se formó en respuesta a las reuniones en Kyoto para conseguir los objetivos de cogeneración incluidos en la agenda y en 2002 la organización cambió su nombre y amplió su ámbito para incluir todas las formas de energía descentralizada o generación distribuida incluyendo tecnologías renovables tales como la energía solar fotovoltaica y pequeños sistemas de energía eólica, entre otros [5].

#### 1.6. Planteamiento del problema.

Derivado de las modificaciones a la Ley de la Industria Eléctrica en el sentido a la apertura de los mercados en la producción y suministro [6], así como el inminente desarrollo de las redes inteligentes [7], que integran una diversidad de servicios al consumidor que conlleva la necesidad de un administrador que cuente con una gama de herramientas para cumplir con su función en la micro-red, aunado a las políticas de conservación del medio ambiente [8].

En este contexto de tendencia en la tecnología [9], se infiere que una de las herramientas que el administrador de la micro-red necesita, es el procesar la información de demanda energética que deberá atender, para definir en forma óptima las fuentes que debe utilizar para el suministro cumpliendo con los requisitos técnicos, de calidad, de ambiente y de rentabilidad.

#### 1.7. Objetivo general.

Aplicar un modelo de programación matemática en una función mono-objetivo, multi-variable mediante software especializado, para la minimización de costos de despacho y de regeneración de emisión de contaminantes, en micro-redes de energía eléctrica con corriente alterna que utilicen fuentes alternas de generación.

#### 1.8. Objetivos específicos.

- Seleccionar un caso de estudio que aplique las condiciones de operación de una micro-red con fuentes alternas de energía.
- Definir el modelo matemático de la función a optimizar en el caso de estudio planteado, con base a la literatura técnica y científica actual.
- Seleccionar la propuesta de programación matemática que se adecue a los requerimientos de funcionamiento del caso de estudio planteado en el presente trabajo.
- Establecer las condiciones propias o limitantes que debe considerar la búsqueda de optimalidad de la solución del caso planteado, así como las consideraciones técnicas asumidas.

- Definir los rangos de valores en los que operará el sistema planteado para obtener la optimización de la función de costo incluyendo el factor por recuperación de emisión de contaminantes.
- Definir la metodología para el análisis y aplicación del programa desarrollado a diversos casos particulares que puedan considerarse en la configuración del caso de estudio.

### 1.9. Análisis bibliográfico.

De la literatura consultada se encontró que existe gran cantidad de información resultado de la investigación y en algunos casos de la aplicación, sobre diversas ramas de estudio en el campo de despacho con el concepto de generación centralizada, que se le puede calificar como tradicional. Así, derivado de la apertura global de los mercados en el sector energético que se ha acelerado durante la última década, aunado a la integración de servicios en la misma red, motivó el surgimiento del nombre de redes inteligentes, que en el suministro de energía se acompaña del concepto de la generación distribuida o micro-redes locales [10] [11] [12].

Por otro lado, en el concepto de la optimalidad de funciones, se encontró suficiente información bien definida para el caso de las funciones lineales, cuadráticas y no lineales, además para los casos del resto de funciones no lineales, existe amplia gama de investigación y evaluación de algoritmos basados en diversas heurísticas de búsqueda de valores óptimos que su eficiencia depende del análisis de la función de costo, así como de la orientación del problema en particular [13] [14] [15].

### 1.10. Organización de la tesis.

Al inicio de la presente tesis se muestra el contexto global como introducción en el capítulo 1, en el capítulo 2 se presenta la base fundamental del concepto matemático que soporta y explica el proceso medular de la investigación, en el capítulo 3 se explica el aspecto de ingeniería tanto eléctrica para la generación de energía como para la atención de demanda, además el aspecto de la regeneración de polución y en el capítulo 4 se presenta el caso de estudio que en su configuración se analiza el modelo matemático en una óptica general y se aterriza en el cálculo en la aplicación del caso particular del que se muestran los resultados.

# Capítulo 2 Fundamento teórico

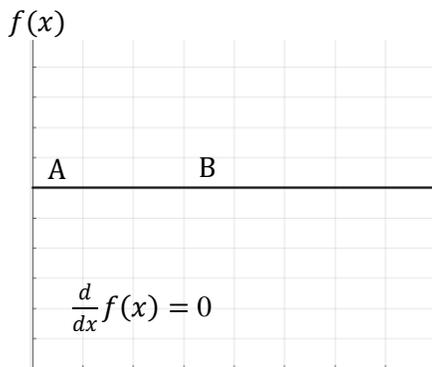
## 2.1. Valores extremos.

En optimización, los valores máximos y mínimos que puede tener una función, conocidos generalmente como extremos de una función, son las cantidades que toma la función en un intervalo de estudio, donde a los de mayor valor se les conoce como máximos y a los de menor valor se les denominan mínimos. En este contexto, un objetivo básico de las matemáticas con aplicación a una tarea definida es encontrar estos valores, ya sea sujeto a ciertas restricciones o no restringido y se le conoce como optimización matemática [16].

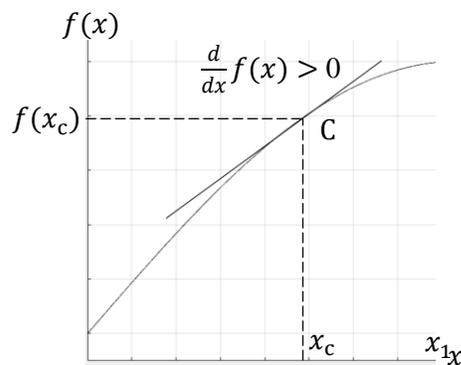
### 2.1.1. Prueba de la primer derivada.

La primer derivada de una función tiene las siguientes propiedades:

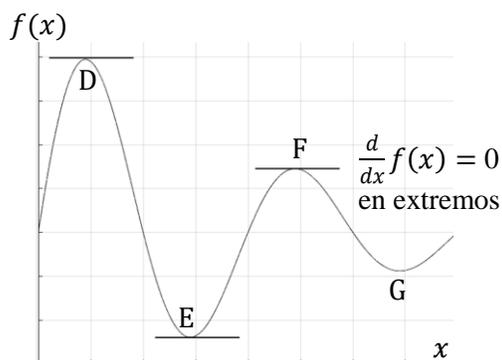
$$\left. \begin{array}{l} f'(x_i) > 0 \\ f'(x_i) < 0 \end{array} \right\} \text{Significa que } f(x) \text{ tiende a } \begin{cases} \text{Incrementar} \\ \text{Decrementar} \end{cases} \quad \dots(2.1)$$



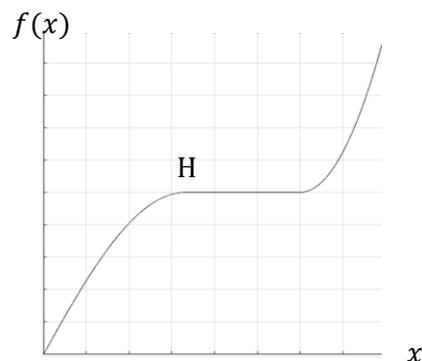
2.1.1 Función constante.



2.1.2 Función sin extremos.



2.1.3 Función con extremos.



2.1.4 Función creciente sin extremos.

Figura 2.1 Funciones y extremos

Cualquier punto en el espacio  $\mathbb{R}^n$  en el que la derivada de una función es cero se llama punto estacionario, de tal manera que el valor de la función no aumenta ni disminuye. Al observar las funciones mostradas en la figura 2.1, se percibe que las dos primeras funciones no tienen algún valor estacionario, en el caso de la función en la figura 2.1.1 su valor es constante, mientras que en la figura 2.1.2 su valor aumenta en forma desacelerada. Así se tiene que el primer caso tiene una derivada cero y el segundo caso tiene una derivada positiva y se puede considerar que la primera tiene un número infinito de puntos estacionarios mientras que la última no tiene puntos estacionarios en la región de estudio de  $x$ .

De la figura 2.1.2 se dice que en el intervalo  $[0, x_1]$ , la función tiene dos valores extremos; un valor mínimo relativo de cero en  $x = 0$  y un máximo relativo de  $f(x)$  en  $x = x_1$ . Dichos puntos representan extremos locales o relativos, ya que son extremos en la vecindad inmediata de los puntos, sin embargo la derivada de la función en estos puntos extremos no es cero. Por lo tanto, si el valor máximo o mínimo de una función se determina en un espacio limitado por algunas restricciones, que en este caso  $0 \leq x \leq x_1$  la derivada de la función en valores extremos puede no ser igual a cero.

De la simple inspección visual de la función en la figura 2.1.3, se detecta la existencia de valores extremos en los puntos D, E, F y G, que representan extremos locales o relativos en su vecindario inmediato y así se afirma que en un punto extremo  $f'(x) = 0$  y por lo tanto es un punto estacionario. De esta condición para los extremos se denomina condición de primer orden. Si bien esta es una condición necesaria para un extremo, no es una condición suficiente debido a lo siguiente.

Del caso de la figura 2.1.1 que tiene una derivada cero en los puntos A y B, como la primera derivada es cero, son puntos estacionarios pero también son puntos extremos. Por otro lado, en la figura 2.1.4, el punto H es un punto de inflexión, que es estacionario pero no es un punto extremo. Por consiguiente, se confirma que todos los puntos donde la derivada es cero son puntos estacionarios, pero no todos los puntos estacionarios son necesariamente puntos extremos. Los puntos extremos locales o relativos D, E, F y G la Figura 2.1.3 no garantizan un extremo global en todo el rango del eje  $x$ , aunque podría ser el caso. Un mínimo local o un máximo en el vecindario inmediato es denominado un extremo relativo. Sin embargo los puntos D y E de la figura 2.1.3 se consideran un máximo y mínimo global respectivamente sólo en el rango del espacio unidimensional  $x$  tratado en la figura, ya que el valor de la función en E es menor que en cualquier otro caso y el valor de la misma función en D es mayor que en cualquier otro caso.

Así la condición de la primer derivada para la extrema relativa es:

- Un punto  $x$  es un mínimo relativo si  $f'(x)$  cambia el signo del valor negativo a la izquierda inmediata de  $x$  a un valor positivo a la derecha inmediata de  $x$ .
- Un punto  $x$  es un máximo relativo si  $f'(x)$  cambia de signo de valor positivo a la izquierda inmediata de  $x$  a un valor negativo a la derecha inmediata de  $x$ .
- Un punto  $x$  no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo si  $f'(x)$  tiene el mismo signo en la izquierda inmediata e inmediata derecha de  $x$ .

Por consiguiente, además de la condición de primer orden necesaria se necesita determinar una condición suficiente para identificar puntos extremos. Así al examinar una prueba relacionada con la propiedad de la segunda derivada que se puede utilizar como una condición suficiente para definir un valor extremo.

### 2.1.2. Prueba de la segunda derivada.

Dado que la propiedad de la segunda derivada es:

$$\left. \begin{array}{l} f''(x_i) > 0 \\ f''(x_i) < 0 \end{array} \right\} \text{Significa que la pendiente de } f(x) \text{ tiende a } \begin{cases} \text{Incrementar} \\ \text{Decrementar} \end{cases} \dots(2.2)$$

La prueba para el extremo relativo de la segunda derivada es como sigue,

Si se satisface la condición necesaria  $f'(x) = 0$  en  $x$ , entonces el valor de la función será un máximo relativo si el valor de la segunda derivada evaluada en  $x$ ,  $f''(x) < 0$  y se tendrá un mínimo relativo si la segunda derivada  $f''(x) > 0$  en  $x$ . Esta prueba de suficiencia excluye el punto de inflexión del tipo mostrado en la figura 2.1.4. Sin embargo, la prueba no es decisiva para el punto de inflexión porque ambas derivadas, la primera y la segunda son cero. La segunda prueba derivativa puede ser indecisa para algunas funciones sin un punto de inflexión.

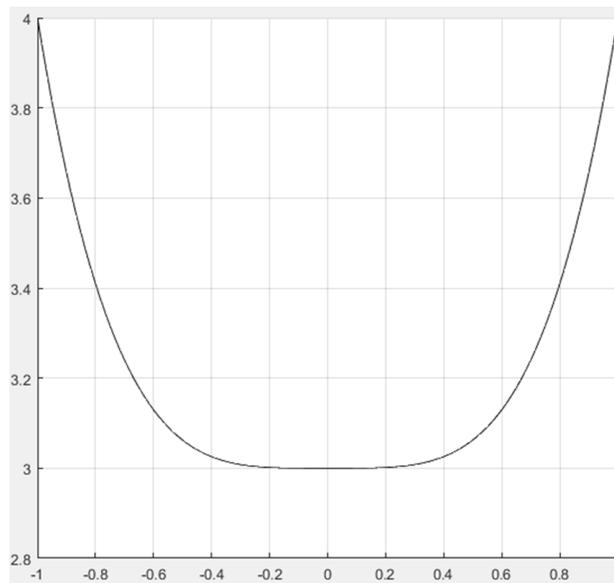


Figura 2.2 Función con extremos

### 2.1.3. Condiciones necesarias y suficientes.

En conclusión un extremo relativo debe estar en un punto estacionario  $f'(x) = 0$ , pero puede ser un extremo relativo o un punto de inflexión. Para determinar si el punto es un máximo o mínimo relativo, se puede aplicar la segunda prueba de derivada. Por lo tanto,  $f'(x) = 0$  es una condición necesaria para extremo, llamada la condición de primer orden, pero esto no es suficiente porque no descarta la posibilidad de puntos de inflexión. Un signo positivo o negativo distinto de cero en  $f''(x)$  es suficiente para determinar si el punto estacionario bajo examen es un mínimo o máximo relativo. Esta última prueba se denomina condición de segundo orden. Si  $f''(x) = 0$ , se deben verificar las derivadas de orden superior para determinar si es un punto extremo o un punto de inflexión que puede ser una ensilladura en  $n$  dimensiones. Afortunadamente para la mayoría de los problemas prácticos, la prueba de la segunda derivada puede dar respuestas satisfactorias [17].

## 2.2. Funciones cóncavas y convexas.

De acuerdo con [18], una función es cóncava cuando dados dos puntos cualesquiera en el dominio, el segmento que los une queda por debajo de la curva de la función, como se representa en la figura 2.3, que nos lleva a que la función es cóncava en el intervalo  $(x_1, x_2)$ , si para todo punto  $x$  del intervalo, la recta tangente  $l(x)$  en ese punto queda por encima de la función  $f(x)$ .

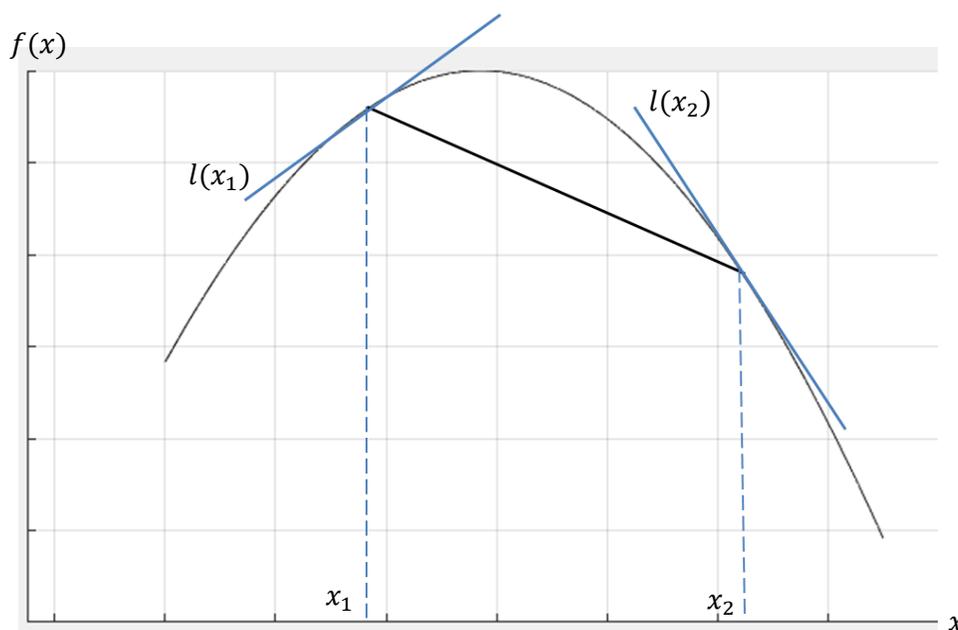


Figura 2.3 Ejemplo de una función cóncava.

Así, una función real  $f$  diferenciable y definida es cóncava en un intervalo, si para dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ , además para cualquier  $x$  definidas en su dominio  $C$  se cumple,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \dots(2.3)$$

En complemento al concepto anterior, se tiene la función diferenciable y convexa si dada una recta tangente  $l(x)$  a  $f(x)$  se cumple con (2.4),

$$l(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \dots (2.4)$$

Y la función no toma valores menores a los de la recta tangente, es decir  $l(x) \leq f(x)$ , lo que indica que la función es creciente a tasa decreciente por lo que  $f''(x) \geq 0$ . De lo que se concluye (2.5) y se ejemplifica en la figura 2.4.

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \dots (2.5)$$

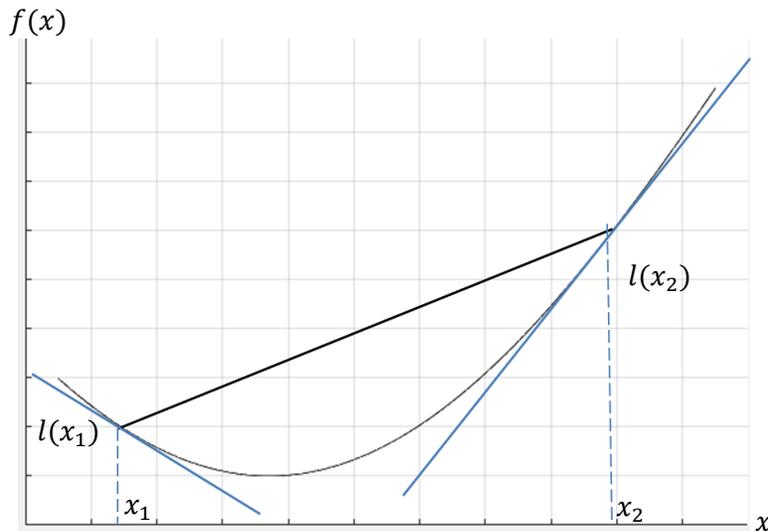


Figura 2.4 Ejemplo de una función convexa.

## 2.3. Programación lineal.

### 2.3.1. Modelo general.

Se utiliza un programa lineal para resolver un problema de optimización de una función lineal bajo restricciones lineales y las ecuaciones de dicho modelo matemático constituyen la base de la solución de problemas de optimización con respecto a aplicaciones prácticas a problemas del mundo real y con orientación a otros problemas de optimización, ya que a menudo pueden ser aproximados y analizados a través de programas lineales. Se entiende como programación lineal cuando se tiene un problema de optimización que se presenta en la forma [19].

$$\begin{aligned} & \text{máx } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a. } & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad \dots (2.6)$$

Donde  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{c} = (c_j) \in \mathbb{R}^n$ , son parámetros que determinan las condiciones particulares del problema a resolver. El elemento  $\mathbf{x} \in \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , es una solución factible y  $\mathbf{P}$  se llama el conjunto factible del problema.

### 2.3.2. Dualidad.

Maximizar la función  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  es equivalente a minimizar la función  $-f(\mathbf{x}) = (-\mathbf{c})^T \mathbf{x}$ , por lo tanto, la programación lineal también se puede plantear como el problema de minimizar una función lineal bajo restricciones lineales. Así es posible definir el valor óptimo de (2.6) como:

$$z^* := \text{máx } \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \} \quad \dots (2.7)$$

En particular,  $z^* = -\alpha$  si  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$  y  $z^* = \alpha$  si  $\mathbf{P} \neq \emptyset$ , además  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  no está acotado desde “arriba” en  $\mathbf{P}$ . Así el valor óptimo de un problema de minimización se define de manera análoga.

Si  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0$ , entonces (2.6) tiene el valor óptimo  $z^* = -\alpha$ . Por lo tanto, se supone que  $\mathbf{P} \neq 0$  y se busca determinar  $z^*$  "dualmente" como el mejor límite superior posible para  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  en  $\mathbf{P}$ .

De las desigualdades implícitas de la forma general, para  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \geq 0$  tenemos la implicación,

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow [\mathbf{y}^T \mathbf{A}] \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{b} \quad \dots (2.8)$$

Sí  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  es tal que  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T$  se concluye que,

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow [\mathbf{y}^T \mathbf{A}] \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{b} \quad \dots (2.9)$$

Además,

$$\text{máx} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \} \leq \text{mín} \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \} \quad \dots (2.10)$$

De (2.10) en asociación con (2.6) el problema de optimización adopta la forma,

$$\begin{aligned} & \text{mín} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s. a.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots (2.11)$$

El problema de programación lineal de (2.11) se denomina dual del problema original que en este contexto se conoce como problema primario (2.6).

De [19] se muestra la "Dualidad débil" y supone que  $\mathbf{x}$  es factible para (2.6) e  $\mathbf{y}$  es factible para (2.11), entonces  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , en consecuencia si  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$  además se cumple tanto  $\mathbf{x}$  como  $\mathbf{y}$ , en consecuencia son soluciones óptimas.

Por definición, el problema de optimización (2.11) es también un programa lineal porque es equivalente a un problema de la forma (2.6) y al reescribirlo se tiene (2.12)

$$\begin{aligned} \text{s. a.} \quad & \text{máx} -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & -\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{c} \\ & -\mathbf{I} \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots (2.12)$$

No hay diferencia esencial entre los programas lineales "primitivo" y "dual", ya que cada problema "primario" es equivalente a su problema dual, de hecho al asociar las variables  $\mathbf{u}$  con las filas de  $\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{v}$  con las filas de  $-\mathbf{A}^T$  y  $\mathbf{s}$  con  $\mathbf{I}$ , obtenemos como dual formal de (2.12) la expresión (2.13),

$$\begin{aligned} \text{s. a.} \quad & \text{mín} \mathbf{c}^T \mathbf{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{v} \\ & \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{I} \mathbf{s} = -\mathbf{b} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots (2.13)$$

Si se introduce el vector no restringido  $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  y  $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ , la expresión (2.13) se convierte en (2.6).

### 2.3.3. Poliedro de solución.

La geometría de los sistemas lineales bajo estudio, sugiere buscar la solución óptima de un programa lineal en el conjunto de vértices de su región de viabilidad que se obtiene al resolver la expresión  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , lo que motivó el método simplex que sugiere un poliedro n-dimensional, por lo que se investigan los candidatos para los subsistemas de definición de vértices del conjunto de restricciones y si al evaluar al candidato se produce una solución primaria y dual factible, se ha encontrado la solución óptima deseada. De lo contrario, pasamos a un candidato relacionado y se repite el proceso hasta que el problema se resuelva, así el método simplex siempre terminará con soluciones óptimas tanto para el problema primario como para el dual si tales soluciones existen en absoluto. Para la discusión del método simplex, se asume que el programa lineal primario que se presenta en forma estándar presentada en (2.14) y que el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene rango completo, con lo que permanece la generalidad ya que la eliminación de las ecuaciones linealmente dependientes no afecta al espacio de solución [20].

$$\begin{array}{ll} \text{s. a.} & \begin{array}{l} \text{mín } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \text{ Asociado con el dual} & \text{s. a.} & \begin{array}{l} \text{máx } \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array} & \dots (2.14) \end{array}$$

### 2.3.4. Métodos de solución de Programación lineal.

En la solución de los problemas de programación lineal se han desarrollado algunos algoritmos como son [20]:

#### 2.3.4.1. Método simplex.

Con el método simplex se obtiene una solución óptima siguiendo una ruta de puntos extremos adyacentes, a lo largo de las orillas del espacio de soluciones. Aunque en la práctica el método simplex ha funcionado bien para resolver problemas grandes, la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la solución óptima puede crecer en forma exponencial. De hecho, se han desarrollado una clase de programas lineales en los que todos los puntos extremos factibles se visitan antes de llegar al óptimo. N. Karmarkar desarrolló en 1984 un algoritmo polinomial que cruza el interior del espacio de soluciones que es eficaz para programas lineales extremadamente grandes.

#### 2.3.4.2. Algoritmo del punto interior legado.

El método del punto interior legado se basa en LIPSOL (Linear Interior Point Solver [21]), que es una variante del algoritmo predictor-corrector de Mehrotra que consiste en un método primal-dual de punto interior. Se produce una serie de pasos de pre-procesamiento antes de que el algoritmo comience a iterar. La primera etapa del algoritmo implica el pre-proceso acumulativo de las restricciones para definir la existencia de soluciones factibles, así analiza las condiciones de igualdad, los límites de  $\mathbf{x}$ , de tal forma que exista las soluciones múltiples. Al terminar el pre-procesamiento, la parte iterativa del algoritmo inicia hasta que se cumplen los criterios de parada en cuanto a residuos, cantidad de iteraciones, entre otros.

#### 2.3.4.3. Algoritmo del punto interior.

Existen diversas versiones de algoritmos del punto interior derivados del trabajo de Karmarkar, que surgen como una alternativa a la complejidad polinomial del método SIMPLEX para el caso de

programación lineal. En 1987 Kojima-Misuno-Yoshise presentan un algoritmo de puntos interiores, llamado primal-dual o de seguimiento de camino, en forma posterior Mehrotra en 1992, establece las bases para algoritmos con mayor eficiencia en programación lineal. En la literatura existen diferentes formulaciones sobre los algoritmos de puntos interiores tipo primal-duales extensa y variada, con diversos resultados de convergencia y complejidad, así como varias extensiones a los casos de programación cuadrática, al problema de complementariedad monótono y al caso de programación no lineal general [22].

Así la generalidad de este método, se inicia con cualquier punto interior no extremo en el espacio factible  $\mathbf{C}$ . Se analiza el gradiente de la función objetivo a maximizar  $z = x_1$  en  $\mathbf{C}$  y se elige la dirección de aumento más rápido de  $z$ , para ubicarse a lo largo del gradiente y proyectar perpendicularmente sobre el espacio factible, para obtener un nuevo punto con mejor valor objetivo  $z$ . Así al moverse en la dirección del gradiente proyectado se obtiene mejora, ahora se repite el procedimiento en la siguiente variable para determinar un nuevo punto más cercano al óptimo, lo que hará que encontremos el punto óptimo con mayor rapidez en el caso general n-dimensional, lo que se logra con el algoritmo del punto interior de Karmarkar.

#### 2.3.4.4. Algoritmo simplex doble.

El algoritmo inicia pre-procesando para reducir el problema de programación lineal original a la forma de la ecuación,

$$\min_x f^T \mathbf{x} \text{ tal que } \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{cases} \quad \dots (2.15)$$

$\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  son versiones transformadas de las matrices de restricción originales como problema primario y para la forma del problema dual se requiere encontrar los vectores  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{w}$ , además del vector variable de holgura  $\mathbf{z}$  que resuelve la ecuación (2.16),

$$\max \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{u}^T \mathbf{w} \text{ tal que } \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{w} + \mathbf{z} = f \\ \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{w} \geq 0 \end{cases} \quad \dots (2.16)$$

Dado que cualquier solución finita del problema dual da una solución al problema primario, y cualquier solución finita del problema primario da una solución del problema dual. Ahora si el problema primario es ilimitado, entonces el otro problema es inviable. Por lo tanto si existe solución, los dos problemas son equivalentes en términos de obtener una solución finita. Debido a que los problemas primario y dual son matemáticamente equivalentes y que los pasos computacionales pueden diferir, entonces puede ser mejor resolver el problema primario resolviendo el problema dual.

La fase 1 del algoritmo dual simplex es encontrar un punto factible dual, resolviendo un problema de programación lineal auxiliar, similar al primer paso para el algoritmo simplex. Posteriormente como fase 2, se elige repetidamente una variable de entrada y una variable de salida, análogamente a la fase 2 para el algoritmo de simplex, tratando de mantener la factibilidad dual, mientras que reduce la inviabilidad primaria, hasta que la solución al problema reducido y perturbado sea tanto factible como dual factible. Si la solución al problema (modificado) es imposible al igual que al problema no perturbado (original), entonces el solucionador restaura la factibilidad dual usando algoritmos simplex primario o fase 1.

### 2.3.4.5. Método de conjunto activo.

El algoritmo 'active-set' utiliza un método de conjunto activo y es en consecuencia, una variación del método simplex para la programación lineal, busca la solución factible inicial resolviendo primero otro problema de programación lineal.

## 2.4. Programación cuadrática.

### 2.4.1. Modelo.

Un problema de programación cuadrática es aquél que en su estructura contiene una función objetivo de forma cuadrática y sus restricciones de forma lineal. Bajo esta tesis, la optimización cuadrática considera el problema bajo restricciones de igualdad lineal,

$$\text{mín } \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \text{ sujeto a } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (2.17)$$

Donde;  $\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  que constituyen los parámetros del problema. Si la matriz  $\mathbf{Q}$  es positiva definida, podemos resolver (2.17), al definir para cualquier  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  un producto interior  $\mathbf{Q}$  y una norma de  $\mathbf{Q}$ ,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} \text{ y } \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}} = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})_{\mathbf{Q}}} \quad \dots (2.18)$$

Con la definición de (2.18) se busca un elemento con norma mínima de  $\mathbf{Q}$  en el sub-espacio afín con  $L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ . Ahora si se calcula una solución factible  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  para  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  se obtiene una representación  $L = \mathbf{p} + \ker \mathbf{A}$  y al minimizar  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}$  sobre  $L$  se convierte en la expresión (2.19) que es equivalente al problema de optimización cuadrática (2.17) [19].

$$\text{mín } \{\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{Q}} | \mathbf{w} \in \ker \mathbf{A}\} \quad \dots (2.19)$$

Al reescribir la definición de (2.17) y tomando las definiciones de las funciones involucradas se tiene (2.20),

$$\begin{aligned} \text{mín } f(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a. } h(\mathbf{u}) &:= \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{w} - \mathbf{b} = 0 \\ g(\mathbf{u}) &:= \mathbf{u} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots (2.20)$$

Donde,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  siendo una matriz dispersa y de rango completo,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positivo semi-definida,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de incógnitas,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$  variables de holgura y  $\mathbf{u} := (\mathbf{w}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Y la función Lagrangiano asociada con (2.20) determinará los posibles estados del sistema en función de las variables de estudio sobre el espacio disponible y nos definirá las ecuaciones de movimiento de la función en estudio.

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{z}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T (\mathbf{b} + \mathbf{w} - \mathbf{A} \mathbf{x}) - (\mathbf{z}_1, \mathbf{z})^T \mathbf{u} \quad \dots (2.21)$$

Adicionalmente su gradiente definirá la velocidad de cambio en función de las variables de interés y será,

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, z, z_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{y} - z_1 \\ \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} - z \end{pmatrix} \quad \dots (2.22)$$

De las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de (2.20) se tiene [23],

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - z_1 &= 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} - z &= 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w} - \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{Z}\mathbf{X}_e &= 0 \\ \mathbf{Z}_1 \mathbf{W}_e &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2.23)$$

De la teoría de multiplicadores de Lagrange [23], se toma que si existe un punto que satisfaga las ecuaciones (2.23), entonces  $\mathbf{u}$  es mínimo global del problema (2.20). Este resultado sigue del hecho de que  $\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{L}$  es una matriz positiva semi-definida y de la linealidad en las restricciones así como de la convexidad de  $f(\mathbf{u})$ . La existencia de la solución que satisface (2.23) es consecuencia de la linealidad de  $g(\mathbf{u})$  y  $h(\mathbf{u})$ , así como de suponer que el conjunto de puntos factibles es no vacío, es decir, que existe al menos un  $\mathbf{u} \geq 0$  tal que  $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w} - \mathbf{b} = 0$ . De esta forma se puede verificar que en el punto que se satisface la restricción de calificación de primer orden [15], con lo que se toma lo siguiente.

Sea  $\mathbf{u}_0$  un punto factible del problema (2.20), entonces, la restricción de calificación de primer orden se sostiene en  $\mathbf{u}_0$  si para todo vector no nulo  $\mathbf{s}$  tal que  $\mathbf{s}^T \nabla g_i(\mathbf{u}_0) \geq 0, \forall i \in B_0 = \{i : g_i(\mathbf{u}_0) = 0\}$  y  $\mathbf{s}^T \nabla h_j(\mathbf{u}_0) = 0, j = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{s}$  es tangente a un arco diferenciable emanado de  $\mathbf{u}_0$  contenido en la región de factibilidad.

#### 2.4.2. Algoritmo general.

Derivado del modelo definido en el punto 2.4.1, se enuncia el algoritmo general base del proceso iterativo de diversas formas de solución del problema (2.20) [14].

Sea  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \geq 0$  un punto inicial y  $k = 0$

- Paso 1. Si se satisface el criterio de parada. Parar
- Paso 2. Escoger  $\mu_k > 0$
- Paso 3. Determinar  $(\Delta\mu_k, \Delta v_k)$  como la solución de (2.20)
- Paso 4. Escoger  $\alpha_p, \alpha_d \in (0,1)$
- Paso 5. Hacer  $(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}) = (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + (\alpha_p \Delta\mu_k, \alpha_d \Delta v_k)$
- Paso 6. Hacer  $k = k + 1$  e ir al paso 1

#### 2.5. Programación no lineal.

La programación no lineal se caracteriza en forma similar a los casos de programación definidos en los puntos 2.3 y 2.4 descritos con anterioridad, en donde se busca un valor extremo de la función objetivo en estudio, sujeta a algunas limitaciones. Sin embargo en forma indistinta, la función objetivo, sus restricciones, o ambas pueden ser relaciones no lineales. En caso de que no existan restricciones, el problema se convierte en la búsqueda de valores extremos de una función no lineal

y el problema se denomina optimización sin restricciones y en caso de existir restricciones, el procedimiento se denomina optimización restringida. Así la solución del problema no lineal restringido se denomina generalmente programación no lineal y su estructura general se muestra en (2.24).

$$\begin{aligned}
 & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s. a.} \quad & g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{r}, \\
 & h(\mathbf{x}) = \mathbf{k}, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Donde,  $m$  representa el número de variables,  $n$  la cantidad de desigualdades que se representan como funciones  $g_1, g_2, \dots, g_n$  y  $p$  igualdades se representan como funciones  $h_1, h_2, \dots, h_p$ . A pesar de la similitud en la estructura con los problemas lineales, la característica de las no linealidades introducen una complejidad que hace una modificación directa de cualquier método de programación lineal y lo hace inadecuado e inoperante para la solución de los problemas no lineales y en consecuencia los algoritmos de solución incrementan su complejidad. La mayoría de los algoritmos para la solución de programas no lineales se basan en la expansión de funciones de Taylor [17] o conceptos como el gradiente y el Hessiano. Por otro lado, en la solución con equipo de cómputo, como regla general los problemas no lineales se resuelven mediante repetidas aproximaciones lineales o cuadráticas [24].

## 2.6. Optimización.

### 2.6.1. Clasificación.

La optimización matemática se descompone tradicionalmente en tres áreas aparentemente disjuntas: optimización lineal, optimización no lineal y optimización discreta o combinatoria. Sin embargo, un análisis detallado muestra que los problemas de optimización discreta son típicamente solucionables, aquellos que se pueden moldear en el marco de la optimización lineal [17].

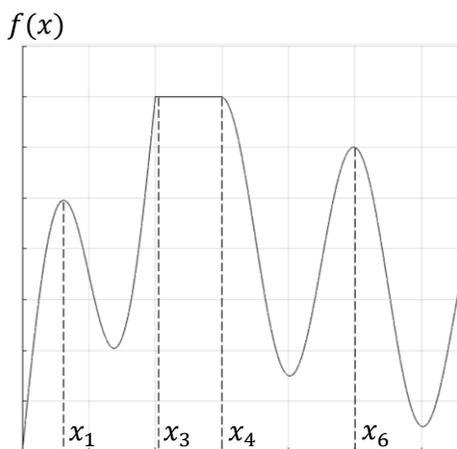


Figura 2.5.1  $f : [0,1]$  con máximos locales en  $x_1, x_3-x_4, x_6$

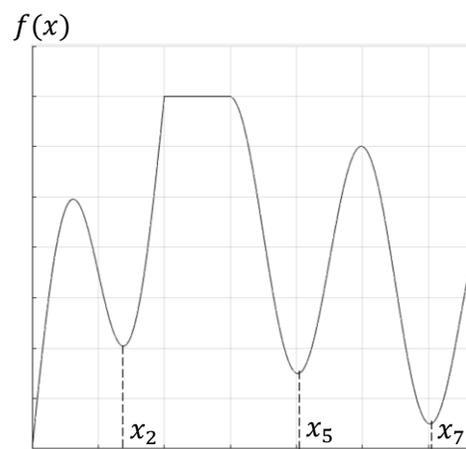


Figura 2.5.2  $f : [0,1]$  con mínimos locales en  $x_2, x_5, x_7$

Al considerar eficientemente una función diferenciable  $y = f(x)$ , se dice que  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$  si  $f(x_0) \geq f(x)$ , en la vecindad a  $x_0$  y en este sentido  $f$  tiene un mínimo local en  $x_0$  si  $f(x_0) \leq f(x)$ , para valores cercanos. El caso de máximos y mínimos globales, es decir los casos en que se analiza todo el espacio de estudio en torno a  $x_0$  se tiene que  $f(x_0) > f(x)$  para un máximo global y  $f(x_0) < f(x)$  para un mínimo global.

### 2.6.2. Criterios de optimalidad.

Finalmente, un criterio eficiente para la optimalidad de funciones será: asumiendo que  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dos veces continua y diferenciable, entonces  $f$  tiene un óptimo en  $x_0$  si se cumple cualquier par de condiciones de (2.25) o (2.26).

$$1. \text{ Condición de maximización } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \leq 0 \end{cases} \quad \dots (2.25)$$

$$2. \text{ Condición de minimización } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases} \quad \dots (2.26)$$

Consideraremos el caso de las funciones dos veces continuas y diferenciables de la forma  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Conceptualmente diremos que  $f$  alcanza un máximo local en  $\mathbf{x}_0$  si  $f$  no puede aumentar su valor más allá del valor que alcanza en  $\mathbf{x}_0$ . De manera más precisa, diremos que en torno a  $\mathbf{x}_0$  se tiene que  $f(\mathbf{x}_0 - he_j) \leq f(\mathbf{x}_0)$  y  $f(\mathbf{x}_0 + he_j) \leq f(\mathbf{x}_0)$  lo cual nos da la idea de que en una bola abierta de centro en  $\mathbf{x}_0$  y radio  $r$ ,  $f$  alcanza un máximo local en  $\mathbf{x}_0$  si  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ . Este máximo local es único si  $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ . Se tiene que  $f$  alcanza un máximo global en  $\mathbf{x}_0$ , si  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$ . Además este máximo global es único si  $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$ . Para el caso en que  $f$  tiene un mínimo local en  $\mathbf{x}_0$  si  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ . Este mínimo local es único si  $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ . Así se tiene que  $f$  alcanza un mínimo global en  $\mathbf{x}_0$  si  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$ , además este mínimo global es único si  $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$ . Es importante notar que claramente en todos los casos que hemos descrito  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}$  [17].

Para el caso de funciones de una variable, si se define  $g(t) = f(x + tv)$  con lo que ya se explicó se tendrá que  $f$  presenta un máximo global o local cuando  $g'(t) = 0$ , caso que se cumple cuando  $t = 0$ , optimiza la función  $g$  y en consecuencia  $f$  tiene un óptimo en  $x_0$ .

Las condiciones de segundo orden para el caso de varias variables son más complejas, por un lado se cumple la condición de segundo orden si  $g''(t) \leq 0$ , sin embargo la función  $g$  no está definida, por lo que se trata de un caso teórico. Un criterio eficiente se tiene con el uso de la matriz Hessiana de la función  $f$  de  $n$  variables, que es la matriz cuadrada de  $n \times n$ , de las segundas derivadas parciales.

Además, se tiene que si  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D$  un conjunto abierto y  $f$  clase  $\mathbf{C}^2$ , entonces la matriz Hessiana está bien definida y en virtud del teorema de Clairaut denominado teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas o teorema de Schwarz, la matriz es simétrica [23].

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad \dots (2.27)$$

La condición de primer orden para la optimalidad de  $f$  se define en (2.28).

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = \{1, \dots, n\} \quad \dots (2.28)$$

Al retomar  $g(t) = f(x + tv)$  donde  $v \in \mathbb{R}^n$  es una dirección hacia la cual nos podemos mover, en  $t = 0$ ,  $g(0) = f(x)$  y como  $g'(0) = 0$ . Derivando  $g(t) = f(x_0 + tv)$  con respecto a  $t$  se tiene (2.29),

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_0 + tv)}{\partial x_j} v_j \quad \dots (2.29)$$

Al evaluar en  $t = 0$ .

$$g'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} v_j = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \dots (2.30)$$

La condición de segundo orden para la optimalidad de  $f$  es la siguiente:

1. Para el caso de maximización si  $f$  alcanza un máximo local interior en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $Hf(\mathbf{x}_0)$  es semi definida negativa, cuando  $g''(t) = v^t Hf(\mathbf{x}_0) v \leq 0$ .
2. Para el caso de minimización si  $f$  alcanza un mínimo local interior en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $Hf(\mathbf{x}_0)$  es semi definida positiva, cuando  $g''(t) = v^t Hf(\mathbf{x}_0) v \geq 0$ .

Donde  $g''(t)$  es

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0 + tv)}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j \quad \dots (2.31)$$

Cuando  $f$  alcanza un óptimo local en  $\mathbf{x}_0$  y este es único, entonces  $Hf(\mathbf{x}_0)$  es definida negativa o positiva. Si  $Hf(\mathbf{x}_0)$  resulta negativa la función  $f$  es cóncava en  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , mientras que si  $Hf(\mathbf{x}_0)$  resulta positiva la función  $f$  es convexa en  $B(\mathbf{x}_0, r)$ . Cuando  $f$  es estrictamente cóncava en todo su dominio, entonces  $Hf(\mathbf{x}_0)$  resulta negativa en  $D$  y  $\mathbf{x}_0$  es un máximo global de  $f$  que además es único. Para el caso en que  $f$  es estrictamente convexa en todo su dominio, entonces  $Hf(\mathbf{x}_0)$  resulta positiva en  $D$  y  $\mathbf{x}_0$  es un mínimo global de  $f$  que además es único.

### 2.6.3. Multiplicadores de Lagrange.

En optimización, el método de los multiplicadores de Lagrange, es un procedimiento para encontrar los valores máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con  $n$  variables a uno sin restricciones de  $n + k$  variables, donde  $k$  es igual al número de restricciones y cuyas ecuaciones se pueden resolver con mayor

facilidad. Estas nuevas variables escalares desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange. El método dice que los puntos donde la función tiene un extremo condicionado con  $k$  restricciones, están entre los puntos estacionarios de una nueva función sin restricciones construida como una combinación lineal de la función y las funciones implicadas en las restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores [23].

Teorema de los multiplicadores de Lagrange, Suponga que tenemos una función diferenciable  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y que enfrentamos un problema de la forma,

$$\begin{array}{ccc} \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{máx}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{ó} & \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{mín}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Sujeto a } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c & & \text{s. a. } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \end{array}$$

Donde  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable.

Sea  $S$  el conjunto de todas las tuplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  factibles, es decir  $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D : g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c = 0\}$ . Suponga que  $\nabla g(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \neq 0$ . Si  $f(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s)$ , es decir considerando sólo pares factibles, tiene un óptimo local en  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in S$ ,  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  es solución del problema que se analiza.

Entonces existe un número real  $\lambda$  que se conoce como multiplicador de Lagrange, tal que  $\nabla f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = \lambda \nabla g(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  y el Lagrangeano es la función de  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda (g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c)$ .

Sí  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  es un máximo de  $f$  restringido a  $S$ , se cumple que  $\nabla f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = \lambda \nabla g(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  y para el mínimo  $-\nabla f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = \lambda \nabla g(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$

#### 2.6.4. Criterio de la segunda derivada para extremos con restricción.

Para el caso  $n$ -dimensional, partiendo de que  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son dos curvas suaves de clase  $\mathbf{C}^2$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D$  tal que  $g(\mathbf{x}_0) = c$  y sea  $S$  el conjunto de nivel de  $g$  con valor  $c$ . Se asume que  $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$  y existe un número real  $\lambda$  tal que  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ . Para la función auxiliar  $h = f - \lambda g$  construimos la matriz Hessiana limitada de (2.32) [17].

$$H|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\partial g}{\partial x_1} & \frac{-\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{-\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{-\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{-\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad \dots (2.32)$$

Se examinan los determinantes de las sub-matrices en la diagonal de orden mayor o igual a 3,

1. Si todos los determinantes son mayores que 0, tenemos un mínimo local en  $\mathbf{x}_0$ .
2. Si el primer sub-determinante de tamaño 3x3 es mayor que cero, el siguiente (el de 4x4) es menor que cero, y de esa manera los sub-determinantes van alternando su signo, tenemos un máximo local en  $\mathbf{x}_0$ .
3. Si todos los sub-determinantes son distintos de cero, pero no siguen ninguno de los dos patrones anteriores, tenemos un punto silla en  $\mathbf{x}_0$ .
4. Si no se da ninguno de los tres casos anteriores, el criterio no concluye nada.

En conclusión el teorema de multiplicadores de Lagrange provee condiciones necesarias para la optimización. Sin embargo, no es aplicable, cuando todas las funciones involucradas son lineales. Por otro lado, existe un problema con este método que se presenta en los casos con soluciones múltiples interiores y de esquina para las cuales el teorema no es aplicable [23].

Algunos problemas de optimización no se pueden resolver mediante este método, por ejemplo el de las funciones  $\min\{\alpha x_1, \beta x_2, \dots, \eta x_n\}$  u otras funciones no diferenciables. Surge un inconveniente adicional que para algunos problemas los multiplicadores se anulan.

#### 2.6.5. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se refieren a los requerimientos necesarios y suficientes para que la solución de un problema de programación matemática sea óptima. Es una generalización del método de los Multiplicadores de Lagrange.

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, considera igualdades y desigualdades. Partiendo de las funciones diferenciables  $f, g_i, h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \forall i = \{1, \dots, k\}, j = \{1, \dots, m\}$  y asume que  $f$  y  $h_j$  son funciones cóncavas  $\forall j = \{1, \dots, m\}$  y consideremos la estructura de optimización descrita por (2.33) [17].

$$\begin{aligned} & \text{máx}_x f(x) \\ \text{s. a. } & g^i(x) = 0 \quad \forall i = \{1, \dots, k\} \\ & h^j(x) \geq 0 \quad \forall j = \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad \dots (2.33)$$

Que puede resolverse mediante la función Lagrangeano,

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g^i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h^j(x) \quad \dots (2.34)$$

Si  $f$  alcanza un máximo local en  $\mathbf{x}_0 \in S$ , una condición necesaria para que  $\mathbf{x}_0$  sea solución del problema es que existan  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{k+m}$ , que corresponde a una familia de multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker asociados con  $\mathbf{x}_0$  tales que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \lambda, \mu) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}_0) = 0 \\ g^i(\mathbf{x}_0) &= 0 \quad \forall i = \{1, \dots, k\} \\ \mu_j h^j(\mathbf{x}_0) &= 0 \quad \forall j = \{1, \dots, m\} \\ \mu_j &\geq 0 \quad \forall j = \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad \dots (2.35)$$

Además, si  $h^j(\mathbf{x}_0) > 0$  entonces  $\mu_j = 0$  de forma tal que si  $h^j(\mathbf{x}_0) = 0$  entonces  $\mu_j > 0$  por lo que en la tercera condición, uno y sólo uno de los términos de la multiplicación se anula. Cuando  $f$  es estrictamente cóncava las condiciones descritas son suficientes para que  $\mathbf{x}_0$  sea mínimo de  $f$  en  $S$ .

## 2.7. Técnicas de optimización.

### 2.7.1. Requerimientos.

La factibilidad de solucionar un problema, es la definición de la existencia de alguna solución posible al margen de su valor objetivo, que se considera como el caso especial de la optimización matemática donde el valor objetivo es el mismo para toda solución y así cualquier solución es óptima. Muchos algoritmos de optimización necesitan partir de un punto factible y una vía para obtener tal punto es relajar las condiciones de factibilidad usando una variable de holgura que se minimiza hasta que dicha holgura sea nula o negativa.

Uno de los teoremas de Fermat asegura que los óptimos de los problemas irrestrictos son encontrados en los puntos estacionarios, como se mencionó en (2.25), (2.26) y (2.32), donde la primera derivada de la función objetivo es cero o su gradiente nulo. De forma más general, los puntos críticos se encuentran en donde la primera derivada o el gradiente de la función objetivo no está definido o en la frontera del conjunto de elección. El teorema de la envoltura describe como el valor de una solución óptima cambia cuando un parámetro subyacente varía. El proceso que computa este cambio es llamado estática comparativa y la continuidad de una solución óptima como una función de parámetros subyacentes.

La optimización es una disciplina científica que se ocupa de la búsqueda entre un conjunto de alternativas de solución a un problema, por otro lado, la optimalidad de las soluciones se basa en uno o varios criterios que dependen del análisis del problema y de la metodología o enfoque con que lo aborde el usuario.

Un problema puede admitir soluciones que se adhieren principalmente a las especificaciones fundamentales, así como a las diferentes expectativas operativas del decisor y las restricciones pueden ser planteadas por el usuario o el problema en sí, reduciendo así el número de posibles soluciones, por lo que si una solución satisface todas las restricciones, se la denomina solución factible y el problema de optimización global se refiere a encontrar la óptima. Sin embargo, esto no siempre es posible o necesario, de hecho, existen casos en que las soluciones sub-óptimas son aceptables, dependiendo de su calidad en comparación con la óptima. Esto se describe generalmente como optimización local, a pesar de que este mismo término se utiliza para describir la búsqueda local en una vecindad estricta del espacio de búsqueda.

Para la optimización se parte del modelo del sistema, teniendo en cuenta todas las restricciones subyacentes, así la función que describe el comportamiento a optimizar, se denomina función objetivo, que va acompañada de un dominio delimitado por restricciones, las que son cuantificadas y descritas mediante relaciones de igualdad y desigualdad y lo que se busca es la construcción de soluciones candidatas que se traducen en variables numéricas y generalmente se representan como vectores numéricos.

Para funciones objetivo que son al menos dos veces continuamente diferenciable su optimalidad se determina mediante los ceros de su gradiente y verificando que su matriz de Hesse resulte positiva en estos puntos. Aparentemente, esto no es posible para funciones que no cumplan con los supuestos matemáticos requeridos. En este último caso, el uso de algoritmos que aproximan la solución real es inevitable. Tales algoritmos trabajan iterativamente, produciendo una secuencia de puntos de búsqueda que tiene al menos una sub-secuencia que converge al óptimo buscado.

Actualmente, la diversidad en la naturaleza y las características matemáticas de los problemas de optimización que requirieron la especialización de algoritmos a categorías de problemas específicos que comparten propiedades comunes, tales como la no linealidad, la convexidad, la diferenciación, la continuidad y la exactitud de la evaluación de la función, entre otras. Por lo que se han desarrollado gran variedad de algoritmos establecidos para la mayoría de los problemas tipo, sin embargo diferentes instancias del mismo problema pueden tener requisitos computacionales diferentes, dejando espacio para el desarrollo de nuevos algoritmos y la mejora de los establecidos, en consecuencia existe necesidad continua de ideas nuevas y más sofisticadas en la teoría y las aplicaciones de optimización [20] [19] [25].

### 2.7.2. Categorización.

Una categorización simple de los problemas de optimización se presenta en los párrafos siguientes y se resume en la Tabla 2.2 [26].

Tabla 2.2 Clasificación de los problemas de optimización.

<b>Criterio de clasificación</b>	<b>Tipo de optimización</b>	<b>Características Especiales</b>
Forma de la función objetivo y/o restricciones	Lineal	Función objetivo y restricciones lineales.
	No lineal	Función objetivo y/o restricciones no lineales.
	Convexa	Función objetivo convexa y conjunto factible.
	Cuadrático	Función objetivo cuadrática y restricciones lineales.
Naturaleza del espacio de búsqueda	Estocástico	Ruido en la función objetivo o variables y/o parámetros del problema determinados probabilísticamente.
	Discreto	Variables discretas de la función objetivo.
	Continuo	Variables reales de la función objetivo.
Naturaleza del problema	Entero mixto	Variables reales y enteras en el modelo.
	Dinámico	Función objetivo que varía en función del tiempo.
	Multi-objetivo	Se tiene más de una función objetivo.

### 2.7.3. Técnicas de optimización.

Las diversas técnicas desarrolladas para resolver el problema de optimización, incluyendo métodos de optimización tradicionales y modernos, se pueden clasificar en tres grupos, como se muestra en la Tabla 2.3 [26].

Tabla 2.3 Clasificación de técnicas de optimización.

Clasificación	Método de enfoque
Convencional	Optimización sin restricciones.
	Programación lineal (LP).
	Programación no lineal (NLP).
	Programación cuadrática (QP).
	Método de Newton.
	Método de punto interior (IP).
	Programación entera mixta (MIP).
	Programación de flujo de red (NFP).
Búsqueda de inteligencia	Red neuronal (NN).
	Algoritmos evolutivos (EAs).
	Búsqueda de tabú (TS).
	Optimización de enjambre de partículas (PSO).
No cuantitativos con incertidumbre	Optimización probabilística.
	Aplicaciones de conjuntos difusos.
	Proceso analítico jerárquico (AHP).

## 2.8. Métodos convencionales.

### 2.8.1. Enfoque sin restricciones.

La mayoría de los problemas de optimización restringidos en el funcionamiento del sistema de potencia pueden expresarse como sin restricciones en su etapa de planteamiento, siendo esta su base de análisis. Este enfoque se utiliza en el funcionamiento del sistema de potencia al emplear en su solución los métodos de; gradiente, la búsqueda de línea, el método del multiplicador de Lagrange, la optimización de Newton - Raphson, la optimización de la región de confianza, el método cuasi - Newton y la optimización del gradiente conjugado [16].

### 2.8.2. Enfoque lineal.

La técnica de Programación Lineal (LP) se utiliza al linealizar el problema del sistema de potencia no lineal de tal forma que la función objetivo y sus limitaciones contengan expresiones lineales. El método simplex es conocido por ser muy eficaz en la solución de este tipo de problemas. El enfoque LP tiene varias ventajas; es fiable, especialmente en cuanto a las propiedades de convergencia, identifica rápidamente la inviabilidad, se adapta a una gran variedad de límites de funcionamiento del sistema de potencia, incluyendo las restricciones de contingencia muy importantes. Como desventajas se tiene; la evaluación inexacta de las pérdidas del sistema y la insuficiente capacidad para encontrar una solución exacta en comparación con un modelo preciso de sistema de energía no lineal. Sin embargo, muchas aplicaciones prácticas muestran que las soluciones basadas en LP generalmente cumplen los requisitos de precisión de la ingeniería, por lo que son ampliamente utilizadas [26].

### 2.8.3. Enfoque no lineal.

Los problemas de funcionamiento del sistema de alimentación son no lineales. Por lo tanto, las técnicas basadas en la Programación No Lineal (PNL) solucionan problemas de operación del sistema de energía tales como el Flujo Óptimo de Energía (OPF) con funciones objetivo y

restricción no lineales. Para resolver un problema de programación no lineal, se inicia con elegir una dirección de búsqueda determinada por las primeras derivadas parciales de las ecuaciones, con el método de Gradiente Reducido Generalizado (GRG), así este método se denomina método de primer orden. Los métodos basados en PNL tienen una mayor precisión que los enfoques basados en LP y también tienen convergencia global que se garantiza independientemente del punto de partida, pero puede ocurrir una velocidad convergente lenta debido al zig-zag en la dirección de búsqueda [10].

#### 2.8.4. Enfoque cuadrático.

La Programación Cuadrática (QP) es una forma especial de programación no lineal. La función objetivo del modelo de optimización QP es cuadrática, y las restricciones están en forma lineal. La programación cuadrática tiene mayor precisión que los enfoques basados en LP. Especialmente la función objetivo más frecuente en la optimización del sistema de potencia es la función de costo, que generalmente es cuadrática [27].

#### 2.8.5. Método de Newton.

El método de Newton requiere el cálculo de las derivadas parciales de segundo orden (Hessiano) de las ecuaciones de flujo de potencia y sus restricciones, así al determinar los ceros de la primera derivada se ubican los extremos y en segundo orden se define el tipo de extremo. En este proceso las condiciones necesarias de optimización comúnmente son las condiciones de Kuhn-Tucker.

#### 2.8.6. Método de punto interior.

Se utiliza originalmente para resolver la programación lineal, es más rápido y tal vez mejor que el algoritmo simplex convencional en la programación lineal. El método de Punto Interior (IP) se aplicó para resolver problemas OPF en la década de los 90's y recientemente se ha ampliado y mejorado para resolver OPF con formas QP y PNL.

#### 2.8.7. Programación entero mixta.

El problema del sistema de potencia también puede formularse como un problema de optimización de Programación Mixta (MIP) con variables enteras como la relación de derivación del transformador, el ángulo del desplazador de fase y el estado de encendido o apagado de la unidad. Este método consume mayores recursos informáticos y el número de variables discretas es un indicador importante de lo complejo que puede resultar su solución, utilizan la técnica de programación recursiva de mezcladores usando un método de aproximación y el método ramificación y enlace (ramifica y corta), que es un método típico para la programación entera. Generalmente se adopta la técnica de dividir el problema MIP en partes continua y entera, denominada Descomposición de Benders (BDM) para mejorar la eficiencia en la solución de una red de caleta grande, reduciendo las dimensiones de los sub-problemas individuales. Los resultados han mostrado reducción significativa del número de iteraciones, el tiempo de cálculo requerido y el espacio de memoria, además dicha descomposición permite la aplicación de un método separado para la solución de cada sub-problema, lo que facilita la comprensión del análisis [16].

#### 2.8.8. Programación de flujo de red.

Es una programación lineal especial que se aplicó para resolver problemas de optimización en los sistemas eléctricos en los años ochenta, principalmente sobre un modelo lineal y recientemente, la programación convexa de flujo de red no lineal se ha utilizado en problemas de optimización de los sistemas de potencia. Los algoritmos basados en Programación de Flujo de Red (NFP) tienen las características de velocidad rápida y cálculo simple. Este método es eficiente para resolver problemas OPF simplificados tales como la seguridad, el despliegue económico forzado, el despliegue económico de sistemas multi-área y la reconfiguración óptima de una red de distribución eléctrica [16].

## 2.9. Métodos de búsqueda inteligente.

### 2.9.1. Optimización de red neuronal.

La Optimización de Red Neural (ONN) se utilizó por primera vez para resolver problemas de programación lineal en 1986 y recientemente se amplió para resolver problemas no lineales, es completamente diferente a los métodos tradicionales de optimización ya que su solución cambia a la de un problema de optimización en un punto de equilibrio del sistema dinámico no lineal, además cambia el criterio óptimo en funciones de energía para sistemas dinámicos. Debido a su estructura computacional paralela y evolución en la dinámica, el enfoque ONN parece superior a los métodos tradicionales y generalmente se aplica para resolver; el envío clásico económico, el despacho económico de sistemas multi-área y la optimización de la potencia reactiva [28].

### 2.9.2. Algoritmos evolutivos.

La evolución natural es un proceso de optimización basado en el desarrollo histórico de la población, así los Algoritmos Evolutivos (EAs) son diferentes de los métodos convencionales de optimización y no necesitan diferenciar la función de costo con sus restricciones, en teoría, al igual que el método de recocido simulado, los EAs convergen hacia la solución óptima global e incluyen; la Programación Evolutiva (EP), la Estrategia Evolutiva (ES) y Algoritmos Genéticos (GA), que son métodos de inteligencia artificial para la optimización basados en la mecánica de la selección natural, tales como mutación, recombinación, reproducción, cruza y selección, entre otras. La información que debe considerarse es la función de aptitud, lo que dificulta considerar todas las restricciones de OPF. Por lo tanto, los EAs se utilizan generalmente para resolver un problema OPF simplificado, como el despacho económico clásico, el envío de energía económica restringida por seguridad y el problema de optimización reactiva, así como la reconfiguración óptima de una red de distribución eléctrica [26].

El término computación evolutiva se utiliza para describir una categoría de métodos de optimización heurística que combinan la optimización global con la inteligencia computacional, así los algoritmos evolutivos utilizan; la estocástica, la adaptación y el aprendizaje, con el fin de producir esquemas de optimización inteligente, que puedan adaptarse a su entorno a través de la evolución, incluso si se presenta un cambio dinámico, mientras explotan información de los pasos de búsqueda anteriores.

La estructura especial de los algoritmos evolutivos se basa en principios biológicos de la teoría Darwiniana de las especies, ya que asumen poblaciones de soluciones potenciales que evolucionan iterativamente. Esta evolución se produce como el resultado de los operadores especiales sobre la población, como recombinación, mutación y selección. Todos estos operadores trabajan en forma similar con sus correspondientes procedimientos biológicos, que según la teoría de la evolución biológica presenta una selección natural.

La programación evolutiva fue desarrollada por L.J. Fogel a mediados de los años 60 como un proceso de aprendizaje para máquinas finitas, después de los años 80, la investigación sobre la programación evolutiva maduró y una plétora de diferentes enfoques y aplicaciones apareció en la literatura. Los problemas tipo como; el vendedor ambulante, entrenamiento de las redes neuronales, la programación y la optimización continua, son sólo una fracción de los que fueron abordados por la programación evolutiva, actualmente existe gran cantidad de trabajos en la programación evolutiva y su campo relativo de programación genética.

### 2.9.3. Búsqueda tabú.

Se utiliza principalmente para resolver problemas de optimización combinatoria, es un algoritmo de búsqueda iterativo, caracterizado por el uso de una memoria flexible, capaz de eliminar mínimos locales y buscar áreas más allá de un mínimo local. El método de Búsqueda Tabú (TS) también se utiliza principalmente para resolver problemas OPF simplificados como el compromiso de la unidad y los problemas de optimización reactiva [29].

### 2.9.4. Optimización de Inteligencia de enjambre.

La Optimización de Enjambre de Partículas (PSO) desarrollada en 1995 por Kennedy y Eberhart como un algoritmo de optimización estocástico basado en modelos de simulación social, que emplea una población de puntos de búsqueda que se mueve estocásticamente en el espacio de búsqueda, de tal manera que la mejor posición que ha alcanzado cada individuo, se conserva en la memoria y se comunica a toda o parte de la población, inclinándolo su movimiento hacia las regiones más prometedoras detectadas hasta el momento. El esquema de comunicación está determinado por una red social fija o adaptativa que juega un papel crucial en las propiedades de convergencia del algoritmo. El desarrollo del PSO se basa en conceptos y reglas que gobiernan las poblaciones socialmente organizadas en la naturaleza.

La inteligencia de enjambre es una rama de la inteligencia artificial que estudia el comportamiento colectivo y las propiedades emergentes de sistemas complejos, auto-organizados, descentralizados y con estructura social. Tales sistemas consisten en simples agentes interactivos organizados en pequeñas sociedades denominadas enjambres. Aunque cada agente tiene un espacio de acción muy limitado y no hay control central, el comportamiento agregado de todo el enjambre exhibe rasgos de inteligencia, con capacidad de reaccionar ante los cambios ambientales y las capacidades de toma de decisiones. La principal inspiración en el desarrollo de la inteligencia de enjambre proviene directamente de la observación de la naturaleza, como es el caso de; los cardúmenes, parvadas, colonias de hormigas y los rebaños de animales, entre otros, con sus sorprendentes capacidades y reacciones de auto-organización que producen comportamientos colectivos que no pueden describirse simplemente agregando el comportamiento de cada miembro del equipo. Esta observación ha estimulado la curiosidad científica con respecto a las reglas subyacentes que producen estos comportamientos [13].

El estudio de reglas y procedimientos que promueven el comportamiento inteligente y la aparición de patrones a través de la colaboración y la competencia entre individuos mostraron la opción de la inteligencia colectiva y la emergencia. Por otro lado, se ha encontrado que los equipos humanos comparten estas propiedades, al generar inteligencia y atención de emergencias colectivas, mediante la aplicación de campos científicos interdisciplinarios que se entrecruzan como; las matemáticas, la sociología, la informática y la biología, entre otros. En el marco de la optimización global, la inteligencia de enjambre apareció en 1989 como un conjunto de algoritmos para controlar los enjambres robóticos, seis años después se publicaron los tres principales algoritmos de este tipo que

son; colonia de hormigas, la búsqueda de difusión estocástica y la optimización de enjambre de partículas y a pesar de las diferencias filosóficas y operativas se categorizaron como enfoques evolutivos de computación. Esta vinculación se hizo debido a sus similitudes inherentes, tales como la estocástica, el uso de las poblaciones, los tipos de campos de aplicación.

La investigación intensa en sistemas donde se encuentran los fenómenos colectivos sirvió como base para el desarrollo de la inteligencia de enjambre y a pesar de sus diferencias físicas o estructurales, ambos comparten propiedades comunes, reconocidas como los cinco principios básicos de la inteligencia de enjambre:

1. Proximidad: Capacidad para realizar cálculos de espacio y tiempo.
2. Calidad: Capacidad para responder a factores de calidad ambiental.
3. Respuesta diversa: Habilidad para producir una pluralidad de respuestas diferentes.
4. Estabilidad: Capacidad de retener comportamientos robustos bajo cambios ambientales suaves.
5. Adaptabilidad: Capacidad para cambiar el comportamiento cuando es dictado por factores externos.

Así el intercambio social de información entre los individuos de una población puede proporcionar una ventaja evolutiva. Los PSO se iniciaron con simuladores del comportamiento social observado en las parvadas. Posteriormente las simulaciones efectuadas por Russell C. Eberhart y James, reproducían el comportamiento de enjambre por agentes simples en su búsqueda de alimentos, así al darse cuenta del potencial de estos modelos de simulación para realizar la optimización, se refinó dicho modelo y se publicó la primera versión de PSO en 1995, que al estructurarlo en el marco matemático se tiene que, sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  el espacio de búsqueda y  $f : A \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$  la función objetivo [13].

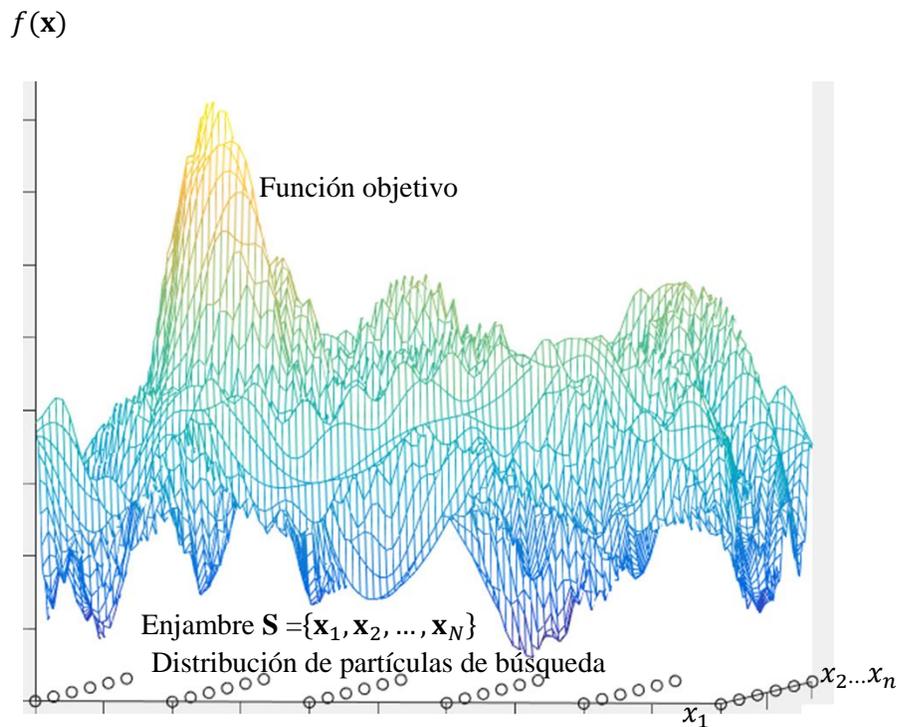


Figura 2.6 Búsqueda de PSO.

De la figura 2.6 y con el fin de simplificar la descripción se asume  $A$  es también el espacio factible del problema en cuestión, lo que significa que no hay más restricciones explícitas planteadas en las soluciones candidatas. Como PSO es un algoritmo basado en la población, es decir, explota una población de soluciones potenciales para sondear el espacio de búsqueda al mismo tiempo. A la población se llama el enjambre y a sus individuos se llaman las partículas que es la nomenclatura utilizada en ciencias sociales y física de partículas. El enjambre (2.36) se define como un conjunto de  $N$  partículas o soluciones candidatas, definido como (2.37):

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \quad \dots (2.36)$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})^T \in A, i = 1, 2, \dots, N \quad \dots (2.37)$$

Los índices se asignan arbitrariamente a las partículas, mientras que  $N$  es un parámetro definido por el usuario del algoritmo. Se supone que la función objetivo  $f(\mathbf{x})$  está disponible para todos los puntos de  $A$ . Por lo tanto, cada partícula tiene un valor de función único  $f_i = f(\mathbf{x}_i) \in Y$ . Además se supone que las partículas se mueven iterativamente dentro del espacio de búsqueda  $A$ . Esto es posible ajustando su posición usando un desplazamiento de posición apropiado, llamado velocidad y designado como,

$$\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN})^T, i = 1, 2, \dots, N \quad \dots (2.38)$$

La velocidad también se adapta iterativamente para hacer que las partículas puedan visitar potencialmente cualquier región de  $A$ . Si  $t$  denota el contador de iteración, entonces la posición actual de la  $i$ -ésima partícula y su velocidad se denotarán como  $x_i(t)$  y  $v_i(t)$  respectivamente. La velocidad se actualiza en base a la información obtenida en los pasos anteriores del algoritmo. Esto se implementa en términos de una memoria donde cada partícula puede almacenar la mejor posición que ha visitado durante su búsqueda. Para este propósito además del enjambre  $\mathbf{S}$ , que contiene las posiciones actuales de las partículas, PSO mantiene también un conjunto de memoria:  $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  que contiene las mejores posiciones  $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})^T \in A, i = 1, 2, \dots, N$ , visitadas por cada partícula. Estas posiciones se definen como:  $p_g(t) = \arg \min_i f(p_i(t))$ . Así Eberhart y Kennedy definieron la primera versión de PSO con las siguientes ecuaciones y la lógica de su funcionamiento se muestra en la Tabla 2.4.

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 R_1 (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 R_2 (p_{gj}(t) - x_{ij}(t)) \quad \dots (2.39)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1), \quad i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2.40)$$

Donde  $t$  representa el contador de iteraciones,  $R_1$  y  $R_2$  son variables aleatorias uniformemente distribuidas dentro de  $[0,1]$ .  $c_1, c_2$  son factores de ponderación denominados parámetro cognitivo y social, respectivamente. En cada iteración, después de la actualización y evaluación de las partículas, también se actualizan los valores de las mejores posiciones en la memoria. Por lo tanto, la nueva mejor posición de  $x_i$  en la iteración  $t+1$  se define en (2.41).

$$p_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t+1), & \text{si } f(x_i(t+1)) \leq f(p_i(t)) \\ p_i(t), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \dots (2.41)$$

La nueva determinación del índice  $g$  para las mejores posiciones actualizadas completa una iteración de PSO.

Tabla 2.4 Secuencia lógica de la búsqueda PSO.

Entrada	$N$ partículas, enjambre $S$ y $P$ mejor posición.
Paso 1	Define búsqueda inicial $t \leftarrow 0$ .
Paso 2	<b>Inicializar</b> $S$ y $P$ se define como $S$ ( $P \equiv S$ ).
Paso 3	<b>Evaluar</b> $S$ y $P$ , y definir el índice $g$ de la mejor posición.
Paso 4	<b>While</b> (el criterio de terminación no se cumple)
Paso 5	<b>Actualizar</b> $S$ usando las ecuaciones (1) y (2).
Paso 6	<b>Evaluar</b> $S$ .
Paso 7	<b>Actualizar</b> $P$ y redefinir índice $g$
Paso 8	<b>Establecer</b> $t \leftarrow t + 1$ .
Paso 9	<b>Finalizar</b>
Paso 10	<b>Imprimir</b> la mejor posición encontrada.

Las partículas suelen ser inicializadas aleatoriamente, siguiendo una distribución uniforme sobre el espacio de búsqueda  $A$ , este tipo de elección trata cada región de  $A$  de manera equivalente en los casos en que no hay información sobre la forma del espacio de búsqueda o la función objetivo, se implementa con bastante facilidad, ya que todos los sistemas informáticos modernos pueden equiparse con un generador de números aleatorios uniforme.

El término de velocidad anterior,  $v_{ij}(t)$  en el lado derecho de la ecuación (2.50), ofrece un medio de movimiento inercial a la partícula tomando en consideración su cambio de posición anterior. Esta propiedad puede impedir que se polarice hacia las mejores posiciones involucradas, lo que podría atraparlo a mínimos locales si la información sub-óptima es llevada por ambos. Además, el término de velocidad anterior sirve como una perturbación para la mejor partícula global  $x_g$ , así si una partícula  $x_i$  descubre una nueva posición con un valor de función inferior al mejor, entonces se convierte en el mejor global, es decir,  $g \leftarrow i$  y su mejor posición  $p_i$ , coincidirá con  $p_g$  y  $x_i$  en la siguiente iteración y los dos términos estocásticos en la ecuación (2.50) desaparecerán. Si no hubiese el término de velocidad, la partícula mencionada permanecería en la misma posición durante varias iteraciones, hasta que una nueva mejor posición sea detectada por otra partícula, así la velocidad permite que la partícula continúe su búsqueda, siguiendo su cambio de posición anterior.

## 2.10. No cuantitativos con incertidumbre.

### 2.10.1. Enfoque probabilístico.

Considera la búsqueda aleatoria global y su metodología se basa en análisis probabilístico sobre la función objetivo, por otro lado, se considera la estadística de la aleatoriedad que puede aparecer por diversos factores en el caso de estudio. Generalmente considera la optimización dimensional continua infinita a pesar de que algunos de los métodos pueden modificarse fácilmente para problemas de optimización discreta o finita [30].

### 2.10.2. Conjuntos difusos.

Considera una serie de elementos agrupados en conjuntos y supone que los agentes establecen un equilibrio en la búsqueda de los valores extremos. Así la teoría de los conjuntos difusos proporciona herramientas y técnicas para manejar conceptualmente otro aspecto de la información imperfecta derivada de la imprecisión y la vaguedad, con lo que surge la optimización denominada difusa, con su correspondiente programación matemática, en la que se proponen resultados teóricos y

algoritmos poderosos, como es el caso en finanzas que se presenta con la integración de portafolios de inversión entre maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo de decisiones, así el retorno se cuantifica como la media y el riesgo como la varianza de la cartera de valores. Estas representaciones matemáticas permiten aplicar herramientas de optimización a los estudios de gestión de cartera y en consecuencia se cuantifican los objetivos apareados de maximización del beneficio y minimización del riesgo [31].

### 2.10.3. Proceso analítico jerárquico.

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) se diseñó para estudiar situaciones en las que intervienen variables que no pueden ser cuantificadas en forma definida, como lo son; la creatividad, los sentimientos y emociones, entre otros y que impactan en forma determinante en el sistema. En consecuencia este método se basa en la valoración cualitativa y puede incluir diversos niveles de criterios y una ponderación relativa, así como una matriz de comparación [32].

### 2.11. Aplicación a sistemas de potencia.

Los datos y parámetros utilizados en el funcionamiento del sistema de potencia suelen derivarse de muchas fuentes, con una amplia variación en su precisión. Por ejemplo si la carga media se aplica típicamente en problemas de operación del sistema de potencia, la carga real presenta variaciones inciertas con impacto en los costos de generación, los Compensadores de Potencia Reactivos Estáticos (VAR) y el ahorro de potencia están sujetos a incertidumbre hasta cierto punto, así la insuficiencia de información genera una región incierta de decisiones y en consecuencia los resultados pueden sugerir una acción errónea. Para explicar las incertidumbres en la información y los objetivos relacionados con objetivos múltiples y usualmente conflictivos en la optimización de sistemas de potencia, el uso de la teoría de probabilidades, la teoría de conjuntos difusos y el proceso jerárquico analítico pueden jugar un papel significativo en la toma de decisiones. Los métodos probabilísticos y su aplicación en el funcionamiento de los sistemas de potencia con incertidumbre en colaboración con los conjuntos difusos pueden asignarse no sólo a la función objetivo, sino también a las limitaciones, especialmente la incertidumbre no probabilística asociada con la demanda de potencia reactiva en las restricciones. En general, los parámetros de satisfacción (conjuntos difusos) para objetivos y restricciones representan el grado de cercanía al óptimo y el grado de cumplimiento de las restricciones respectivamente, con la maximización de estos parámetros de satisfacción se alcanza el objetivo de optimización y simultáneamente se consideran las incertidumbres [26].

AHP tiene aplicación en el estudio de un problema, donde la cuantificación se torna complicada, como es caso del OPF con objetivos competitivos o factores inciertos, se emplea para resolver el compromiso de la unidad, el despacho económico de multi-área, la optimización de VAR, el derramamiento óptimo de la carga y el análisis de la incertidumbre en el sistema eléctrico, entre otros [33].

# Capítulo 3 Despacho energético.

## 3.1. Contexto.

Con base a lo que maneja en forma implícita la literatura especializada, se entiende como Despacho Económico Energético (DEE) al proceso que optimiza al mínimo los costos de suministro de energía, de tal manera que asegure la atención de la demanda en el momento y lugar en que se realice la conexión de las cargas eléctricas. Por lo que se busca obtener una solución apropiada para el problema real e información relevante desde el punto de vista de la variable de estudio [34].

Existen dos formulaciones para el concepto de DEE en la literatura, la primer formulación es el Control Óptimo de Envío Dinámico (OCDD), donde la generación del sistema de potencia que se ha modelado como un sistema de control y optimización, que realiza el ajuste con respecto a las tasas de rampa de control óptimo, como variables de entrada. El segundo es una formulación conocida como la distribución dinámica económica, donde la optimización se realiza con respecto a las potencias comprometidas de entrega de los generadores [35].

El suministro de energía a las demandas de carga entre los usuarios del flujo eléctrico que utilizan como fuente primaria la energía térmica de forma económica, segura y fiable ha recibido especial atención desde el surgimiento de la masificación del uso de la energía eléctrica. Esta situación ha formulado la búsqueda de minimización del costo de combustible con la salvedad de atender la demanda de carga, así como otras limitaciones de interés en un momento determinado. Este análisis se inició al considerar la carga fija durante el tiempo, a lo que se le llamó como problema de Despacho Económico Estático (SED), que considera un solo nivel de carga, sin embargo, SED puede fallar para hacer frente a las grandes variaciones de la demanda de carga debido a los límites de la frecuencia de los generadores de rampa. Por otra parte no tiene la capacidad de análisis predictivo, derivado de la gran variación de la demanda de carga de los clientes y su naturaleza dinámica del sistema de generación, que requiere el análisis del problema de Optimización de Distribución Dinámica (ODD). Así la ODD es una extensión de la SED para determinar el programa de generación de las unidades comprometidas con el fin de satisfacer la demanda de carga previsto en un cierto período de tiempo a un costo mínimo de funcionamiento en términos de tasa de rampa y otras limitaciones. La restricción de velocidad de rampa es una limitación dinámica que se utiliza para mantener la vida útil de los generadores, así algunos investigadores han examinado intervalo por intervalo las limitaciones de velocidad de rampa mediante la resolución de un problema SED para hacer cumplir las limitaciones de velocidad de rampa de un intervalo a otro. Sin embargo, este enfoque puede conducir a soluciones sub-óptimas [36].

Dado que ODD considera la existencia de análisis predictivo que permite programar la carga de antemano para que el sistema se anticipe a los cambios repentinos en la demanda en el futuro próximo. El registro de la primer publicación relacionada al reenvío dinámico óptimo apareció en 1972 por Bechert y Kwatny [37], donde como eje medular fue formulado como un problema de control óptimo, en este sentido la formulación Dinámica de Control en el Despacho Óptimo (OCDD), es el modelo de generación del sistema de alimentación por medio de ecuaciones de estado, donde las variables de estado son las salidas eléctricas de los generadores y las entradas de control son las velocidades de rampa de los generadores, así la solución del problema OCDD produce una trayectoria óptima del generador de salida para una producción inicial dada. Desde 1980, algunos trabajos formulan la búsqueda de minimización del costo total durante el período de expedición donde se incluyen algunas limitaciones y se conoce como el problema de Despacho Económico Dinámico (DED) [37].

## 3.2. Consideraciones de modelado.

En [38] se propone que para formular el modelo de optimización ODD se debe considerar:

### 3.2.1. Función objetivo.

Se busca optimizar la variable de interés, que para la mayoría de casos se refiere a minimizar costos o a maximización de la ganancia para el caso de mercados desregulados y dicha función puede considerar los siguientes componentes [33] [39],

- costo del combustible o materia prima consumida,
- costo de operación de las centrales,
- costo de la compra de energía a otros sistemas,
- costo asignado a las interrupciones del suministro o déficit,
- costos futuros de operación,
- costo de arranque/parada,
- costo de tratamiento de la polución emitida en gases como CO, NO<sub>x</sub>, SO<sub>2</sub> y CO<sub>2</sub> [40].
- costo por otras penalizaciones.

### 3.2.2. Restricciones.

Las restricciones que se consideran generalmente se orientan aspectos técnicos, de seguridad o financieros, como son,

- En la generación, se considera para cada central, el balance de la demanda de carga, límites de velocidad de rampa, capacidad de generación, requisito de reserva, valores de seguridad y restricción de emisiones, entre otros.

Para un sistema térmico:

- Está constituido por unidades térmicas que pueden ser de diversos tipos de unidades: nuclear, biomasa, de gas, de vapor o de ciclo combinado,
- Las unidades térmicas se agrupan en centrales,
- Para centrales térmicas con combustible almacenable, se modela un almacenamiento de combustible con capacidad finita y posibilidades de reaprovisionamiento en ciertas fechas,
- Considera la posibilidad de mantenimiento programado,
- Posibilidad de modelar indisponibilidades fortuitas.

Para un sistema hidroeléctrico:

- Constituido por unidades con base a presas o maremotriz que se agrupan en centrales,
- Producción limitada a capacidad embalsada (en caso de presas),
- Posibilidad de mantenimiento programado,
- Considera la época climática.

Para un sistema eólico:

- Constituido por unidades eólicas con impacto en el ecosistema local,
  - Disturbios adicionales (ruido y campo electromagnético),
  - Riesgo en aeronáutica,
  - Producción limitada a condiciones meteorológicas,
- Restricciones de red (transmisión y distribución),
- Organizado por áreas geográficas de acuerdo a su topología, interconectadas con estructura ya sea en árbol o radial,
  - Las pérdidas en la red se reflejan a través de coeficientes en función a las características físicas de cada uno de los enlaces de la red,
  - Las áreas están interconectadas por líneas y cada línea tendrá asociado un coeficiente lineal de pérdidas y una capacidad máxima de transporte, pudiendo ser ambos distintos en función del sentido del flujo.
- Restricciones de demanda,
- Con regulación tarifaria,
  - Penalización por incumplimiento,
  - Concertada mediante contratos bilaterales,
  - A satisfacer en el mercado spot.

En términos de algoritmo, estas limitaciones se pueden clasificar en: función objetivo, restricciones de igualdad y restricciones de desigualdad, como lo describe la ecuación del modelo (2.24).

### 3.2.3. Enfoque de solución al modelo.

Posteriormente se debe elegir un método de optimización adecuado que brinde solución óptima a nivel de precisión y tiempo de cálculo aceptable. Es en este tema donde la mayoría de la literatura ODD dedica la elección del método de optimización al considerar diversos factores del tipo de función objetivo (no lineal/lineal, suave/no lisa, cóncava/convexa, etc.), así como sus restricciones. Algunos investigadores suponen que la función de costo para cada generador es convexa, lisa y su función es estrictamente creciente incremental. En este proceso se utilizan técnicas de optimización basado en programación matemática, tales como el método iterativo lambda, el método de proyección del gradiente, la relajación de Lagrange, métodos de punto interior y programación dinámica, entre otros [12].

En trabajos recientes se han utilizado métodos de Inteligencia Artificial (AI) con las teorías de optimización, como es el caso de las redes neuronales artificiales, algoritmo recocido simulado, los algoritmos genéticos, evolución diferencial, optimización de enjambre de partículas, la programación evolutiva y los métodos híbridos. Estas técnicas han demostrado su eficacia en la solución de los problemas DED sin o restricciones mínimas en la forma de las curvas de la función de costos [41]. El desarrollo de la DED continúa su curso con cierto nivel de madurez en términos de pensamientos académicos.

Un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) constituye una red eléctrica que puede ser modelada por un grafo conexo que contempla tres tipos de elementos: unidades de generación, cargas y equipos de transmisión, constituyendo nodos y ramas, donde los equipos de transmisión corresponden

típicamente a las ramas y los nodos denominados barras en el lenguaje de potencia, representan los puntos de inyección o retiro de la energía. Puesto que en un sistema eléctrico la energía se produce y consume instantáneamente, el problema se modela en función de la valorización y balances en cada condición de operación de potencias.

### 3.3. Flujos de potencia.

El cálculo y análisis del flujo de energía a través de la red en un SEP, consiste en definir el camino de la potencia activa y reactiva en cada línea del sistema, así como las tensiones en cada una de las barras, para condiciones preestablecidas de operación [42].

#### 3.3.1. Análisis del flujo de potencias (AFP).

El AFP permite:

- Planear la expansión de la infraestructura del SEP y determinar el modo de operación, teniendo en cuenta posibles nuevos consumos, nuevas líneas o nuevas centrales generadoras.
- Estudiar los efectos sobre la distribución de potencias, cuando se producen pérdidas temporales de generación o circuitos de transmisión.
- Ayudar a determinar los programas de despacho de carga para obtener un funcionamiento óptimo.

Para el caso de una malla, se tiene un modelo multi-nodal que representa explícitamente la red de transmisión, incorporando sus restricciones y fenómenos físicos, por lo que se busca una solución apropiada que satisfaga el problema con los mínimos aceptables de optimización y parámetros de proceso [43].

#### 3.3.2. Problema básico.

En AFP, la situación básica de flujo de energía que considera un SEP elemental de dos barras es el que se muestra en la figura 3.1.

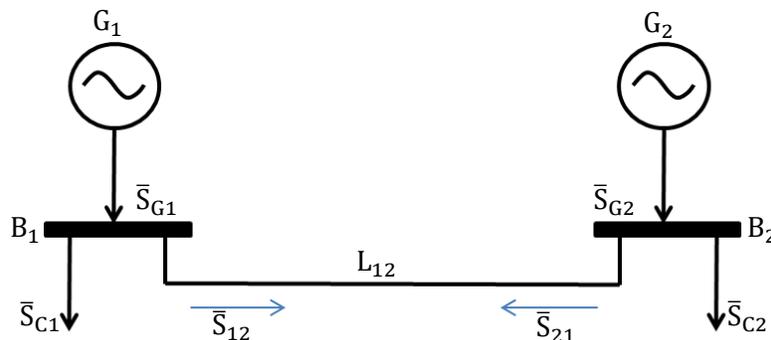


Figura 3.1 Esquema básico de flujo de potencia.

Las potencias complejas netas de las barras  $B_1$  y  $B_2$  se modelan en (3.1) y (3.2).

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_{G1} - \bar{S}_{C1} = (P_{G1} - P_{C1}) + j(Q_{G1} - Q_{C1}) = P_1 + jQ_1 \quad \dots (3.1)$$

$$\bar{S}_2 = \bar{S}_{G2} - \bar{S}_{C2} = (P_{G2} - P_{C2}) + j(Q_{G2} - Q_{C2}) = P_2 + jQ_2 \quad \dots (3.2)$$

Donde:

$\bar{S}_1$  y  $\bar{S}_2$ , son las potencias complejas de las barras  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente representadas como fuentes activas y reactivas que corresponden a la potencia generada menos la potencia consumida.

$\bar{S}_{12}$  y  $\bar{S}_{21}$ , es el flujo de potencia en dirección de las barras.

$Y$ , es la propiedad de los circuitos de facilitar el paso de la corriente alterna denominada admitancia y es el inverso de la impedancia. Así el circuito eléctrico equivalente del sistema se muestra en la figura 3.2.

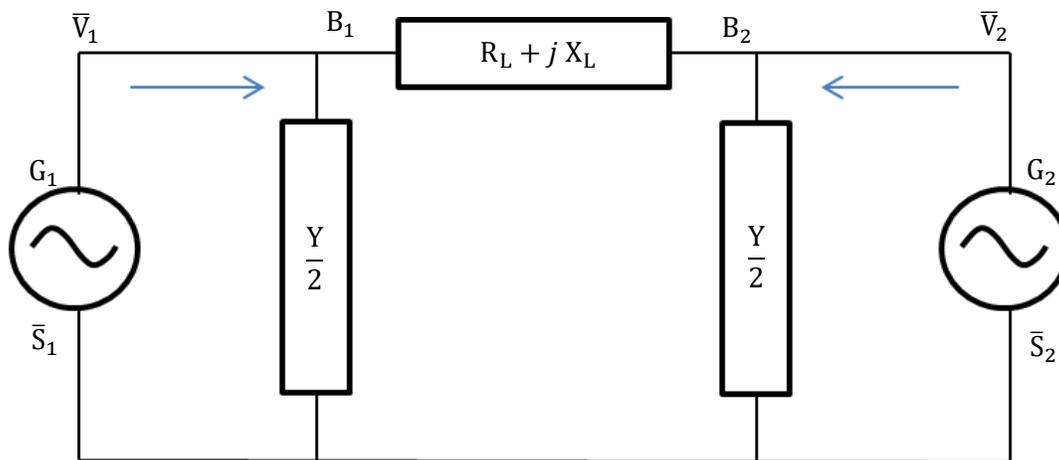


Figura 3.2 Circuito equivalente del esquema básico de flujo de potencia.

Y de las ecuaciones de malla se tiene:

$$\frac{\bar{S}_1}{\bar{V}_1} = \bar{V}_1 \cdot \frac{Y}{2} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_L + jX_L} \quad \dots (3.3)$$

$$\frac{\bar{S}_2}{\bar{V}_2} = \bar{V}_2 \cdot \frac{Y}{2} + \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_L + jX_L} \quad \dots (3.4)$$

El sistema de cuatro ecuaciones de (3.1) a (3.4), tiene 12 variables en total:  $P_{G1}$ ,  $P_{G2}$ ,  $Q_{G1}$ ,  $Q_{G2}$ ,  $P_{C1}$ ,  $P_{C2}$ ,  $Q_{C1}$ ,  $Q_{C2}$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$ ,  $V_2$ ,  $\theta_2$ , por lo que una forma posible de resolver el problema es reducir el

número de incógnitas, por lo que se definen algunas variables que se suponen conocidas e independientes del voltaje, que son las potencias de consumo;  $P_{C1}$ ,  $P_{C2}$ ,  $Q_{C1}$ ,  $Q_{C2}$ .

Al tomar la barra 1 como referencia, se fija el módulo y ángulo de la tensión, así  $V_1$  y  $\theta_1$ , son conocidos. En estas condiciones las variables que quedan por conocer son:  $P_{G1}$ ,  $Q_{G1}$ ,  $V_2$ ,  $\theta_2$ , en un sistema de cuatro ecuaciones.

### 3.3.3. Caso de barra uni-nodal.

Al analizar para el caso individual de una barra p en un SEP, como se muestra en la figura 3.3.

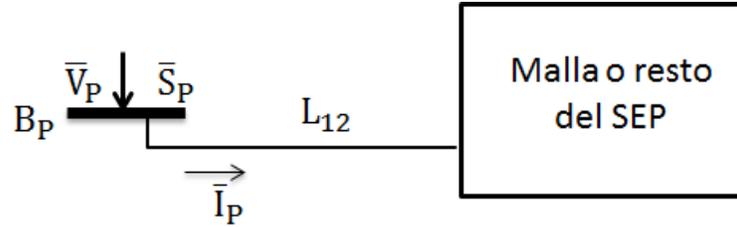


Figura 3.3 Esquema de una barra conectada a una red.

Representación de una barra p en un SEP,

$$\bar{S}_p = \bar{V}_p \cdot \bar{I}_p = P_p + jQ_p = |\bar{S}_p| \angle \theta_p \quad \dots (3.5)$$

$$\bar{I}_p = \frac{\bar{S}_p}{\bar{V}_p} \quad \dots (3.6)$$

$$\bar{I}_{pq} = (\bar{V}_p - \bar{V}_q) \cdot \bar{Y}_{pq} + \bar{V}_p \cdot \frac{\bar{Y}_{pq}}{2} \quad \dots (3.7)$$

La potencia compleja que fluye la barra p el resto del SEP,

$$\bar{S}_{pq} = \bar{V}_p \cdot \bar{I}_{pq} = \left( \bar{Y}_{pq} + \frac{\bar{Y}_{pq}}{2} \right) \cdot V_p^2 - \bar{V}_p \bar{V}_q \bar{Y}_{pq} \quad \dots (3.8)$$

La potencia compleja perdida en los sentidos del flujo de potencia,

$$\bar{S}_{Lpq} = \bar{S}_{pq} + \bar{S}_{qp} \quad \dots (3.9)$$

Es evidente que las ecuaciones (3.8) indican claramente que para resolver el problema del flujo de potencias se requiere determinar previamente las tensiones en todas las barras que correspondan. Al emplear el método nodal de resolución de circuitos, en forma matricial, para la red de un SEP de  $n$  barras se puede escribir como en (3.10).

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{Y}_B \mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_p \\ \vdots \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \cdots & \bar{Y}_{1p} & \cdots & \bar{Y}_{1n} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \cdots & \bar{Y}_{2p} & \cdots & \bar{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{Y}_{p1} & \bar{Y}_{p2} & \cdots & \bar{Y}_{pp} & \cdots & \bar{Y}_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \cdots & \bar{Y}_{np} & \cdots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_p \\ \vdots \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} \quad \dots (3.10)$$

Donde:

$\mathbf{I}_B$ .- Es el vector de corrientes inyectadas a las barras.

$\mathbf{Y}_B$ .- Es la matriz de admitancias de las barras.

$\mathbf{V}_B$ .- Es el vector de tensión eléctrica de las barras.

Al incluir (3.6), (3.8) y (3.10), se puede reescribir la generalización de un SEP con  $n$  barras como:

$$\frac{\bar{S}_p}{\bar{V}_p} = \sum_{q=1}^n \bar{Y}_{pq} \bar{V}_q \quad \forall p, q = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3.11)$$

Y para la potencia reactiva se tiene,

$$\bar{S}_p = P_p + jQ_p = \bar{V}_p \sum_{q=1}^n \bar{Y}_{pq} \bar{V}_q \quad \dots(3.12)$$

Un SEP incluye barras de carga y flotante, además Barras de Tensión Controlada (BTC) que su función es regular la tensión en uno o varios puntos del sistema, por lo que debe existir una fuente regulable de potencia reactiva para poder cumplir su cometido. Debido a que en este tipo de barra sólo se conocen el módulo de la tensión y la potencia activa, es necesario calcular previamente la potencia reactiva, para determinar el voltaje complejo en ella, así al determinar el voltaje de ajuste, debe tenerse en cuenta que su módulo en esta barra está especificado y por lo tanto sólo puede cambiar su ángulo.

En el cálculo del flujo de potencias de las barras de tensión controlada es necesario conocer los límites de potencia reactiva de las fuentes, para definir el margen de operación en el control, así,

$$Q_p = Q_{Gp} - Q_{Cp} \quad \dots(3.13)$$

Donde:

$Q_{Gp_{m\acute{a}x}}$  = Valor máximo de generación de potencia reactiva de la fuente.

$Q_{Gp_{m\acute{i}n}}$  = Valor mínimo de generación de potencia reactiva de la fuente.

$Q_{Cp}$  = Potencia reactiva de la carga en la barra.

Los límites de potencia reactiva para la barra  $p$  serán:

$$Q_{Gp_{m\acute{i}n}} \leq Q_p \leq Q_{Gp_{m\acute{a}x}} \quad \dots(3.14)$$

Si el valor de la potencia reactiva calculado según (3.12) excede el límite máximo o mínimo prefijado, significa que es imposible obtener una solución con la tensión definida en esta barra y en consecuencia, se debe considerar como una barra de carga en ese momento, en la cual la potencia

reactiva es igual al límite superior e inferior según corresponda. Por lo que es necesario mantener el voltaje definido en esa barra, siempre que no se violen los límites de  $Q_p$ , lo cual es posible debido a la dinámica del SEP.

El modelo de despacho denominado uni-nodal, se caracteriza por calcular el costo marginal único para todo el sistema y no diferencia los costos marginales por nodo, no se realiza una modelación explícita de los sistemas de transmisión, es decir no se representan los flujos de potencia en cada uno de los tramos considerados, simplificación que presentó ventajas importantes en el manejo numérico antes de la masificación de los computadores. Como el modelo uni-nodal no considera el efecto de la congestión del sistema de transmisión ni la diferenciación de costos marginales por barra, fue necesario el desarrollo de modelos de tipo multi-nodal, que tienen una vasta aplicación en mercados eléctricos actuales, donde interesa reflejar las congestiones y en segundo término, las pérdidas óhmicas en la red. Un modelo de despacho que utiliza la representación multi-nodal de la red, se plantea como un problema de optimización de función objetivo cuadrática y restricciones no lineales de igualdad y desigualdad.

### 3.3.4. Pérdidas reactivas.

Cabe mencionar que en el problema de optimización, si bien presenta una función objetivo convexa, no es convexo en el dominio de solución producto de las ecuaciones de pérdidas. Esta situación se comprueba en los nodos esencialmente importadores, donde las funciones de flujo  $\frac{\theta_p - \theta_q}{x_{pq}}$  tienen signo contrario al de las pérdidas óhmicas medias  $\frac{P_{Lpq}}{2}$ . Consecuentemente, el balance nodal con la demanda  $P_c$  se satisface en puntos separados del dominio. Para sistemas reales, esta falta de convexidad por efecto de las pérdidas óhmicas no tiene implicaciones prácticas. Sin embargo, se observa que la existencia de congestión puede provocar problemas de convergencia en sistemas reales, particularmente en algoritmos que utilizan una linealización por partes de la función de pérdidas óhmicas. El problema de convergencia se manifiesta en que efectivamente las soluciones alcanzadas no tienen sentido físico, ya que las variables asociadas a los primeros tramos del modelo linealizado tienen valor cero, en tanto que aquellas asociadas a desfases mayores son distintas de cero.

Existen situaciones particulares de despacho que presentan costos marginales negativos en algunas barras del sistema, en términos económicos esto significa un ahorro para el sistema al pagar por aumentos de consumo de potencia en una determinada barra, así al aumentar el consumo en la barra con costo marginal negativo, el costo total de operación disminuirá en vez de aumentar [38].

### 3.4. Estructura de optimización.

La finalidad del despacho económico es la minimización de los costos variables de generación de potencia activa y de las potencias activas no servidas en las cargas del sistema. Para este cálculo, se suponen conocidas las unidades que están en operación y consecuentemente, los límites de operación que es necesario respetar. Su estructura general se muestra en la ecuación (3.15), que corresponde a una función objetivo de tipo cuadrática, en ella se agrupan las funciones de costos cuadráticos tanto de potencias generadas como de las potencias no servidas.

$$F. O. = \text{Min} \left\{ \alpha_E + \mathbf{c}_E^T \mathbf{x}_E + \frac{1}{2} \mathbf{x}_E^T \mathbf{Q}_e \mathbf{x}_E \right\} \quad \dots(3.15)$$

El costo de la potencia no servida busca reflejar el valor para el sistema de no poder abastecer plenamente el consumo. Dependiendo del tipo de estudio que se está realizando, éste puede

corresponder al costo de falla de corta duración o bien, en un enfoque de planeación al costo de racionamiento. Este costo puede ser representado por una función cuadrática, creciente con la profundidad de la falla, como se describe en (3.16)

$$C_{Ui}(P_{Ui}) = \beta_i P_{Ui} + \gamma_i P_{Ui}^2 \quad \dots(3.16)$$

Se define como profundidad de falla al porcentaje del consumo que no es abastecido, mientras que el término duración o extensión de una falla indica el intervalo de tiempo que dura la interrupción de servicio. Cabe señalar que en este caso no existe un costo fijo de falla, ya que la situación de pleno abastecimiento no debiera generar costos adicionales al sistema.

Los coeficientes del vector  $\mathbf{c}_E$  en (3.15) distintos de cero son los coeficientes lineales de los costos de generación térmica y de las potencias no servidas, así la matriz del modelo cuadrático  $\mathbf{Q}_e$  es diagonal y de igual forma, sus coeficientes distintos de cero son la mitad de los coeficientes cuadráticos de los costos térmicos y de potencias no servidas. La constante  $\alpha_E$  representa la suma de los costos fijos de los generadores del sistema [26].

### 3.5. Variables de interés.

El vector de variables  $\mathbf{x}_E$  del problema de despacho basado en un flujo de potencia lineal está compuesto por las potencias activas generadas por cada unidad, agrupadas en el vector  $\mathbf{P}_G$  de dimensión  $N_G$ ; las potencias activas no servidas de cada uno de los consumos, representadas por el vector  $\mathbf{P}_U$  de dimensión  $N_D$  (número de consumos); y los ángulos de fase de cada tensión de barra, de dimensión  $N_N$  (número de nodos). Los dos primeros grupos de variables corresponden a variables de decisión dentro del problema de optimización, mientras que los ángulos de fase de las tensiones serán consecuencia de las primeras y sirven para establecer el estado de operación estacionario del sistema eléctrico, el que a su vez permite calcular y restringir los flujos por las conexiones de la red. De esta forma [26],

$$\mathbf{x}_E = [\mathbf{P}_G, \mathbf{P}_U, \boldsymbol{\theta}]^T \quad \dots(3.17)$$

### 3.6. Generación distribuida.

#### 3.6.1. Definición.

La Generación Distribuida (DG) es un nuevo enfoque en la industria de la electricidad y como el análisis pertinente de la literatura ha demostrado que todavía no existe una definición generalmente aceptada para este concepto, en la documentación se utiliza una variedad de términos, por ejemplo en los países angloamericanos la nombran "generación embebida", en algunas partes de América se le denomina "generación dispersa" y en Europa como el algunas partes de Asia se le conoce como "generación descentralizada". En este sentido la DG consiste en la instalación y operación de una variedad de pequeñas, compactas y limpias unidades de generación de energía eléctrica conectadas directamente a la red de distribución o conectadas a la red en el sitio del cliente. No es un concepto nuevo pero es un enfoque acorde a las nuevas políticas de mercado. Hasta ahora, no todas las tecnologías y tipos de DG son económicos, limpios o fiables, sin embargo en esa dirección se encaminan las investigaciones y desarrollo de tecnología [44], como ejemplo se tiene el presente trabajo.

### 3.6.2. Parámetros.

En [45] se muestra lo que respecta al orden de magnitud para las cuestiones técnicas que pueden variar considerablemente con la calificación, por lo que se tienen diferentes categorías que son:

- Micro generación distribuida: desde 1 vatio a 5 KW,
- Pequeña generación distribuida, de 5 KW a 5 MW,
- Generación distribuida media: de 5 MW a 50 MW,
- Gran generación distribuida: de 50 MW hasta 300 MW.

### 3.6.3. Fuentes.

En la tabla 3.1 se muestra las magnitudes de generación por tipo de tecnología, de acuerdo a la fuente [45].

Tabla 3.1 Tecnologías para la generación distribuida.

<b>Tecnología</b>	<b>Tamaño típico por módulo</b>
Ciclo combinado de gas	35-400 MW
Motores de combustión interna	5 KW -10 MW
Turbina de combustión	1-250 MW
Micro-Turbinas	35 KW-1 MW
<b>Energías Renovables</b>	
Pequeña hidroeléctrica	1-100 MW
Micro hidroeléctrica	25 kW-1 MW
Turbinas eólicas	200 W-3 MW
Módulos fotovoltaicas	20 Watt-100 kW
Solar térmica, receptor central	1-10 MW
Solar térmico, sistema Lutz	10-80 MW
Biomasa, basado en gasificación	100 KW-20 MW
Células de combustible, fosfato	200 KW-2 MW
Células de combustible carbonato fundido	250 KW-2 MW
Pilas de combustible, intercambio de protones	1 KW-250 kW
Pilas de combustible, óxido sólido	250 KW-5 MW
Geotermia	5-100 MW
Energía Oceánica	100 KW-1 MW
Motor Stirling	2-10 KW
Almacenamiento de la batería	500 KW-5 MW

### 3.6.4. Tecnología de construcción.

Desde los puntos de vista de construcción y tecnología, existen diferentes tipos de DG, como se muestra en la tabla 3.2. Esta variedad de DG permiten tomar alternativas para decidir el idóneo para cada situación en particular y en el punto 3.6.5, se enlistan algunos generadores utilizados en la actualidad.

Tabla 3.2 Clasificación de la generación distribuida.

Tipo	Tecnología	Ejemplo
Generador tradicional	Micro turbina	Ciclo simple
		Ciclo recuperado
		Ciclo combinado
Generadores no tradicionales	Dispositivos electromecánicos	Celdas de combustible
		Baterías
	Dispositivos de almacenamiento	Compresores
		Tanques elevados
	Renovables	Fotovoltaica
Eólica		

### 3.6.5. Generadores distribuidos.

A continuación se enlistan algunos de los generadores y su descripción más común, que operan en la generación distribuida.

1. Micro-turbina (MT). Consiste en turbinas de combustión de pequeña capacidad, que pueden funcionar con gas natural, propano o combustible de aceite, el sistema contiene; un compresor, combustor, recuperador, turbina pequeña y generador. En ocasiones sólo contienen un eje móvil y utilizan aire o aceite para la lubricación, son de pequeña escala del orden de 0.4-1 m<sup>3</sup> en volumen y 20-500KW de potencia. A diferencia de las turbinas tradicionales de combustión, funcionan con menos temperatura y presión a mayor velocidad (100.000 rpm), que a veces no requieren ninguna caja de cambios [46].

Ventajas de MT.

- Compactos en tamaño y ligeros en peso con respecto a los motores de combustión tradicionales por lo que pueden instalarse in situ especialmente si hay limitaciones de espacio.
- Eficiencia mayor al 80% y tienen menores emisiones, por debajo de 10ppm NOx.
- Tecnología bien conocida, arranque sencillo, buena respuesta a la carga, menor mantenimiento debido a su diseño simple.
- Menores costos de operación y menor costo de capital que las máquinas de combustión.
- La moderna interfaz electrónica de potencia entre la MT y la carga o la red eléctrica aumenta su flexibilidad para ser controlada eficientemente.

Turbinas de gas de ciclo simple, pueden ser una máquina de un solo eje, con un compresor de aire y una turbina de potencia (PT) en el mismo eje, o una máquina de eje dividido. Además, tienen un quemador o combustor, y un generador eléctrico girado por la turbina de potencia.

Turbinas de recuperación de gas, son similares a las turbinas de gas de ciclo simple, con un intercambiador de calor especial o recuperador. Este recuperador utiliza la energía térmica de escape de salida para precalentar el aire comprimido en su paso al quemador para aumentar la eficiencia eléctrica de la turbina.

Turbinas de gas de ciclo combinado, utilizan la energía de escape en un generador de vapor de recuperación de calor (HRSG) basado en el concepto de recuperación de calor, que puede incluir un

quemador para aumentar la salida de vapor. El vapor del HRSG impulsa una turbina de vapor, que genera energía además de la turbina de energía principal para aumentar la eficiencia eléctrica total.

2. Pila de combustible (FC). Es un dispositivo utilizado para generar energía eléctrica y proporcionar energía térmica a partir de energía química a través de procesos electroquímicos. Se puede considerar como una batería que suministra energía eléctrica mientras sus combustibles continúen suministrándose. A diferencia de las baterías, FC no necesita ser cargado para los materiales consumidos durante el proceso electroquímico, ya que estos materiales se suministran continuamente. Las capacidades FC varían de KW a MW para unidades portátiles y estacionarias, respectivamente, proporciona energía limpia y calor para varias aplicaciones utilizando combustibles gaseosos y líquidos, ricos en hidrógeno tales como gas natural, gasolina, biogás o propano. Un FC típico consiste en dos electrodos oxidantes separados por un miembro electrolítico, el oxígeno como oxidante pasa a través de un electrodo (cátodo) ya sea a baja presión (utilizando un soplador) o a alta presión (utilizando un compresor de aire). El hidrógeno, como combustible, pasa a través del otro electrodo (ánodo). La tecnología FC se basa en un proceso electroquímico en el que el hidrógeno y el oxígeno se combinan para producir electricidad sin combustión. El catalizador divide el átomo de hidrógeno en un protón y un electrón. El protón pasa a través del electrolito, sin embargo, los electrones crean una corriente separada que se puede utilizar antes de que regresen al cátodo, para ser demodulados con el hidrógeno y el oxígeno en una molécula de agua. Las etapas operativas y los productos de este proceso electroquímico, son la corriente eléctrica de corriente continua, agua, calor y algunos gases NOx y CO2 de baja emisión, con respecto a los generadores tradicionales y por lo tanto se considera una generación de energía eléctrica ambientalmente segura [47].

3. Generador convencional. Contiene una máquina de combustión interna que se encuentra acoplada directamente a un generador eléctrico y es la de mayor presencia en el mercado para casos de emergencia, que utiliza combustibles fósiles como es gasolina, diésel o gas. Tradicionalmente los generadores diesel se consideran sinónimo de generación distribuida debido a su bajo costo y alta confiabilidad. Sin embargo, las cuestiones ambientales y el creciente costo del combustible asociado con estas máquinas ha motivado la búsqueda de mejores alternativas, así las tecnologías de generación pueden clasificarse ampliamente en basadas en energías no renovables y aquellas que facilitan la utilización eficiente de la energía generada con fuentes alternas [48].

El motor diesel ofrece un rendimiento superior de combustible y térmico, mayor potencia de salida, par superior y una mejor durabilidad en comparación con el motor de encendido por chispa. Por otra parte, el motor diesel es una fuente importante de contaminantes atmosféricos, que contribuyen al deterioro de la calidad del aire, poniendo en riesgo la salud de la humanidad. Por lo que existe la necesidad de encontrar nuevos tipos de combustible sostenibles y respetuosos con el medio ambiente para la aplicación de motores diesel. En este sentido se orientan diversas y futuras investigaciones, como es el caso de la aplicación de combustibles alternativos oxigenados como el biodiesel, la solución de acetona-butanol-etanol (ABE) y la adición de agua como estrategias de reformulación de combustible verde dirigidas a reducir los contaminantes del motor cuidando la integridad del rendimiento energético del motor diesel [49].

La energía verde o también denominada alterna, es una nueva energía limpia de recursos renovables como; el sol, el viento y el agua, entre otros. En algunos casos el costo de la infraestructura para la generación de electricidad es superior al de la energía generada a partir de fuentes convencionales, de las cuales a continuación se describen las más comunes,

4. Fotovoltaica (PV). Consiste en arreglos de la unidad básica de PV que es una célula que puede ser de forma cuadrada o redonda, hecha de cristal de silicio dopado, que se pueden interconectar

para formar un módulo o panel y a su vez se pueden realizar arreglos para formar una matriz para generar la potencia requerida. Las células absorben la energía lumínica de la luz solar, donde los fotones de luz obligan a los electrones a fluir y lo convierten en electricidad de corriente continua, generalmente cada célula proporciona de acuerdo a su tamaño con una tensión de salida de 0.5V, por lo que normalmente se construyen arreglos conectados en serie para obtener 12V para cargar las baterías comunes. Por otro lado, dentro de las principales limitantes se tiene la baja potencia de salida, elevado costo de adquisición y la dependencia a ciertas características geográficas y climáticas, entre otras [1].

Entre sus principales aplicaciones se tienen; en telecomunicaciones, iluminación de señales viales, proyectos de techo para iluminación, calefacción doméstica y alumbrado de carreteras. Además, PV proporciona "aplicación de carga directa", como el bombeo de agua solar para su uso o almacenamiento que sólo funciona mientras la luz solar existe. La energía solar se puede utilizar durante las cargas máximas para ajustarse a los picos de la curva de carga. Por ejemplo, durante los días de verano se utiliza PV para proporcionar el exceso de potencia necesario debido a los procesos de aire acondicionado y refrigeración y el resto de la potencia se suministra a la red, por lo que no hay necesidad de ser "despachable".

5. Turbinas de viento (WT). Utiliza el movimiento del aire en el ambiente, consta de un rotor, álabes de turbina, generador, dispositivo de accionamiento o acoplamiento, eje y la cabeza de la turbina, que contiene la caja de cambios y el accionamiento del generador, pueden proporcionar electricidad limpia en forma aislada o como parques eólicos. Las turbinas de viento de acuerdo a su tamaño, suelen ser de dos o más palas. El viento hace girar las palas parecidas a los molinos de viento, que a su vez giran su eje unido a un generador que produce electricidad. Aunque las características energéticas de las granjas eólicas más grandes están más cerca de las fuentes de energía centralizadas, las pequeñas turbinas eólicas, que trabajan como módulos, se pueden combinar con los sistemas fotovoltaicos [1].

Entre las principales ventajas de las turbinas eólicas se tiene,

- Promueve aire limpio a diferencia del combustible tradicional que emite dióxido de azufre ( $\text{SO}_2$ ) o de los óxidos de nitrógeno ( $\text{NO}_x$ ), lo que fomenta el calentamiento global.
- Contribuir a la seguridad global al evitar los residuos peligrosos o radiactivos, a diferencia de la energía nuclear.
- Futuro sostenible ya que no tiene combustible de entrada, sólo el viento que no se agotará por el tiempo.
- Los costos tradicionales de combustible aumentan con el tiempo, pero los costos de la energía eólica disminuyen con el tiempo.

### 3.7. Micro-redes.

#### 3.7.1. Concepto.

Las redes eléctricas hoy en día están enfrentando serios desafíos ambientales, financieros y operacionales, así con el fin de superar estas situaciones se deben modernizar utilizando tecnologías de vanguardia para mejorar su confiabilidad, eficiencia, seguridad y calidad de la potencia suministrada. Además las nuevas redes deben conservar el medio ambiente mediante el uso de una generación renovable más amplia, especialmente en el sistema de distribución para reducir la huella de carbono. Por otro lado deben ser más interactiva con el consumidor, de tal manera que permitan al cliente controlar la cantidad de consumo [50]. La malla con estas características se le denomina red inteligente o Smart Grid (SG).

En este sentido, la automatización inteligente en la red eléctrica ha estado impulsando el desarrollo de la energía futura y en consecuencia un sistema de red inteligente, que sin duda está cambiando la operación de la red eléctrica tradicional. Por otro lado se busca que las SG sean el sistema de energía capaz de detectar, analizar y responder rápidamente a diversas perturbaciones mediante la integración de dispositivos inteligentes y métodos de control avanzado, por lo que las SG pueden definirse como una modernización del sistema de suministro de electricidad que optimiza automáticamente el funcionamiento de sus elementos interconectados, desde el generador central y los distribuidos a través de la red, así como el sistema de distribución, además de los usuarios industriales y los sistemas de instalaciones de almacenamiento de energía y finalmente a los consumidores [7].

### 3.7.2. Características.

Las principales características de una SG se pueden describir como:

- Participación de los consumidores, ya que permite y motiva la participación activa de los consumidores,
- Selecciona opciones de generación, ya que permite acomodar todas las opciones de generación y almacenamiento de energía,
- Activa el mercado de electricidad, dado que permite nuevos productos, servicios y competidores en el mercado,
- Potencia de alta calidad, debe brindar la calidad de energía requerida para el adecuado funcionamiento de los equipos digitales, informáticos y de comunicación,
- Optimiza activos, ya que demanda el funcionamiento de manera eficiente y que optimice la utilización de los activos existentes y nuevos,
- Auto-reparación, mediante los sistemas de control se busca que se anticipe y responda a las perturbaciones del sistema de una manera auto-reparadora.
- Robustez, debe funcionar de manera resistente contra ataques o desastres naturales.

En resumen, una SG debe ser confiable, factible, segura, eficiente, económica y respetuosa con el medio ambiente, por lo que sus objetivos de operación y control son:

- Abordar los desafíos que afrontarán en el futuro el funcionamiento seguro y confiable de las redes eléctricas,
- Desarrollar una sólida base teórica interdisciplinaria que apoye el desarrollo de mejores herramientas para la planificación,
- Operación y control de redes eléctricas interconectadas a diversos niveles de tensión,
- Innovar en el monitoreo y control de la distribución de energía,
- Permitir que los consumidores reaccionen a las condiciones de la red, permitiéndoles participar activamente en su uso energético,
- Aprovechar la generación convencional y las tecnologías emergentes cuando sea posible, incluyendo la energía distribuida,
- Respuesta a la demanda y el almacenamiento de energía, para abordar los desafíos planteados.

Para lograr estos objetivos, la SG tiene que ajustarse con la generación y su posible almacenamiento con disponibilidad, siempre y cuando se requiera, contar con mecanismos de auto-reparación ante perturbaciones, buscar el aprovechamiento óptimo de los activos alcanzando un alto nivel de eficiencia en la operación, mientras que el consumidor debe obtener electricidad de calidad. Además el uso extensivo de tecnología en términos de comunicación y tecnología de la información

en tiempo real es una característica medular para lograr el éxito en la materia teniendo en cuenta el escenario demanda-oferta con precisión en cada instante [51].

### 3.7.3. Componentes.

Entre los principales componentes que debe incluir una SG ya sea como sistemas, subsistemas o dispositivos embebidos se incluyen [7]:

- Medición inteligente, para apoyar la adquisición de datos para evaluar el estado y la integridad de la lectura automática de variables, para la eliminación de las estimaciones de facturación y evitar el robo de energía,
- Comunicación integrada, que incluya la adquisición, protección y control de datos para interactuar con dispositivos electrónicos inteligentes en un sistema integrado,
- Dispositivos de red de área residencial, que permite a los consumidores administrar mejor su consumo y costos de electricidad, utilizando nuevos electrodomésticos y dispositivos inteligentes situados en las instalaciones del cliente,
- Domésticos, éstos incluyen comunicación, interruptores de control de carga y vehículos eléctricos (EV) como estaciones de recarga, que ayudan a los consumidores a gestionar su consumo de energía. En la infraestructura (internet de las cosas) que incluye ruteadores de red y repetidores de señal, sensores inalámbricos y los dispositivos móviles de control que se convierten en elementos importantes en el monitoreo y manejo del uso de energía,
- De almacenamiento de energía, que se realiza mediante dispositivos que almacenan energía para realizar una operación útil en un momento posterior.

### 3.7.4. Comparativa de estructura de red.

En la tabla 3.3, se muestra una perspectiva de la comparación entre las características de una red clásica con lo que se busca en una SG.

Tabla 3.3 Comparación entre tipos de redes.

<b>Red clásica convencional</b>	<b>Red inteligente</b>
Un solo sentido de flujo de energía	Flujo multidireccional en la malla
Comunicación unidireccional	Comunicación multidireccional
Clientes pasivos	Cliente interactivo
Generación centralizada	Generación distribuida renovable
Operación manual	Operación automatizada
Operación predictiva	Operación en tiempo real
Generación basada en combustibles fósiles	Generación limpia
Electrodomésticos convencionales	Aplicaciones inteligentes

### 3.7.5. Modelo matemático.

El problema del despacho económico (ED) es uno de los problemas fundamentales de los sistemas eléctricos, como ya se estudió al inicio de este capítulo donde se mostró que su objetivo es reducir el costo total de generación de energía, considerando las restricciones de seguridad de la red, así el comportamiento del costo en función de la potencia generada se describe en la ecuación (3.18) [52].

$$f(P_g) = \frac{1}{2} a P_g^2 + b P_g + c \quad \dots(3.18)$$

Donde,

$P_g$ .- es la potencia de salida del generador.  $g, a, b, c$ .- son los coeficientes de la función de costo del generador  $g$ .

### 3.8. Contaminación ambiental.

#### 3.8.1. Concepto.

Las actividades de la humanidad han dejado huella en el medio que lo rodea debido a su capacidad de raciocinio, con la modificación del entorno natural para adaptarlo a sus necesidades, así con el crecimiento de la población humana, también se ha incrementado la capacidad de modificación que se consolida en el desarrollo de nuevas tecnologías y en consecuencia el cambio del entorno ha generado daños y alteraciones a la naturaleza, las que se han tornado de mayor severidad y en algunas circunstancias hasta irreversibles. En la medida de la industrialización, la concentración de la población y la tecnificación de la agricultura, como consecuencia se ha introducido gran cantidad de sustancias químicas en el ambiente en forma extra-natural, lo que genera una serie de problemas con impacto significativo en los recursos naturales y el medio ambiente.

Desde el inicio del uso del fuego, el hombre ha contaminado la atmosfera con gases perniciosos, al utilizar el carbón como combustible en el siglo XIX inicio a ser una preocupación general y el aumento del consumo de los combustibles por la industria en las grandes concentraciones, aunado a la aparición del motor de combustión, que con su explosivo crecimiento ha empeorado esta situación al pasar los años.

El flujo de energía en un ecosistema es muy importante, ya que las interacciones de las comunidades o poblaciones con los factores abióticos se encuentran determinadas en cierta forma por este flujo, lo que a su vez produce y permanece cierto orden, así cualquier substancia, energía u organismos añadidos en cantidades, tiempo y condiciones tales, que causen desequilibrio ecológico en un medio y que lo haga inseguro o no apto para su uso, es llamado contaminante. En consecuencia, siempre que una alteración negativa del estado natural del medio y por lo general, se genera como consecuencia de la actividad humana considerándose una forma de impacto ambiental [53].

#### 3.8.2. Clasificación.

De acuerdo a [53] existen diversas clasificaciones de la contaminación, sin embargo la principal se debe a su origen y se refiere a;

- Contaminación natural, que es resultado de fenómenos naturales, como la erosión y las erupciones volcánicas, está relacionada con la composición de suelos, aguas y los componentes de algunos alimentos. Esta clase de contaminación es parte de la evolución natural y no es tan grave como la antropogénica.
- Contaminación antropogénica, es la generada por las actividades del hombre y es la más grave por su naturaleza, debida a la gran variedad y cantidad de contaminantes generados que afectan a los recursos naturales básicos, como son, el aire, los suelos y el agua, aunado que no existe un proceso de recuperación natural que lo contrarreste.

Algunas de las alteraciones medioambientales más graves relacionadas con los fenómenos de contaminación son los escapes radiactivos, el smog, el efecto invernadero, la lluvia ácida, la

destrucción de la capa de ozono, la eutrofización de las aguas o las mareas negras, éstos tipos de contaminación dependen de determinados factores y que afectan distintamente a cada ambiente y se presentan como:

- Contaminación del agua,
- Contaminación del aire,
- Contaminación del suelo,
- Contaminación radioactiva,
- Contaminación lumínica,
- Contaminación sonora,
- Contaminación visual.

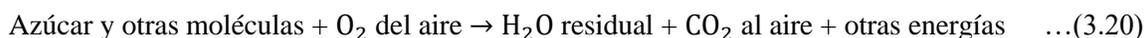
### 3.8.3. El ciclo del carbono y el oxígeno.

De acuerdo a [54], el ciclo bioquímico, es la relación natural de los organismos vivos con el ambiente físico en su ecosistema, mediante procesos se transfieren algunos elementos y compuestos entre los componentes bióticos y abióticos, siendo los carbohidratos el combustible para los organismos vivientes. El ciclo del carbono es el término que se utiliza para describir la manera que el carbono circula a través del aire, plantas, animales y el suelo, basado en los procesos de la fotosíntesis y respiración, entre otros.

El proceso de la fotosíntesis puede resumirse en la siguiente reacción,



La molécula de azúcar producida durante la fotosíntesis es el material básico para otro tipo de compuestos que la planta utiliza en mantenerse y seguir creciendo. Cuando las plantas sin luz y los animales desprenden energía de sus moléculas en el proceso de respiración, utilizan oxígeno para quemar estas moléculas y exhalan  $\text{CO}_2$  más agua como productos, así la respiración permite a los organismos capturar la energía química almacenada en la comida y producir energía para mantener sus funciones vitales, como son el crecimiento y la reproducción. En este sentido el proceso de la respiración puede resumirse como sigue,



La materia y energía de los productos de desecho de los organismos y de animales o vegetales muertos se aprovecha por las bacterias para reciclarlos, sin embargo en los casos en que esta materia no se reincorpora a la atmosfera como  $\text{CO}_2$  y se deposita en el subsuelo bajo condiciones de temperatura y presión pueden convertir esta materia orgánica en petróleo o gas natural, que son los combustibles fósiles. Así se constituye el ciclo del oxígeno, que está íntimamente relacionado con el ciclo del carbono y se refieren a la circulación del oxígeno a través de diferentes etapas o ambientes, donde los seres vivientes necesitan oxígeno que lo toman del aire y del agua por la respiración y previamente dicho oxígeno se desprendió hacia la atmosfera por las plantas verdes durante la fotosíntesis.

### 3.8.4. El ciclo del nitrógeno.

El ciclo del nitrógeno se refiere a la circulación del nitrógeno a través de plantas y animales, donde el 78% en volumen de la mezcla de gases del aire corresponde al nitrógeno, el cual es uno de los elementos esenciales para la vida. El nitrógeno es necesario en la producción de las macromoléculas que son un componente esencial en la síntesis del ácido desoxirribonucleico (ADN) y el ácido

ribonucleico (ARN), además para la construcción de proteínas y para otras moléculas que lo contienen, constituyendo una parte esencial para el crecimiento y la reproducción. A pesar de que el nitrógeno es un elemento abundante en la atmosfera en su estado gaseoso, no se puede utilizar directamente por los organismos vivos, sino a través de un proceso que se conoce como la fijación del nitrógeno, en donde se combina con otros elementos para formar amoniaco, los nitritos y los nitratos, siendo ésta la forma biológica común para su asimilación, como sucede con las bacterias, algas y líquenes que viven en el suelo, al transformar el nitrógeno del aire en amoniaco y otros compuestos similares. Algunas de estas bacterias de fijación del nitrógeno viven en las raíces de algunas plantas como la del frijol, que proveen a las bacterias de carbohidratos para comida y así las bacterias transforman el nitrógeno a una forma que las plantas puedan utilizar. Cuando los animales se comen las plantas, obtienen el nitrógeno que requieren las proteínas de las mismas. Por otro lado, los compuestos de nitrógeno regresan al suelo a través de los residuos de los animales o a través de sus cadáveres. Finalmente el nitrógeno puede regresar a la atmosfera por la acción de desnitrificación de las bacterias que convierten los nitritos en gas nitrógeno [54].

### 3.8.5. Contaminación del aire.

En el funcionamiento del ecosistema sin la intervención de la actividad de la humanidad, los contaminantes que se depositan en la atmosfera son de origen natural, como es el caso del humo, ceniza y gases provenientes de volcanes e incendios forestales, el polvo y arena de tormentas en las regiones áridas, niebla y humedad en áreas selváticas. En estos casos, a excepción de los extremos como las erupciones volcánicas, no representan un problema que pudieran dañar a la flora y la fauna en gran magnitud, ya que en forma normal la naturaleza logra asimilar estos contaminantes consiguiendo un equilibrio en los ecosistemas.

Sin embargo, desde que el hombre descubrió la utilización del fuego se inició a generar contaminación antropogénica, provocada por los gases de la combustión de los diversos usos y que se han desarrollado con la sofisticación en que el hombre se provee de sus satisfactores. En este contexto es necesario mencionar el término smog, que es una mezcla de las dos palabras inglesas que significan humo y niebla respectivamente, smoke y fog, que en la actualidad es muy común para las personas que habitan en las grandes ciudades, este vocablo que sirve para definir un tipo de contaminación asociado con los asentamientos de niebla y el humo emitido por las industrias, en la actualidad, se aplica para definir también los contaminantes primarios del aire como son, los óxidos de azufre ( $SO_x$ ), óxidos de nitrógeno ( $NO_x$ ) e hidrocarburos (HC), que son aquellos emitidos directamente de la fuente a la atmosfera, que se miden y encuentran en la forma que fueron emitidos, además de los contaminantes secundarios como el ozono ( $O_3$ ) y el peroxiacetil nitrato (PAN) que se forman en la atmosfera por reacciones fotoquímicas, por hidrolisis u oxidación [55].

### 3.8.6. Contaminantes generados en una micro-red.

La emisión de contaminantes en la operación de una micro-red pueden ser diversos, sin embargo los de mayor cantidad e impacto son los derivados del funcionamiento de los generadores convencionales y se describen a continuación [8].

1. Los óxidos de carbono ( $CO_x$ ) son gases invisibles e inodoros que se producen por la combustión incompleta. Su mayor concentración se encuentra en áreas con una gran cantidad de tráfico y especialmente en los meses de invierno. Los límites máximos de concentración establecidos por la Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos de América (EPA) establecen 35 ppm en promedio para 1 hora y 9 ppm para un tiempo mayor a 8 horas. Este compuesto es de los más peligrosos por su especial capacidad para combinarse con la hemoglobina y causar la asfixia

química, ocasionada por la reducción del oxígeno en el corazón y en el cerebro. Los métodos para el monitoreo de la calidad del aire pueden ser infrarrojos no dispersivo y cromatografía de gases.

2. El dióxido de azufre ( $\text{SO}_2$ ), se produce principalmente por la combustión de carbón, aceite combustible o diesel. El estándar de la EPA es de 0.14 ppm promedio para un tiempo mayor de 24 horas, el  $\text{SO}_2$  provoca constricción en las vías áreas respiratorias y representa un peligro particular para los asmáticos. Para las personas que realizan ejercicio es también un problema ya que ocasiona irritación en la garganta, en su detección y análisis se utilizan métodos intermitentes o continuos, siendo los más utilizados el método colorimétrico y el conducto métrico.

3. Los óxidos de nitrógeno ( $\text{NO}_x$ ), es la familia de este compuesto el principal componente del smog urbano, que con frecuencia es un producto de la combustión y consiste en un gas irritante que puede incrementar la susceptibilidad a las infecciones, también provoca constricción de las vías aéreas respiratorias lo que es peligroso para los asmáticos. Su concentración aumenta en los meses de invierno. La EPA establece una concentración de 0.053 ppm en promedio para un año y en su detección y análisis se determina indirectamente y se utiliza un método colorimétrico.

### 3.8.7. Técnicas de regeneración del aire.

En [53] se plantea que los compuestos contaminantes se pueden reducir desde su fuente, al sustituir el material que lo genera con un similar que descargue producto inocuo. Sin embargo, cuando esto no es posible se deben buscar alternativas como es el proceso de absorción de los contaminantes a través de líquidos, así a través del contacto directo hace que la transferencia de materia suceda en dos fases en direcciones controladas por los gradientes de concentración de los componentes individuales. En la tabla 3.4 se muestra un comparativo de valores entre un aire que se considera limpio y los límites de un aire contaminado.

Tabla 3.4 Comparación de las concentraciones de gases contaminantes entre el aire limpio y polucionado (Concentración en ppm.).

Substancia	Aire limpio	Aire contaminado
$\text{CO}_2$	320	400
CO	0.1	40-70
$\text{CH}_4$	1.5	2.5
$\text{N}_2\text{O}$	0.25	?
$\text{NO}_x$	0.001	0.2
$\text{O}_3$	0.02	0.5
$\text{SO}_2$	0.0002	0.2
$\text{NH}_3$	0.01	0.02

Los contaminantes emitidos al aire por una micro-red pueden ser gases o partículas, así para su regeneración existen cuatro categorías generales de equipo: adsorción, absorción, condensación y combustión, lo que determinará directamente la función de costo de regeneración [53].

- La adsorción consiste en remover los contaminantes gaseosos de una corriente de aire, impregnando las moléculas del gas en una superficie sólida como carbón activado, pueden ser regenerativos y/o no regenerativos. Los regenerativos pueden reutilizarse y los no regenerativos

generalmente presentan problemas por el incremento en el volumen del residuo y del adsorbente, ya que cuanto más se utiliza, más se incrementa.

- La absorción es la disolución de un contaminante gaseoso en un solvente líquido, aprovechan al máximo el sistema gas líquido mezcla, como ejemplo se tienen las cámaras de dispersan, torres de dispersan y columnas empacadas.
- La condensación es el proceso en el cual un vapor o un gas contaminante se transforma en líquido incrementando la presión o enfriándolos, ésta se lleva a cabo cuando se incrementa la presión o cuando se disminuye la temperatura.
- La combustión que elimina el contaminante utilizándolo como combustible de lo cual se obtiene como resultado energía en forma de calor o luz, incluye flama directa, incineradores térmicos e incineradores catalíticos.

Para definir la técnica adecuada para el control o regeneración de los contaminantes es necesario tener en cuenta los objetivos, los procesos, los insumos y los costos, entre otros, que esta actividad implicará. En la figura 3.4, se muestra un esquema de alternativas de regeneración de contaminantes.

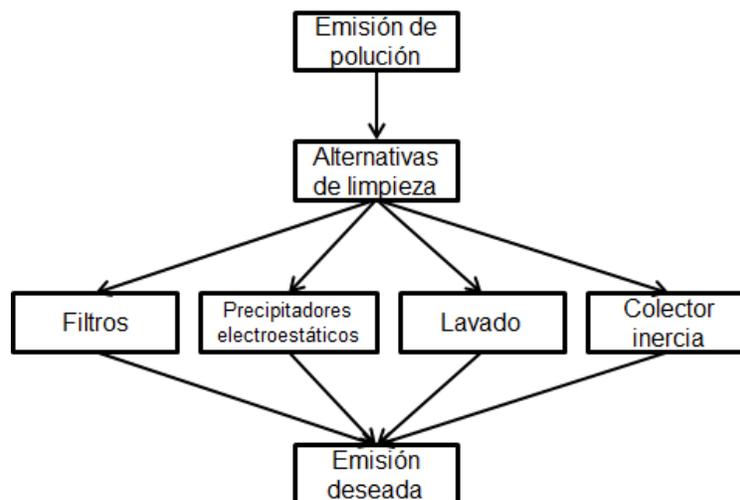


Figura 3.4 Proceso de selección de método de limpieza.

Con la finalidad de elegir la técnica de control por el tamaño de las partículas, que pueden ser solidas o líquidas, se deben considerar factores como; el flujo de gas, la temperatura, el contenido de la mezcla y las características relevantes tales como el grado de abrasión, acidez y explosividad. De éstos factores se obtendrá la eficiencia para remover los contaminantes, dicha eficiencia se calcula de la siguiente forma,

$$\text{Eficiencia} = (\text{Peso inicial} - \text{Peso absorbido}) / \text{Peso inicial} \dots (3.21)$$

La recuperación de contaminantes utiliza diversos equipos; como cámaras de asentamiento, ciclones, precipitadores electrostáticos y filtros de tela. Así el control de las partículas normalmente requiere de dos o más dispositivos para obtener la más alta eficiencia posible. En la actualidad, está en desarrollo los dispositivos colectores gaseosos y partículas con énfasis a que los procesos reduzcan la emisión de contaminantes. En forma particular ha registrado mayor interés el bióxido de carbono, pues se considera un producto inevitable en la combustión, sin embargo tiene sus

beneficios por lo que se están desarrollando técnicas para recuperar este compuesto, lo cual en algunas situaciones resulta difícil ya que este compuesto se encuentra en altas concentraciones y mezclado en los asentamientos de los gases contaminantes en las grandes zonas urbanas [8].

### 3.8.8. Costos de tratamiento de polución.

En [56] y [11] se examinan algunos de los costos de las plantas de producción, donde se utilizaron datos experimentales de Abatimiento de la Contaminación (PACE) mediante el análisis de los efectos de la regulación de la calidad del aire, en términos de incremento de costos de operación y gastos adicionales de capital para la reducción de la contaminación atmosférica (APA), con los que se deduce la ecuación de estimación general de gastos en función de diversas variables, que se muestra en (3.22).

$$APA_{it} = \alpha + \Phi_{ct} + \beta' X_{it} + \pi' E_n + \psi' Z_{nct} + \varepsilon_{it} \quad \dots(3.22)$$

Donde  $i$  define un establecimiento que está en el lugar  $c$  para la industria  $n$  en el tiempo  $t$ . En este caso, la variable dependiente se refiere a los costos de operación y al gasto de capital APA, en la planta  $i$  en el tiempo  $t$ , que es una función de una constante  $\alpha$  que se adiciona a un efecto del lugar por año  $\Phi_{ct}$  que se suma a un vector de características  $X_{it}$ . También considera un conjunto de indicadores ( $E_n$ ) que describen si la planta es un emisor alto de cada uno de los criterios contaminantes del aire e indicadores ( $Z_{nct}$ ) de si la planta está sometida a una regulación.

El modelo de la ecuación (3.22) es robusto a la heterogeneidad de diversas variables de factores transitorios y permanentes. Sin embargo ya al analizar la función de costo en forma directa de la variable de la potencia producida por una máquina de combustión interna, que es el caso que nos ocupa en una micro-red, así de [40] se tiene que el modelo de costo del tratamiento de gases en el sistema de micro-red se describe de acuerdo a la ecuación (3.23).

$$C_T = \sum_{i=1}^N \sum_k \beta_{ik} C_k(P_i) + \sum_k \beta_{gridk} C_k(P_{grid}) \quad \dots(3.23)$$

Donde,  $C_T$  es el costo de tratamiento de polución,  $i$  es el número de generador distribuido (DG) en la micro-red,  $N$  es el número total de generadores de la micro-red,  $k$  es el tipo de emisiones contaminantes ( $CO_2$ ,  $SO_2$ ,  $NO_x$ ),  $C_k$  es el costo de tratamiento de la  $k$  clase de contaminantes por kilogramo,  $\beta_{ik}$  es el coeficiente de las emisiones contaminantes en gr/KVA,  $P_i$  es la potencia de salida del DG  $i$  en KVA,  $\beta_{gridk}$  es el coeficiente de emisiones contaminantes de la red en gr/KVA,  $P_{grid}$  es la potencia de salida de la red en KVA.

# Capítulo 4 Caso de estudio.

## 4.1. Introducción.

En el sistema de suministro de energía eléctrica con la filosofía de la generación centralizada que se basa en una malla de gran potencia, surge como una alternativa de desarrollo la aparición de las micro-redes, que pueden contener unidades de generación distribuida, dispositivos de almacenamiento y cargas controlables, todo lo anterior situado cerca del consumidor dentro de un área física limitada como ya se explicó en los puntos 3.6 y 3.7 de este trabajo, en esta configuración las unidades de producción eléctrica en micro-redes pueden ser generadores convencionales o Fuentes de Energía Renovable (RES), por otro lado los dispositivos de almacenamiento pueden incluir, baterías eléctricas, compresores de aire y/o acumulación por bombeo entre otros [44], además puede funcionar en el modo de conexión a una malla superior para la transferencia bidireccional de energía o en el modo en isla donde es totalmente auto-soportada. En este contexto las micro-redes deben ser capaces de garantizar el funcionamiento del sistema de energía cumpliendo las necesidades de fiabilidad del suministro eléctrico, sostenibilidad, calidad de la energía y reducir los costos por pérdidas en la línea de electricidad, transmisión y distribución.

A pesar del anuncio reciente de la salida de Estados Unidos del acuerdo de París sobre el cambio climático, en tiempos recientes el uso de las RES ya sea en forma aislada o en conjunto, se han convertido en las preferidas, dados sus beneficios a largo plazo sobre el medio ambiente, además de la reducción en los costos de generación [57]. En este contexto, la publicación reciente de diversos artículos muestra que actualmente se están desarrollando investigaciones con el enfoque de optimización en la gestión, operación y control, en la búsqueda de minimizar o maximizar alguna función objetivo prevista para determinar la óptima expedición o despacho, como compromiso de los generadores convencionales, RES y dispositivos de almacenamiento. Adicional a la naturaleza estocástica de la fuente primaria de las RES en micro-redes requieren una estrategia de funcionamiento óptimo para su control en el modo en isla [58] y generalmente se complementan las deficiencias con generadores convencionales, así en el caso de las micro-redes en modo conectado se tiene la alternativa de suplir los requerimientos desde la red superior. Por otro lado el objetivo es minimizar el costo de generación de electricidad y determinar su funcionamiento óptimo, de tal manera que satisfaga las restricciones de equilibrio de carga y los incrementos ocasionales que pudiesen presentarse dentro de la normalidad.

En [59], se considera una micro-red formada por módulos fotovoltaicos con baterías, conexión a una red superior y diferentes políticas de mercado, donde se utiliza como herramienta de solución del modelo matemático, la heurística de Optimización Enjambre de Partículas (PSO), donde la función objetivo es reducir al mínimo el costo de los generadores diesel y determinar la salida de potencia óptima para las fuentes de energía en condiciones de invierno y verano. Este trabajo fue ampliado y mejorado en [60] con la inclusión de las fuentes de energía eólica y la aplicación de estrategia de un Modelo Control Predictivo (MPC) para estimar las variaciones de la demanda y en [61] se introduce el concepto de Respuesta a la Demanda (DR), que se ocupa del alivio de la carga en el lado de la demanda basado en categorizar a los clientes por su nivel de participación y bonificar en función a la restricción en su consumo, con lo que se garantizan las condiciones óptimas de operación tanto en el lado de la oferta como en la demanda. Finalmente el presente trabajo añade a las publicaciones mencionadas el factor de costo por regeneración de contaminantes, lo que adquiere importancia en la operación de las micro-redes ubicadas en las grandes ciudades que están sujetas a programas de contingencia ambiental.

Los estudios para la modelación de la MPC se basan en la información de los hábitos de consumo histórico de los clientes en la micro-red como se concluye de los trabajos en [62]. Por otro lado es importante investigar los casos de factibilidad de aplicación práctica en la incorporación del concepto DR en el proceso de gestión de energía de una micro-red de tal manera que sea benéfico o rentable para los clientes participantes y no simplemente reducir al mínimo los costos de combustible como se tiene previsto en algunas publicaciones como [63] [64].

El desarrollo del modelo presentado en este trabajo es flexible ya que ayuda a compensar el efecto que pueda presentar la naturaleza estocástica de RES mientras se considera MPC y utiliza simultáneamente DR donde se busca asegurar que el incentivo es mayor al costo de reducción para suministrar energía al sistema de cargas, también considera el factor del programa de contingencia ambiental para tomar la mejor decisión sobre el uso de los DG. Por otra parte en las restricciones se incluye el límite de presupuesto de bonificación que no afecte a la rentabilidad tanto del cliente como al administrador de la micro-red.

Es importante mencionar que al momento de iniciar a escribir el presente trabajo no se encontró publicado algún trabajo que incluyera la totalidad de los factores o restricciones que se incluyen en el caso de estudio.

#### 4.2. Planteamiento.

En el presente trabajo se estudia una micro-red que se esquematiza en la figura 4.1, que incluye fuentes tipo rampa de energía eólica, módulos fotovoltaicos,  $I$  máquinas generadoras a base de diesel, interconexión para transferencia bidireccional de energía a una malla superior,  $J$  clientes en programa de incentivos de DR, además la micro-red se encuentra ubicada en una ciudad que implementa un programa de contingencia ambiental que obliga a las emisoras de polución a restringir su actividad, lo que se compensa con la regeneración de los contaminantes emitidos.

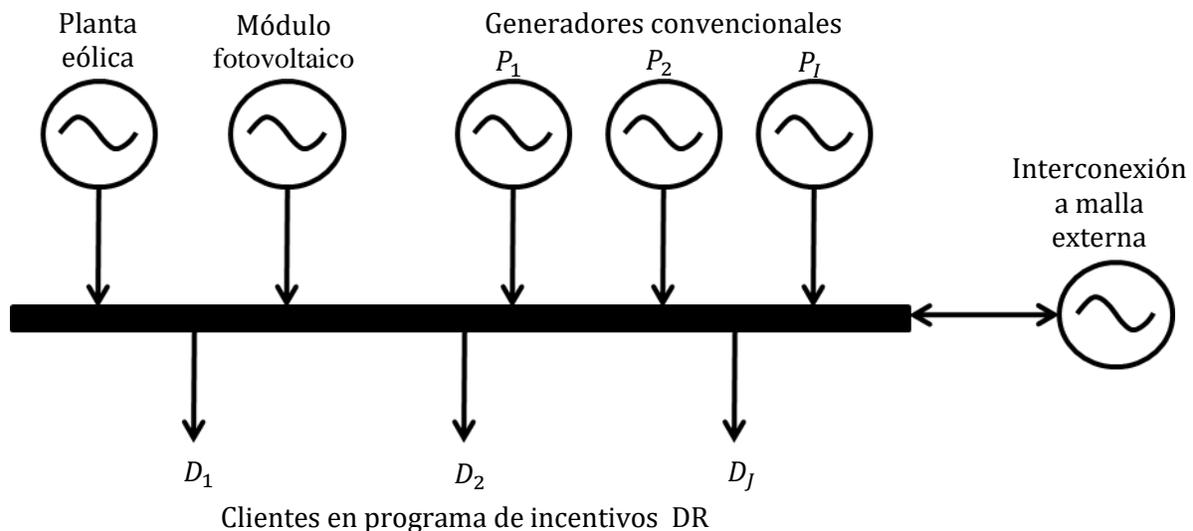


Figura 4.1 Esquema de la micro-red en estudio.

El caso considera resueltas las siguientes situaciones:

- La micro-red opera con un sistema de control que la sincroniza en frecuencia a la malla superior.
- Cada elemento del sistema tiene sus dispositivos de autoprotección funcionando en forma adecuada.
- Se asume que la micro-red contiene la instrumentación para el monitoreo y el equipamiento para todas las acciones de control.
- Todas las plantas generadoras operan en la forma rampa y en consecuencia contienen su sistema de ajuste y control.
- Se cuenta con las interfaces y protocolos de comunicación para el adecuado funcionamiento en el monitoreo y gestión.
- Los valores de limitación de carga, los ha definido el cliente y no afectan la rentabilidad de su operación de tal manera que la bonificación resultante representa un beneficio real en el programa DR.
- El administrador de la micro-red cuenta con acceso a un sistema de procesamiento de contaminantes autónomo que le permite cumplir con las restricciones del plan de contingencia ambiental.
- Para el análisis de optimización se considera un periodo de estudio de un día dividido en 24 lapsos de una hora.
- Se cuenta con los datos de entrada al modelo de optimización para MPC y DR en cada uno de los lapsos en el periodo de estudio.

### 4.3. Modelado.

#### 4.3.1. Función de costos.

La ecuación que describe el comportamiento general de los costos de la micro-red con la topología que se muestra en la figura 4.1, se describe por la expresión (4.1).

$$C_{Tot} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I c_i(P_{i,t}) + \sum_{t=1}^T c_r(Pr_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J c_b(Pdr_{j,t}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_k C_k(P_{i,t}) + C_F \quad \dots(4.1)$$

Donde:

- $C_{Tot}$  Función de costos de la micro-red.  
 $t$  Lapso de análisis.  
 $T$  Cantidad total de lapsos en el periodo de análisis.  
 $i$  Número de generador convencional diesel.  
 $I$  Cantidad total de generadores convencionales en la micro-red.  
 $c_i(P)$  Función de costos de los generadores convencionales expresada como dependiente de la potencia entregada a la micro-red.  
 $Pr_t$  Energía transferida entre la micro-red y la malla superior en el lapso  $t$ .  
 $c_r(P)$  Función de costos de transferencia de potencia entre la micro-red y la malla superior.  
 $j$  Número de cliente en programa DR.  
 $J$  Cantidad total de clientes en el programa DR.  
 $Pdr_{j,t}$  Energía que se restringirá a cada cliente  $j$  en el lapso  $t$  de acuerdo al programa DR.  
 $c_b(P)$  Función de costos derivado de la bonificación por la potencia reducida del programa DR.

- $k$  Es el contaminante que se regenerará dentro del plan de contingencia ambiental, que en este caso se considera CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub> y NO<sub>x</sub>.
- $C_k(P)$  Función de costos de regeneración de polución en función de la potencia generada.
- $C_F$  Función de costos fijos, que incluye costos como administración y depreciación, entre otros.

En (4.1) se excluyen los costos de generación eólica y fotovoltaica, ya que la materia prima en esos procesos actualmente no tiene costo y todos los costos de operación, mantenimiento y administración de la micro-red se incluyen en la función  $C_F$ , la cual como lo menciona su nombre son constantes y en consecuencia se excluyen del análisis de optimización ya que independiente del valor que resulte del estudio, su valor se mantendrá. Entonces los factores que influyen en la función de costos para encontrar su valor extremo y que se refiere a los valores a determinar son, la potencia producida por los generadores convencionales, la energía transferida a o desde la red superior, la restricción en la demanda de cada cliente y la regeneración de la polución en los casos de contingencia ambiental que ya estará implícita en la producción de los generadores convencionales. Ahora si introducimos un factor de ponderación  $w$  con valor entre 0 y 1, que defina el peso de los costos de producción de energía y la bonificación a los clientes en DR  $(1-w)$ . La función de costos objetivo a minimizar de nuestro modelo será (4.2).

$$\text{Min} \left\{ (w) \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I c_i(P_{i,t}) + \sum_{t=1}^T c_r(Pr_t) \right] + (1-w) \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J c_b(Pdr_{j,t}) \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_k C_k(P_{i,t}) \right\} \quad \dots(4.2)$$

#### 4.3.2. Costo de generadores convencionales diesel.

De [65] se toma la función de costo por combustible del generador convencional como una función cuadrática de la generación de potencia activa y se da como en (4.3), a partir de las variables que influyen en la eficiencia de la máquina, sin olvidar que la parte fija de la totalidad de costos se integra en  $C_F$  de la micro-red.

$$C_i(P_{i,t}) = a_i P_{i,t}^2 + b_i P_{i,t} \quad \dots(4.3)$$

Donde:

$a_i$  Es el coeficiente cuadrático de la función de costo del generador convencional  $i$ .

$b_i$  Es el coeficiente lineal de la función de costo del generador convencional  $i$ .

$P_{i,t}$  Potencia entregada por el generador convencional  $i$  en el lapso  $t$ .

#### 4.3.3. Costo de interconexión.

Para el caso de la interconexión con la malla superior, se tiene los siguientes casos,

1. Si la producción total de todos los generadores de la micro-red no puede cumplir con la demanda incluyendo la disminución por DR, entonces la energía tiene que ser comprada a la malla principal
2. Cuando el abastecimiento de la micro-red supera a la demanda, el exceso de energía será entregada en venta a la malla superior.
3. Cuando toda la potencia generada en la micro-red se consume como si se encontrará operando en modo isla.

Por otro lado, al considerar los Precios Marginales de Localización (LMP) [66] que se utilizan para la compra-venta de energía entre la malla superior y la micro-red de una interfaz específico de bus que se determina como  $\gamma_t$ , la que generalmente es asimétrica en la compra-venta, entonces la función de costo por energía transferible negociada está dada por (4.4)

$$C_r(Pr_t) = \begin{cases} \gamma_c Pr_t & Pr_t > 0 \\ 0 & Pr_t = 0 \\ -\gamma_v Pr_t & Pr_t < 0 \end{cases} \quad \dots(4.4)$$

Donde,

$Pr_t$  Es la energía transferida entre la micro-red y la malla superior.

$\gamma_c$  Es precio de compra de energía de la malla superior.

$\gamma_v$  Es precio de venta de energía a la malla superior.

#### 4.3.4. Costo de bonificación DR.

De [61] se adopta la definición de función del costo incurrido por un cliente que se clasifica con la variable  $\theta$  y que se normaliza en el rango [0,1], en la disminución del consumo de energía en  $x$  KVA, así como el beneficio que el cliente obtiene de la interrumpibilidad y se muestra en (4.5).

$$c_b(Pdr_{j,t}) = y_{j,t} - \lambda_{j,t} x_{j,t} \quad \dots(4.5)$$

Donde,

$y_{j,t}$  Valor de la compensación monetaria para el cliente  $j$  en el lapso  $t$ .

$x_{j,t}$  Energía reducida por cliente participante  $j$  en el lapso  $t$ .

$\lambda_{j,t}$  Factor de costo del cliente  $j$  en el lapso  $t$  que toma el administrador de la micro-red para reducción de energía y se define como el valor de interrumpibilidad de energía [67].

De esta misma manera el comportamiento del costo incurrido por un cliente de tipo  $\theta$  que disminuye el consumo de energía  $x$  KVA en función de la potencia reducida en DR hacia el administrador de la micro-red se describe por (4.6) [61].

$$C(\theta, x) = (K_1 x^2 + K_2 x - K_2 x \theta) \quad \dots(4.6)$$

Donde,

$K_1$  Coeficiente cuadrático de costos al cliente.

$K_2$  Coeficiente lineal de costo al cliente.

$\theta$  Tipo de cliente para bonificación normalizado en [0,1].

#### 4.3.5. Costo de tratamiento de polución.

En la ecuación (3.22) del presente trabajo se muestra la expresión que se obtuvo en forma experimental del proceso de una planta de regeneración de contaminantes donde se consideran los diversos factores que intervienen, sin embargo en (3.23) y de [40] se menciona que al analizar los costos en función de la potencia se puede expresar con un comportamiento lineal como se indica en (4.7).

$$C_k(P_{i,t}) = \alpha_t \beta_k P_{i,t} \quad \dots(4.7)$$

Donde,

$\beta_k$  Factor de costo de emisión del contaminante  $k$ . Operación normal  
 $P_{i,t}$  Energía generada por la máquina  $i$  en el lapso  $t$ .

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{Operación normal} \\ 1 & \text{Contingencia ambiental} \end{cases}$$

#### 4.3.6. Restricciones.

Derivado de la naturaleza de equilibrio de la energía eléctrica en el bus de la micro red, la energía que se suministra es igual a la que se consume en cualquier instante, así para el lapso  $t$  se tiene la ecuación (4.8).

$$\sum_{i=1}^I P_{i,t} + P_{W_t} + P_{S_t} + P_{r_t} = \sum_{j=1}^J D_{j,t} - \sum_{j=1}^J x_{j,t} \quad \dots(4.8)$$

Donde

$P_{i,t}$  Energía suministrada por el generador convencional  $i$  en el lapso  $t$ .  
 $P_{W_t}$  Energía suministrada por la planta eólica en el lapso  $t$ .  
 $P_{S_t}$  Energía suministrada por la planta fotovoltaica en el lapso  $t$ .  
 $P_{r_t}$  Energía transferida de o hacia la malla superior en el lapso  $t$ .  
 $D_{j,t}$  Demanda de energía del cliente  $j$  en el lapso  $t$ .  
 $x_{j,t}$  Energía restringida por el cliente  $j$  en el lapso  $t$ .

De los límites inferior y superior de rampa en que opera cada uno de los generadores convencionales para realizar el nivel de ajuste y control para la transferencia de energía en la micro-red, se tiene (4.9).

$$P_{i,min} \leq P_{i,t} \leq P_{i,max} \quad \dots(4.9)$$

La contribución de energía de las RES para el bus de la micro-red estará definida por el nivel de producción que se tenga en el lapso  $t$  en función del suministro del energético primario que es el viento y la iluminación solar, la cual funcionará en el rango que se muestra en (4.10) y (4.11) respectivamente. Por otro lado el rango de transferencia de potencia entre la micro-red y la malla superior estará acotada a los límites contratados comercialmente y a la capacidad de la instalación física.

$$0 \leq P_{W_t} \leq W_t \quad \dots (4.10)$$

$$0 \leq P_{S_t} \leq S_t \quad \dots (4.11)$$

$$-Pr_{m\acute{a}x} \leq Pr_t \leq Pr_{m\acute{a}x} \quad \dots (4.12)$$

Donde,

$W_t$  Es la potencia nominal de producción de la planta eólica.  
 $S_t$  Es la potencia nominal de producción de la planta fotovoltaica.  
 $Pr_t$  Es la potencia transferida entre la malla superior en el lapso  $t$ .  
 $Pr_{m\acute{a}x}$  Es la capacidad máxima permitida de transferencia entre la malla superior.

Para asegurar que los generadores convencionales operen en el rango de ajuste de rampa en los cambios de lapso de estudio se tiene (4.13)

$$DR_i \leq P_{i,t+1} - P_{i,t} \leq UR_i \quad \text{para } t = 1, 2, 3, \dots, T - 1 \quad \dots (4.13)$$

Donde,

$DR_i$  Es el límite inferior de rampa del generador convencional  $i$ .

$UR_i$  Es el límite superior de rampa del generador convencional  $i$ .

Así al considerar (4.5) y (4.6) para garantizar que el incentivo diario total recibido por el cliente sea igual o superior a su costo diario de interrupción se logra con (4.14)

$$\sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] \geq 0 \quad \dots (4.14)$$

Ahora de la categorización de los clientes participantes en el plan DR y al considerar la función de costos de (4.6), así como la búsqueda de que la reducción de consumo en los clientes obtenga el mayor beneficio, se tiene (4.15).

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] \\ \geq \sum_{t=1}^T [y_{j-1,t} - (K_{1,j-1}x_{j-1,t}^2 + K_{2,j-1}x_{j-1,t} - K_{2,j-1}x_{j-1,t}\theta_{j-1})] \\ \text{para } j = 2, 3, \dots, J \end{aligned} \quad \dots (4.15)$$

Con (4.16) se asegura que la sumatoria de bonificación a los clientes en DR en el período de estudio no exceda la cantidad monetaria  $UB$  autorizada que afecte la rentabilidad en la administración de la micro-red.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J y_{j,t} \leq UB \quad \dots (4.16)$$

En (4.17) se asegura que la energía total restringida al cliente  $j$  dentro del periodo de estudio, sea inferior a su capacidad interrumpibilidad  $CM$  dentro del plan DR.

$$\sum_{t=1}^T x_{j,t} \leq CM_j \quad \dots (4.17)$$

#### 4.3.7. Variables a determinar.

Las variables de decisión en la búsqueda de la optimización de costos se muestran a continuación:

$x_{j,t}$  Cantidad de energía que reducirá el cliente participante  $j$ .

$y_{j,t}$  Cantidad de pago abonada al cliente  $j$ .

$Pw_t$  Energía generada por la planta eólica en el intervalo  $t$ .

$Ps_t$  Energía producida por el módulo fotovoltaico en el intervalo  $t$ .

$Pr_t$  Energía transferida de o hacia la malla superior en el intervalo  $t$ .

$P_{i,t}$  Energía producida por el generador convencional  $i$  en el intervalo  $t$ .

#### 4.4. Modelo del caso de estudio.

En esta tesis se muestra el modelo matemático a programar a continuación:

##### 4.4.1. Índices.

- $i$  Identificación del generador convencional.
- $j$  Identificación del cliente conectado a la micro-red y en programa DR.
- $t$  Identificación del lapso de análisis en el periodo de estudio.
- $k$  Identificación del tipo de contaminante a regenerar.

##### 4.4.2. Parámetros.

- $DR_i$  Límite inferior de producción del generador convencional  $i$ , o potencia mínima.
- $UR_i$  Límite superior de producción del generador convencional  $i$ , o potencia máxima.
- $a_i$  Coeficiente cuadrático de costos del generador convencional  $i$ .
- $b_i$  Coeficiente lineal de costos del generador convencional  $i$ .
- $DT_t$  Demanda total en el lapso  $t$ .
- $\alpha_t$  Activación del plan de contingencia ambiental en el lapso  $t$ .
- $S_t$  Potencia de la planta solar disponible en el lapso  $t$ .
- $W_t$  Potencia de la planta eólica disponible en el lapso  $t$ .
- $K_{1j}$  Coeficiente cuadrático de costos al cliente  $j$ .
- $K_{2j}$  Coeficiente lineal de costos al cliente  $j$ .
- $\theta_j$  Clasificación del cliente  $j$  en programa DR.
- $CM_j$  Presupuesto de restricción de energía del cliente  $j$  en programa DR.
- $\lambda_{j,t}$  Factor de costo de interrumpibilidad del  $j$  en el lapso  $t$  en programa DR.

##### 4.4.3. Variables de decisión.

- $P_{i,t}$  Ajuste de potencia del generador convencional  $i$  en el lapso  $t$ .
- $PS_t$  Ajuste de producción de potencia de la planta solar en el lapso  $t$ .
- $PW_t$  Ajuste de producción de potencia de la planta eólica en el lapso  $t$ .
- $Pr_t$  Ajuste de potencia transferida con la malla superior en el lapso  $t$ .
- $x_{j,t}$  Ajuste de energía reducida por cliente participante  $j$  en el lapso  $t$ .
- $y_{j,t}$  Valor de la compensación monetaria para el cliente  $j$  en el lapso  $t$ .

##### 4.4.4. Función objetivo.

$$\text{Min} \left\{ (w) \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I c_i(P_{i,t}) + \sum_{t=1}^T c_r(Pr_t) \right] + (1-w) \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J c_b(Pdr_{j,t}) \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_k C_k(P_{i,t}) \right\}$$

##### 4.4.5. Restricciones.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I P_{i,t} + PW_t + PS_t + Pr_t &= \sum_{j=1}^J D_{j,t} - \sum_{j=1}^J x_{j,t} \\ P_{i,\min} &\leq P_{i,t} \leq P_{i,\max} \\ 0 &\leq PW_t \leq W_t \\ 0 &\leq PS_t \leq S_t \\ -Pr_{\max} &\leq Pr_t \leq Pr_{\max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DR_i &\leq P_{i,t+1} - P_{i,t} \leq UR_i \quad \forall t = 1, 2, 3, \dots, T - 1 \\
\sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] &\geq 0 \\
\sum_{t=1}^T [y_{j,t} - (K_{1,j}x_{j,t}^2 + K_{2,j}x_{j,t} - K_{2,t}x_{j,t}\theta_j)] &\geq \sum_{t=1}^T [y_{j-1,t} - (K_{1,j-1}x_{j-1,t}^2 + \\
&K_{2,j-1}x_{j-1,t} - K_{2,j-1}x_{j-1,t}\theta_{j-1})] \quad \forall j = 2, 3, \dots, J \\
\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J y_{j,t} &\leq UB \\
\sum_{t=1}^T x_{j,t} &\leq CM_j \\
\alpha &= \begin{cases} 0 & \text{Operación normal} \\ 1 & \text{Contingencia ambiental} \end{cases}
\end{aligned}$$

#### 4.5. Selección de solucionador

Del análisis del modelo matemático del caso de estudio, se detecta que las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.6), (4.14) y (4.15) son del tipo cuadrática, por lo que el problema es de este mismo tipo y en consecuencia se puede utilizar el método exacto de programación cuadrática, que es el que se utilizó como solucionador en la aplicación del software.

#### 4.6. Datos.

Tabla 4.1 Valores MCP de producción de RES, contingencia ambiental y demanda con interrumpibilidad del plan DR.

$t$	$W_t$	$S_t$	$\alpha_t$	$D_{Rot,t}$	$\lambda_{1,t}$	$\lambda_{2,t}$	$\lambda_{3,t}$
1	7.56	0	0	31.83	1.57	1.57	1.57
2	7.50	0	0	31.40	1.40	1.40	1.40
3	8.25	0	0	31.17	2.20	2.20	2.20
4	8.48	0	0	31.00	3.76	3.76	3.76
5	8.48	0	0	31.17	4.50	4.50	4.50
6	9.42	0	0	32.10	4.70	4.70	4.70
7	9.82	0	1	32.97	5.04	5.04	5.04
8	10.3	7.997	1	34.10	5.35	5.35	5.35
9	10.8	10.56	1	37.53	6.70	6.70	6.70
10	11.0	13.61	1	38.33	6.16	6.16	6.16
11	10.9	14.97	0	40.03	6.38	6.38	6.38
12	10.6	15.15	0	41.17	6.82	6.82	6.82
13	10.4	14.78	0	39.67	7.30	7.30	7.30
14	10.1	14.59	0	41.70	7.80	7.80	7.80
15	9.67	13.56	0	42.10	8.50	8.50	8.50
16	8.98	11.83	0	41.67	7.10	7.10	7.10
17	8.37	10.17	0	40.70	6.80	6.80	6.80
18	7.61	7.667	1	40.07	6.30	6.30	6.30
19	6.70	0	1	38.63	5.80	5.80	5.80
20	5.72	0	1	36.40	4.20	4.20	4.20
21	7.21	0	0	34.10	3.80	3.80	3.80
22	7.75	0	0	32.80	3.01	3.01	3.01
23	7.88	0	0	32.50	2.53	2.53	2.53
24	7.69	0	0	32.00	1.42	1.42	1.42

La micro-red considera atender 3 clientes de acuerdo al esquema de la figura 4.1. Los valores de coeficientes de costos tanto de las máquinas convencionales como de DR a los clientes se tomó de [61]. Se considera un periodo programación de 1 día con 24 lapsos de 1 hora. En la Tabla 4.1 se muestran los valores del modelo MPC para la demanda y generación de las RES ( $W_t$  y  $S_t$ ) en la micro-red, así como el detalle de los valores interrumpibilidad de energía en cada lapso para cada cliente. La Tabla 4.2 muestra los coeficientes de los costos de combustible, límites de potencia de salida y las tasas de límites rampa de los generadores convencionales. Finalmente la tabla 4.3 muestra los coeficientes de la función de costo al cliente, su clasificación y el valor límite de restricción de demanda.

Tabla 4.2 Coeficientes de máquinas convencionales.

$i$	$a_i$	$b_i$	$DR_i$	$UR_i$
1	0.06	0.5	0	4
2	0.03	0.25	0	6
3	0.04	0.3	0	9

Tabla 4.3 Coeficientes para clientes del plan DR.

$j$	$K_{1j}$	$K_{2j}$	$\theta_j$	$CM_j$
1	1.079	1.32	0	30
2	1.378	1.63	0.45	35
3	1.847	1.64	0.9	40

Las plantas eólica y solar tienen valores máximos de producción de salida de 11 KVA y 15 KVA respectivamente, la potencia máxima que puede ser transferido entre la red principal y micro-red se da como 4 KVA y el presupuesto diario de bonificación a clientes  $UB$  con que cuenta el operador de la micro-red es de 500 unidades monetarias.

#### 4.7. Método de solución.

Para la realización de la presente tesis se siguió el método científico en sus modalidades de; investigación documental, observación científica, experimental, lógica deductiva directa y concordancia, entre otros. El procedimiento general se describe a continuación:

Se analizó la información del estudio para una micro-red con DR en [61], donde se plantean los valores y condiciones de funcionamiento sin considerar los costos de regeneración de polución en plan de contingencia ambiental, dicho estudio se basa en el método no lineal de Gradiente de Reducción Generalizada (GRG) y utiliza como solucionador el Sistema de Modelado Multidimensional Interactivo Avanzado (AIMMS) para construir y resolver el modelo matemático, en un equipo con Procesador central Intel (R) con 8 GB de memoria RAM.

Se realizó la reproducción de resultados de [61] en un equipo con procesador AMD-12 7th gen, 64 Bit en 4 capas a 2.5 GHz y 8 GB de memoria RAM, en plataforma Windows 10 Home, mediante el uso del Lenguaje de Modelado y Optimización (MLO) Lingo en su versión 16.0 [68], que es una herramienta integral diseñada para facilitar la construcción y resolución de modelos de optimización matemática, capaz de resolver eficientemente la mayoría de clases de modelos de optimización ya que contiene un conjunto completo de solucionadores rápidos integrados, que son seleccionados en forma automática al analizar el modelo para definir el adecuado, eligiendo entre, optimización lineal, no lineal convexa y no convexa, cuadrática, restringida cuadráticamente, entera, solución

global y estocástico, además cuenta con técnicas para aislar la fuente de infactibilidad del subconjunto más pequeño de las restricciones originales.

Una vez que se comprobó la veracidad del funcionamiento del algoritmo con los resultados que se muestran en las tablas 4.4 y 4.5, se complementó el modelo con el término correspondiente al funcionamiento del plan de contingencia ambiental con su consecuente condicionamiento en el grupo de restricciones del modelo.

Con el modelo ya terminado, se realizó el análisis de sensibilidad mediante el análisis de cada una de las variables independientes, como lo muestran las gráficas 4.2, 4.3 y 4.4. Posteriormente se realizaron corridas para diversas instancias y sus resultados se muestran en la tabla 4.6. Finalmente se realizó el manual de uso del programa realizado para adecuarlo a las particularidades de cada caso y se muestra en el Anexo 1.

#### 4.8. Análisis y comparación de resultados.

Tabla 4.4 Comparativa entre la referencia [61] y resultados para el lado de la oferta.

$t$	$PW_t$		$PS_t$		$P_{1,t}$		$P_{2,t}$		$P_{3,t}$		$Pr_t$	
1	7.56	7.56	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
2	7.5	7.5	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
3	8.25	8.25	0	0	4	4	6	6	9	8.657	3.19	3.17
4	8.48	8.48	0	0	4	4	6	6	9	8.657	-0.08	1.34
5	8.48	8.48	0	0	4	4	6	6	9	8.657	-1.54	0.70
6	9.42	9.42	0	0	4	4	6	6	9	8.658	-1.99	0.47
7	9.82	9.82	0	0	4	4	6	6	9	8.657	-2.27	0.56
8	10.35	10.35	7.99	7.99	3.60	2.836	6	6	7.90	6.816	-4	-4.00
9	10.88	10.88	10.56	10.56	3.16	2.399	6	6	7.25	6.16	-4	-4.00
10	11.01	11.01	13.61	13.61	2.49	1.72	6	6	6.23	5.141	-4	-4.00
11	10.94	10.94	14.97	14.97	2.55	1.784	6	6	6.33	5.237	-4	-4.00
12	10.68	10.68	15	15	2.89	2.121	6	6	6.83	5.743	-4	-4.00
13	10.42	10.42	14.78	14.78	2.30	1.533	6	6	5.95	4.862	-4	-4.00
14	10.15	10.15	14.59	14.59	3.04	2.271	6	6	7.06	5.968	-4	-4.00
15	9.67	9.67	13.56	13.56	3.47	2.705	6	6	7.71	6.62	-4	-4.00
16	8.98	8.98	11.83	11.83	4	4	6	6	9	8.67	-4	-4.00
17	8.37	8.37	10.17	10.17	4	4	6	6	9	8.657	-4	-2.36
18	7.61	7.61	7.66	7.66	4	4	6	6	9	8.657	-3.38	0.83
19	6.7	6.7	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
20	5.72	5.72	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
21	7.21	7.21	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
22	7.75	7.75	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
23	7.88	7.88	0	0	4	4	6	6	9	9	4	4.00
24	7.69	7.69	0	0	3	4	5	6	8	9	4	4.00
Tot	211.5	211.5	134.7	134.7	86.50	81.37	143.00	144.00	198.26	187.82	-14	0.71

En las tablas 4.4 y 4.5 los datos sombreados del lado izquierdo son los que se publican en [61] y los valores situados en las celdas inmediatas derechas corresponden a los resultados del algoritmo programado en la presente tesis, de donde se observa en la tabla 4.4 una leve diferencia en 31 casos de los 144 total considerados en el período de estudio para la distribución de las diferentes fuentes generadoras en los lapsos de tiempo. Al comparar los totales de energía restringida en la tabla 4.5, se observa que solo existe 0.03 KVA de diferencia para  $x_1$ , sin embargo al sumar las diferencias en

la corrida del programa del presente trabajo se detecta una mejoría en  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  que corresponde a las bonificaciones al cliente y representa una ventaja para el administrador de la red de 4.63 unidades monetarias.

Tabla 4.5 Comparativa entre la referencia [61] y resultados para el plan DR.

$t$	$x_{1,t}$		$x_{2,t}$		$x_{3,t}$		$y_{1,t}$		$y_{2,t}$		$y_{3,t}$	
1	0	0.00	0.4	0.40	0.87	0.87	0	0.00	0.57	0.57	1.56	1.55
2	0	0.00	0.18	0.18	0.71	0.72	0	0.00	0.21	0.21	1.06	1.06
3	0	0.00	0.08	0.29	0.64	0.80	0	0.00	0.09	0.38	0.87	1.31
4	0.89	0.45	1.22	0.86	1.49	1.22	2.04	0.80	3.13	1.79	4.33	2.95
5	1.58	0.79	1.75	1.13	1.89	1.42	4.78	1.71	5.81	2.76	6.89	3.96
6	1.77	0.88	1.9	1.20	2	1.47	5.69	2.00	6.67	3.06	7.68	4.26
7	2.08	1.04	2.15	1.32	2.18	1.57	7.42	2.53	8.27	3.60	9.13	4.79
8	0.32	1.11	0.77	1.38	1.15	1.61	0.53	2.81	1.5	3.88	2.64	5.05
9	0.92	1.72	1.24	1.85	1.5	1.96	2.13	5.44	3.22	6.40	4.42	7.43
10	0.63	1.43	1.01	1.63	1.33	1.79	1.27	4.08	2.32	5.11	3.51	6.24
11	0.74	1.53	1.1	1.71	1.4	1.86	1.57	4.56	2.64	5.57	3.83	6.66
12	0.96	1.76	1.27	1.89	1.53	1.99	2.27	5.64	3.36	6.59	4.55	7.60
13	1.15	1.95	1.42	2.03	1.64	2.10	2.95	6.65	4.04	7.52	5.22	8.46
14	1.42	2.22	1.63	2.25	1.8	2.26	4.07	8.23	5.13	8.97	6.26	9.76
15	1.77	2.57	1.91	2.52	2	2.46	5.73	10.49	6.71	11.01	7.72	11.57
16	1.84	1.99	1.96	2.07	2.04	2.12	6.1	6.92	7.05	7.77	8.03	8.68
17	2.4	1.85	2.39	1.96	2.36	2.04	9.36	6.16	10.04	7.07	10.71	8.04
18	3.25	1.62	3.06	1.78	2.86	1.91	15.67	4.98	15.65	5.97	15.6	7.03
19	3.14	3.15	2.98	2.98	2.8	2.80	14.82	14.87	14.9	14.89	14.95	14.95
20	2.61	2.62	2.56	2.56	2.49	2.49	10.83	10.89	11.36	11.36	11.87	11.88
21	1.01	1.02	1.31	1.31	1.56	1.56	2.45	2.48	3.54	3.54	4.73	4.73
22	0.24	0.24	0.7	0.70	1.1	1.10	0.37	0.39	1.31	1.31	2.43	2.43
23	0.06	0.06	0.56	0.56	1	1.00	0.08	0.09	0.93	0.93	2	2.00
24	1.19	0.00	1.45	0.42	1.66	0.89	3.12	0.00	4.21	0.62	5.37	1.61
Tot	29.97	30.00	35.0	35.0	40.0	40.0	103.25	101.72	122.66	120.91	145.36	144.01

```

Local optimal solution found.
Objective value:           5.342250
Infeasibilities:          0.000000
Total solver iterations:   1210
Elapsed runtime seconds:   0.48

Model Class:               QP

Total variables:           288
Nonlinear variables:       144
Integer variables:         0

Total constraints:         244
Nonlinear constraints:     145

Total nonzeros:           984
Nonlinear nonzeros:       264

```

Lingo 16.0 Solver Status [Microred] ×

<b>Solver Status</b>		<b>Variables</b>	
Model Class:	QP	Total	288
State:	Unknown	Nonlinear	144
Objective:	0	Integers	0
Infeasibility:	0	<b>Constraints</b>	
Iterations:	0	Total	244
		Nonlinear	145
		Nonzeros	Total
<b>Extended Solver Status</b>		Total	984
Solver Type:	...	Nonlinear	264
Best Obj:	...	<b>Generator Memory Used (K)</b>	
Obj Bound:	...	99	
Steps:	...	<b>Elapsed Runtime (hh:mm:ss)</b>	
Active:	...	00:00:00	

Figura 4.2 Información de encabezado en proceso de Lingo.

El resultado del encabezado de la corrida se muestra en la figura 4.2, donde se aprecia que la función objetivo tiene 288 variables de las cuales 144 son no lineales, además se generan 244 ecuaciones para las restricciones con 145 no lineales. Se soluciona con programación cuadrática en 1,210 iteraciones que trascurren en 0.48 seg.

En la tabla 4.6 se presentan las diferentes instancias en las que se analizó el comportamiento del algoritmo del sistema de la micro-red con diferentes variables como análisis de sensibilidad.

Tabla 4.6 Instancias del modelo.

<i>Instancia</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
Dem. Total	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1	865.1
Pta. eólica.	211.5	211.5	211.5	211.5	211.5	211.5	211.5	211.5	211.5	192.8
Pta. Fot.	134.7	134.7	134.7	134.7	134.7	134.7	134.7	134.7	134.7	19.9
Gen. Conv. 1.	81.4	84.7	95.2	95.4	59.3	52.3	51.9	0.6	95.5	96.0
Gen. Conv. 2.	144.0	144.0	144.0	144.0	119.2	126.2	126.4	31.4	144.0	144.0
Gen. Conv. 3.	187.8	195.1	210.5	210.8	146.6	139.4	139.7	16.7	207.9	216.0
Interconexión.	0.7	-9.9	35.9	39.1	88.7	96.0	96.0	365.2	-33.6	96.0
Restricción E.	105.0	105.0	33.3	29.6	105.0	105.0	105.0	105.0	105.0	100.5
Bon. a Ctes.	366.6	356.1	104.3	120.9	459.9	365.2	365.2	362.8	647.0	339.3
Lapsos de Cont. Amb.	0	0	0	0	11	24	24	24	0	0
F.O. Costo	-5.3	-10.6	204.7	214.9	393.6	1,440.0	1,528.8	674.8	233.4	-250.9
Iteraciones.	1,210	574	301	449	609	437	427	733	193	281
Tpo. pro.(seg)	0.40	0.29	0.15	0.29	0.25	0.25	0.30	0.35	0.22	0.22

De las instancias de la tabla 4.6 se tiene:

- a.* Se consideran los valores originales de la publicación en [61].
- b.*  $\gamma_v = 1.15$  y  $\gamma_c = 2.85$  como precio de venta y compra en la transferencia de energía con la malla superior.
- c.*  $\lambda_t = 0$ , como coeficiente de interrumpibilidad para todos los clientes.
- d.*  $\theta_j = 0$  con la misma prioridad para los clientes y  $\lambda_t = 0$  en el plan DR.
- e.*  $\alpha_t = 1$ , con 11 horas de contingencia ambiental.
- f.*  $\alpha_t = 1$ , con las 24 horas de contingencia ambiental.
- g.*  $\gamma_v = 1.15$  y  $\gamma_c = 2.85$  como precio de venta y compra en la transferencia de energía con la malla superior y  $\alpha_t = 1$ , con las 24 horas de contingencia ambiental.
- h.*  $\gamma_v = 1.15$  y  $\gamma_c = 2.85$  como precio de venta y compra en la transferencia de energía con la malla superior,  $\alpha_t = 1$ , con las 24 horas de contingencia ambiental y  $Pr_{m\acute{a}x} = 16$  KVA.
- i.*  $w = 1$ , con toda la prioridad a la generación sobre el plan DR.
- j.*  $w = 0$ , con toda la prioridad al plan DR sobre la generación.

En la figura 4.2 se muestran los límites de operación del generador convencional 1, así como los límites con su rango de operación de la regeneración de CO<sub>2</sub> en la micro-red y el plano de la gráfica representa el comportamiento de los costos en función de las dos variables mencionadas anteriormente.

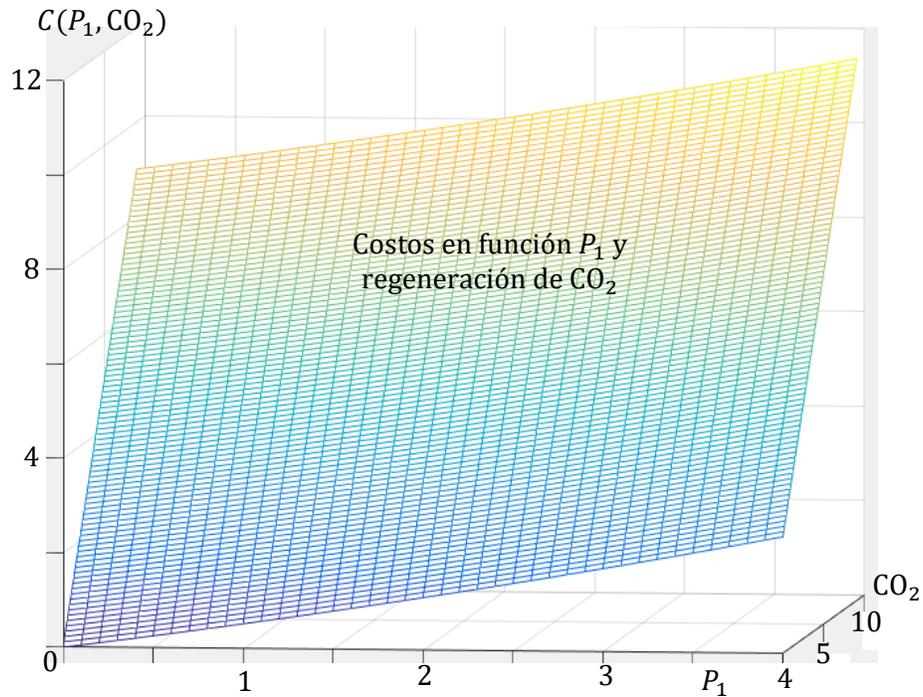


Figura 4.2 Costos en función de  $P_1$  y  $CO_2$ .

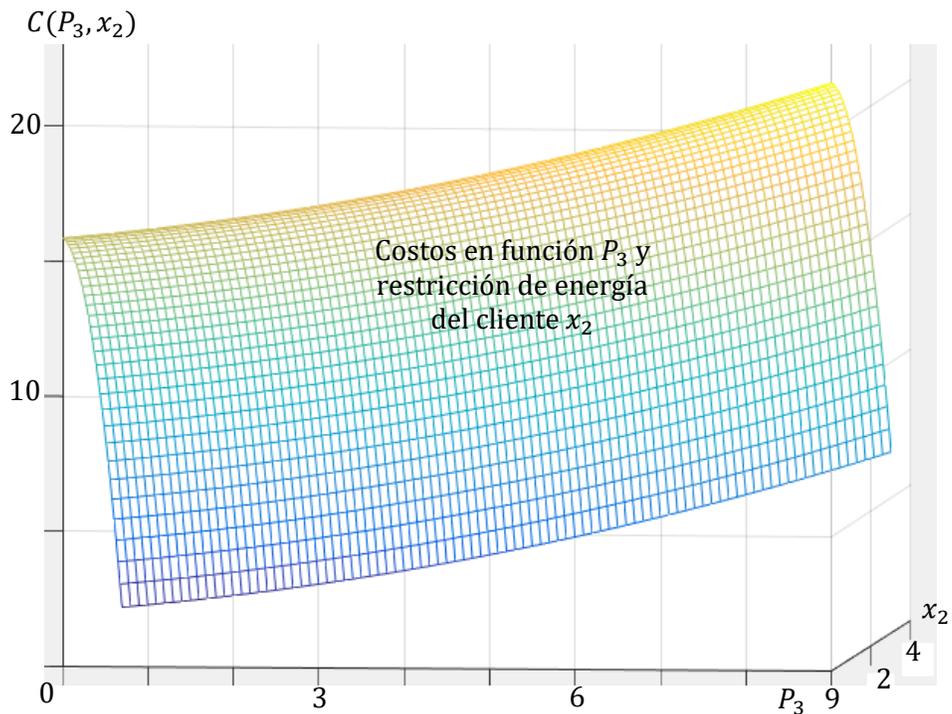


Figura 4.3 Costos en función de  $P_3$  y  $x_2$ .

En la figura 4.3 se muestran los límites de operación del generador convencional 3 y los límites con su rango de operación de la restricción de energía del cliente 2 en la micro-red y el plano de la gráfica representa el comportamiento de los costos en función de las dos variables mencionadas anteriormente.

Dado que en este caso las variables de estudio dentro de la expresión de costos se pueden expresar en función de la potencia, se realiza una representación gráfica en la figura 4.4 que en forma independiente puede dar una orientación sobre el comportamiento de la mencionada función de costo. Por otro lado, las variables de restricción de energía  $x_j$ , potencia producida  $P_i$ , interconexión  $Pr$  y regeneración de contaminantes  $Cb_k$  ( $CO_2$ ,  $SO_2$ ,  $NO_x$ ) son independientes entre sí, lo que complica su representación gráfica para definir o mostrar sus valores extremos. Por lo que el análisis a pesar de estar en la misma gráfica se realiza en forma independiente, entonces en la instancia de estudio los valores que puede adquirir una variable son los que define la línea que se representa en la gráfica. Así para satisfacer un valor de la demanda instantánea o de un lapso, las variables adquirirán un valor sobre la línea que corresponde a su comportamiento para la atención de la demanda, en consecuencia sus valores definirán el costo instantáneo, sin olvidar que para determinar el costo total es necesario sumar los costos fijos.

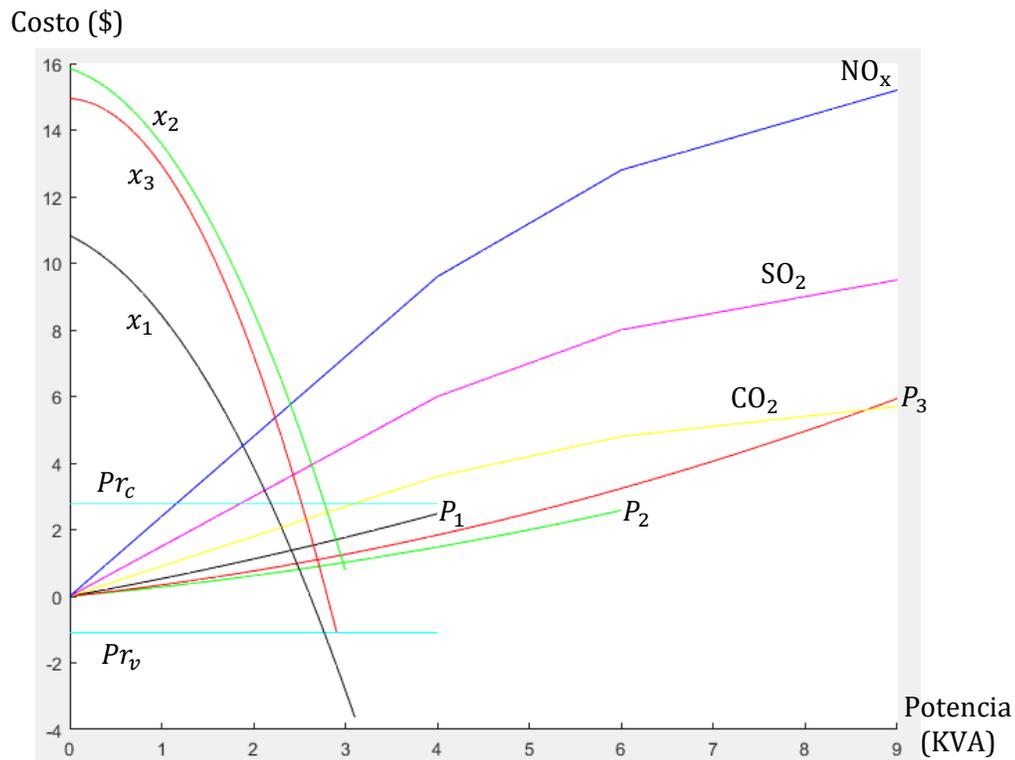


Figura 4.4 Variables en función de la potencia.

## Conclusiones.

Se cumplió con el objetivo general planteado al inicio del presente trabajo, ya que el programa desarrollado cumple en forma total con los aspectos planteados, sin embargo para su adecuada implementación en un sistema integral, es necesario desarrollar todos los rubros que se definen como consideraciones en el punto 4.2 del presente trabajo, lo que abre gran oportunidad de investigación y desarrollo ante la inminente presencia de las micro-redes con la apertura del mercado energético, con gran énfasis en el uso de fuentes alternas de energía en la inminente búsqueda de reducción de costos y mejora en el impacto de la emisión de contaminantes.

Existen diversas clases de micro-redes desde la óptica del tipo de corriente en operación, sin embargo al seleccionar una que opere con los parámetros de voltaje y frecuencia de una malla superior hace más versátil su funcionamiento para el intercambio de energía y en consecuencia se reducen las pérdidas.

El caso de estudio planteado tiene aplicación en las ciudades con apertura en el mercado para la producción y comercialización de energía eléctrica y con problemas de contaminación ambiental.

El modelo matemático planteado en el presente trabajo es general para la configuración de la micro-red definida en el caso de estudio e incluye términos que describen las diversas situaciones que se pueden presentar durante la operación, como lo es la ponderación entre costos de producción, bonificación a clientes y contingencia ambiental. De tal forma que en caso de que no se presente alguna de estas situaciones, el valor del término se va a cero.

Derivado del modelo del sistema y que tanto la función objetivo como sus restricciones están bien definidas, se deduce la factibilidad de utilizar un método de optimización exacto, que en este caso se optó por la programación cuadrática. Sin embargo en la versión del software utilizado (Lingo 16.0) se contiene la posibilidad de analizar las ecuaciones y definir en forma automática el método de solución.

Para el caso de estudio, las condiciones propias se definen por las características técnicas de cada uno de los elementos de la micro-red, así como las políticas de funcionamiento definidas al administrador, que en este contexto definen las limitantes o acotaciones del sistema.

Los rangos de operación de los elementos de la micro-red los determinan sus especificaciones técnicas y forman parte de las restricciones del modelo, sin embargo la ejecución del algoritmo desarrollado determina el punto de operación óptimo.

El modelo matemático que se seleccionó fue el resultado de la investigación del estado del arte e integración de diversas publicaciones que iniciaron con el modelado de las micro-redes a las que se les añadieron algún componente en cada estudio, de tal manera que se adoptó el modelo resultante con base a la óptica de aplicación real en mercado y que se considera el de mayor viabilidad. Aquí es importante notar que existen modelos que consideran sistemas de almacenamiento de energía, sin embargo por su costo y niveles de eficiencia se concluye que los inversionistas optarán por posponer su implementación.

Del análisis de sensibilidad en las diferentes instancias, se observa que el valor de costo se eleva en proporción al tiempo de contingencia, donde el algoritmo ayudará en forma determinante para la toma de decisión en la selección del suministro necesario a través de la malla superior.

De la literatura consultada se encontró que en el presente año se incrementó la cantidad de aplicaciones y estudios de las micro-redes, en particular existe una marcada tendencia a la integración de servicios de instrumentación y telecomunicaciones sobre el suministro energético bajo el esquema de las Smart-grid, sin embargo todavía está pendiente definir una solución factible y rentable en lo referente al contenido armónico, que no impacte en la efectividad de su funcionamiento.

La implementación o adecuación del algoritmo desarrollado es de fácil aplicación y consiste en solo seguir una sencilla metodología de captura de datos de entrada de cada caso particular.

## **Aportaciones.**

El presente trabajo en su capítulo 2 presenta en forma sencilla y sintetizada los conceptos de optimización, programación matemática, métodos y técnicas de solución, que implican la investigación de diversas publicaciones, que puede utilizarse como base de un curso de la materia.

La integración de un modelo matemático generalizado que incluye las variables de mayor aplicación y puede considerarse en cualquier ejercicio real.

Un programa de cómputo sencillo y eficiente que realiza la optimización en costos que incluye la documentación para su fácil implementación.

## **Publicaciones.**

Se aceptó una presentación al congreso “EasyChair for CSMIO 2017” para el mes de octubre. En desarrollo una publicación para la revista Energy.

## **Trabajos futuros.**

Como seguimiento al presente trabajo, se abre un abanico de proyectos factibles a realizar, iniciando por cada una de las consideraciones definidos en el punto 4.2 que por economía de escritura solo se hace referencia y a continuación se enlistan los que a mi consideración pueden ser de mayor impacto.

Estudiar a mayor detalle el término de la función de costos de regeneración de polución ya que estos costos al igual que los del combustible, ahora se encuentran dependientes de la volatilidad del mercado y en consecuencia variantes en el tiempo.

Desarrollo de un modelo matemático desde la perspectiva multiobjetivo o como alternativa incluir en el modelo actual el término de costos fijos, que en análisis detallado realmente registran variaciones.

Desarrollo de un sistema de control para la transferencia de energía con ajuste tipo rampa de los inversores estáticos utilizados en las plantas fotovoltaicas.

# Apéndice.

Metodología para el análisis y aplicación del programa desarrollado.

Los pasos a seguir para la aplicación del programa se muestran en la siguiente tabla

Secuencia	Actividad.
Paso 1	Definir la configuración de la micro-red de la línea 4 a 9.
Paso 2	Obtener los datos del modelo MPC.
Paso 3	Clasificar clientes $D_j$ en DR.
Paso 4	Obtener coeficientes de función de costo en $P_i$ .
Paso 5	Obtener coeficientes de bonificación de costo en $x_i$ .
Paso 6	Definir datos complementarios del programa.
Paso 7	Capturar información en el programa de Lingo de acuerdo a su definición, de la línea 14 a 39.
Paso 8	Ejecutar el programa.
Paso 9	Tomar los valores de las variables de salida.

Código fuente del programa en Lingo 16.0

```

1 Model: !Modelo de micro-red 3 generadores y 3 clientes;
2
3 SETS:
4 Mc/1..3/: Pmin, Pmax, DR, UR, al, bl; !Inf. de Generadores convencionales;
5 hr/1..24/: DT, S, W, Pr, PW, PS, CP, Alfa; !Inf. de lapzos de despacho;
6 Cte/1..3/: K1, K2, Tetha, CM; !Inf. de clientes en programa de beneficio;
7 TPol/1..3/:Beta; ! Tipo de emisiones contaminantes CO2, SO2, NOx gr/KVA;
8 Pot(Mc,hr): P, CC, LRP; !Variable P(i,t);
9 Con(Cte,hr): X, Y, Lambda; !Variable X(j,t);
10 ENDSETS
11
12 ! Inicio de datos particulares de la micro-red;
13 DATA:
14 pcg = 0.5; !w ponderación de los costos de generación convencional e interconexión;
15 PrCon = 1; ! Costo de consumo por KVA de la red superior;
16 PrVta = 1; ! Precio de venta por KVA a la red superior;
17 PWm = 11; ! Máxima energía eólica generada KVA;
18 PSm = 15; ! Máxima energía solar generada KVA;
19 Prm = 4; ! Máxima energía transferible bidireccional con la malla superior;
20 Pmin = 0, 0, 0; !Pmin(i) Potencia mínima del generador convencional i;
21 Pmax = 4, 6, 9; !Pmax(i)Potencia mínima del generador convencional i;
22 DR = 3, 5, 8; !DR(i) limite inferior de rampa del generador i;
23 UR = 3, 5, 8; !UR(i) limite superior de rampa del generador i;
24 al = 0.06, 0.03, 0.04; !al(i) coeficiente cuadrático de costos del generador convencional i;
25 bl = 0.5, 0.25, 0.3; !bl(i) coeficiente lineal de costos del generador convencional i;
26 K1 = 1.079, 1.378, 1.847; !K1(j) coeficiente cuadrático de costos al cliente j;
27 K2 = 1.32, 1.63, 1.64; !K2(j) coeficiente lineal de costos al cliente j;
28 Tetha = 0, 0.45, 0.9; !Tetha(j) clasificación de cliente para determinar la bonificación;
29 CM = 30, 35, 40; !CM(j) Capacidad de reducción por cliente;
30 UB = 500; !Presupuesto total de bonificación a los clientes;
31 Beta = 0.3, 0.5, 0.8; !Coeficiente de costo de emisión a regenerar CO2, SO2, NOx;
32 ! (Horario) Lapsos de contingencia ambiental en el periodo de estudio;
33 Alfa = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0;
34 !Presupuesto en KVA por intervalo de despacho t de S->Solar, W->Eolico y DT->Demanda total;
35 S = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7.99, 10.56, 13.61, 14.97, 15, 14.78, 14.59, 13.56, 11.83, 10.17, 7.66, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
36 W = 7.56, 7.5, 8.25, 8.48, 8.48, 9.42, 9.82, 10.35, 10.88, 11.01, 10.94, 10.68, 10.42, 10.15, 9.67, 8.98, 8.37, 7.61, 6.7,
5.72, 7.21, 7.75, 7.88, 7.69;
37 DT = 31.83, 31.4, 31.17, 31, 31.17, 32.1, 32.97, 34.1, 37.53, 38.33, 40.03, 41.17, 39.67, 41.7, 42.1, 41.67, 40.7, 40.07, 38.63, 36.4, 34.1, 32.8, 32.5, 32;
38 !Coeficiente de interrumpibilidad por cliente j en el lapso t;
39 Lambda = 1.57 1.4 2.2 3.76 4.5 4.7 5.04 5.35 6.7 6.16 6.38 6.82
7.3 7.8 8.5 7.1 6.8 6.3 5.8 4.2 3.8 3.01 2.53 1.42
1.57 1.4 2.2 3.76 4.5 4.7 5.04 5.35 6.7 6.16 6.38 6.82
7.3 7.8 8.5 7.1 6.8 6.3 5.8 4.2 3.8 3.01 2.53 1.42
1.57 1.4 2.2 3.76 4.5 4.7 5.04 5.35 6.7 6.16 6.38 6.82
7.3 7.8 8.5 7.1 6.8 6.3 5.8 4.2 3.8 3.01 2.53 1.42;
40
41 ENDDATA

```

```

42
43 CALC:
44 ! Cálculo de transferencia de energía a red superior;
45 @For( hr(t) : Gamma = @If( Pr(t) #GT# 0 , PrCon , -PrVta ) );!Tipo de transferencia;
46
47 !Cálculo de potencia de rampa para el lapso siguiente;
48 tmax = @Max( hr(t): t );
49 @For( Pot(i,t) : LRP(i,t) = @If( t #LT# tmax , P(i,t+1) - P(i,t) , P(i,t) ) );
50
51 ! Cálculo de costos de generación de las máquinas convencionales e interconexión;
52 @For( Pot(i,t): CC(i,t) = a1(i)*P(i,t)^2 + b1(i)*P(i,t) );!Funcion de costo convencional;
53 @For( hr(t): CPr(t) = Alfa*Gamma*Pr(t) );!Funcion de costo de transferencia;
54
55 ENDCALC
56
57 !FUNCION OBJETIVO;
58 Min = pcg*( @Sum( Pot(i,t): a1(i)*P(i,t)^2 + b1(i)*P(i,t) ) + @Sum(hr(t): Gamma*Pr(t) ) ) + !Costos
de generación e interconexión ponderados;
59 (1-pcg)* ( @Sum(Con(j,t): Y(j,t)-Lambda(j,t)*X(j,t) ) ) + !Bonificación en el Plan de reducción
de demanda;
60 @Sum(TPol(k): Beta(k)*@sum( Pot(i,t): Alfa(t)*P(i,t) ) ) ; !Costos de regeneración de polución;
61
62 !Equilibrio de energía en el bus de la micro-red;
63 @For( hr(t) : @Sum( Mc(i) : P(i,t) ) + PS(t) + PW(t) + Pr(t) = DT(t) - @Sum( Cte(j): X(j,t) ) );
64 !Límites en la generación convencional;
65 @For(Pot(i,t): @BND( Pmin(i) , P(i,t) , Pmax(i) ) );
66 !Límites en la generación de fuentes renovables;
67 @For(hr(t): @BND( 0 , PW(t) , W(t) ) );
68 @For(hr(t): @BND( 0 , PS(t) , S(t) ) );
69 !Límite de transferencia de energía entre la micro-red y la malla superior;
70 @For(hr(t): @BND( -Prm , Pr(t) , Prm ) );
71 !Límites de rampa de los generadores convencionales;
72 @For(Pot(i,t): @BND( -DR(i) , LRP(i,t) , UR(i) ) );
73 !Asegura que el incentivo diario supere el costo de interrupción;
74 @For(Con(j,t): @Sum( Con(j,t): Y(j,t) - ( K1(j)*X(j,t)^2 + K2(j)*X(j,t) - K2(j)*X(j,t)*Tetha(j) )
>=0 ) );
75 !Asegura que la reducción logre mayor beneficio;
76 @For(Con(j,t): @Sum( Con(j,t): Y(j,t) - ( K1(j)*X(j,t)^2 + K2(j)*X(j,t) - K2(j)*X(j,t)*Tetha(j) )
>= @If( j #EQ# 1 , 0 ,
@Sum( Con(j,t): Y(j-1,t) - ( K1(j-1)*X(j-1,t)^2 + K2(j-1)*X(j-1,t) - K2(j-1)*X(j-
1,t)*Tetha(j-1) ) ) ) );
77 !Incentivo pagado sea menor al presupuesto de la micro-red;
78 @For(Con(j,t): @Sum( Con(j,t): Y(j,t) ) <= UB ) ;
79 !Asegura que la energía restringida es menor a lo permitido por el cliente;
80 @For(Cte(j): @Sum( hr(t): X(j,t) ) <= CM(j) ) ;
81
82 End

```

# Referencias.

- [1] R Calero P, A Colmenar S, M A Castro G J A Carta G, *Centrales de energías renovables, generación eléctrica con energías renovables*, 2009th ed., Miguel Martín-Romo, Ed. Madrid, España: PEARSON EDUCACIÓN, S.A., 2009.
- [2] Naciones Unidas, Protocolo de Kyoto de la convención marco de las naciones unidas sobre el cambio climático, Dic 11, 1997.
- [3] Diario Oficial de la Federación de los Estados Unidos Mexicanos, Reglas de despacho y operación del Sistema Eléctrico Nacional, 2005.
- [4] G F Leites M, "Modelos utilizados para el despacho energético óptimo (DEO) ," Administración Nacional de Usinas y Trasmisiones Eléctricas (UTE), Uruguay, Tecnico 2009.
- [5] The World Alliance for Decentralized Energy. (2017, jul) World Alliance for Decentralized Energy. [Online]. <http://www.localpower.org/>
- [6] Camara de Diputados del H. Congreso de la Unión, Ley de la Industria Eléctrica, 2014.
- [7] Jiang J, Saad W, Jaekel A Bari A, Challenges in the smart grid applications: An overview, 2014, International Journal of distributed sensor networks.
- [8] Majid Gandomkar, Maziar Izadbakhsh, Abdollah Ahmadi Alireza Rezvani, "Environmental/economic scheduling of a micro-grid with a renewable energy sources," *Journal of Cleaner Production*, vol. 87, pp. 216-226, 2015.
- [9] M Basu, M.F. Conlon L. Mariam, "Microgrid: Architecture, policy and future trends," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, pp. 477-489, July 2016.
- [10] Ashfaq A. Khan AZ, "Optimization of economic load dispatch problem by linear programming modified methodology," in *2nd International conference on emerging trends in engineering and technology*, London (UK), 2014, pp. 30-31.
- [11] Ilona Alisauskaitė-Seskiene Exter Dalia Streimikiene, "External costs of electricity generation options in Lithuania," *Renewable Energy*, vol. 64, pp. 215-224, 2014.
- [12] Alejandro Núñez Jimenez, Despachos económicos, 2013, 4o GIE-GAE, ETSIME, UPM.
- [13] N. Vrahatis E. Parsopoulos, *Particle Swarm Optimization and Intelligence: Advances and Applications*. Hershey PA, USA: Information Science, 2010.
- [14] J.J. Domínguez M., Un algoritmo de puntos interiores para programación cuadrática, 2004, Tesis de Magister en Matemáticas.
- [15] A. V. Fiacco and G. P. McCormick., *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, 1968, John Wiley and Sons, Inc.
- [16] Singiresu S. Rao, *Engineering Optimization Theory and Practice*, 4th ed. New Jersey, USA: JOHN WILEY & SONS, INC., 2009.
- [17] R. Narayan S., *Optimization Principles: Practical applications to the operation and markets of the electric power industry*, 2003rd ed., Mohamed E. El-Hawary, Ed. United States of America: IEEE Press Power Engineering Series, 2003.
- [18] MPS/SIAM Series on Optimization, *A mathematical view of interior point methods in convex optimization*, Rice University, Ed. Ithaca, New York, United States of America: Rice University, 2001.
- [19] W. Kern , G. Still U. Faigle, *Algorithmic principles of mathematical programming* , 24th ed., Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, Ed. Cologne, Germany: Springer science + Business media B.V., 2002.
- [20] Saul I. Gass, *Linear Programming: Methods and Applications*, 5th ed., Courier Corporation, Ed. New York, USA: Dover Publication, 2003.
- [21] Y. Zhang, Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment, 1995, Technical Report TR96-01.
- [22] J. Gondzio, C. Mészáros, and X. Xu E. D. Andersen, Implementation of interior point methods for large scale linear programming, 1996, Technicalreport, University of Geneva.
- [23] Zdenek Dostal, *Optimal Quadratic Programming Algorithms*, Panos M. Pardalos (University of Florida), Ed. Ostrava, Czech Republic: Springer, 2009.

- [24] Mordecai Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 2003.
- [25] Elena Olmedo Fernandez, Eva del Pozo García Lorenzo Escot Mangas, "Optimización dinámica," Universidad Complutense de Madrid, Universidad de Sevilla, Madrid, Trabajo de la Facultad 8, 2002.
- [26] J. Zhu, *Optimization of Power System Operation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Ed. Redmond, WA, USA: A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2009.
- [27] Hasdorff L. Reid GF, Economic dispatch using quadratic programming, 2015, IEEE Trans Power Apparatus Systems.
- [28] Short MJ. Yalcinoz T, Neuronal networks approach for solving economic dispatch problem with transmission capacity constraints, 1998, IEEE Trans Power Syst.
- [29] Bouzeboudja H, Allali A. Naama B, "Solving the economic dispatch problem using gravitational search algorithm," *7th International conference on electrical and electronics engineering IEEE*, pp. 1-54, 2011.
- [30] Anatoly Zhigljavsky, *Stochastic Global Optimization*, Cardiff University, UK Institute of Mathematics and Informatics, Ed. Vilnius, Lithuania: Springer, 2008.
- [31] Weldon A. Lodwick and Janusz Kacprzyk, *Fuzzy Optimization: Recent Advances and Applications*, Prof. Janusz Kacprzyk, Ed. Denver, Colorado, USA: Springer, 2010.
- [32] Hamdy A. Taha, *Investigación de operaciones*, Novena edición ed. Arkansas, Fayetteville, USA: Pearson, 2012.
- [33] P., Kita, H., Tanaka, E., & Hasegawa, J. Attaviriyannupap, "A fuzzy-optimization approach to dynamic economic dispatch considering uncertainties," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, no. 3, pp. 1299-1307, 2004.
- [34] William D. Stevenson Jr, *Elements of power system analysis*, third edition ed. U.S.A: McGraw-Hill, 1985.
- [35] Yunfei Mua, Hongjie Jiaa, Jianzhong Wub, Tao Jiangc, Xiaodan Yua Xiaolong Jina, "Dynamic economic dispatch of a hybrid energy microgrid considering building based virtual energy storage system," *Elsevier*, July 2016.
- [36] Sungkook Kim Ross D.W., "Dynamic economic dispatch of generation," *IEEE Trans Power Ap.*, vol. 2060, no. 8, p. 99, 1980.
- [37] Harry G. Kwatny Thomas E Bechert, "Transactions on Power Apparatus and Systems," *IEEE*, pp. 889-898, May 1972.
- [38] William D. Stevenson Jr. John J. Grainger, *Power system analysis*, 09701009088th ed., Litografica INGRAMEX, Ed. Cd. de México, México: McGraw-Hill/Interamericana de México, 2002.
- [39] W. G. Wood, "Spinning reserve constrained static and dynamic economic dispatch," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 2, pp. 381-388, 1982.
- [40] Xingyue Liu, Ming Ding Hongbin W, "Dynamic economic dispatch of a microgrid: Mathematical models and solution algorithm," *Electrical Power and Energy Systems*, no. 63, pp. 336-346, July 2014.
- [41] X., Wang, L., Zhang, Y., & Yuan, Y Yuan, "A hybrid differential evolution method for dynamic economic dispatch with valve-point effects," *Expert systems with applications*, vol. 36, no. 2, pp. 4042-4048, 2009.
- [42] Pedro N. Torres, "Análisis de flujo de cargas," Universidad Nacional del Centro del Perú, Lima, 2007.
- [43] William D. Stevenson Jr., *Elements of power system analysis*, Segunda edición ed., LIMSA-79, Ed. Carolina del Norte, USA: McGraw-Hill, 1975.
- [44] Wina H.J. Crijns-Graus, J. M. Guerrero, J. C. Vasquez M. Soshinskaya, "Microgrids: Experiences, barriers and success factors," *ScienceDirect*, pp. 659-672, July 2014.
- [45] Göran Andersson, Lennart Söder Thomas Ackermann, "Distributed generation: a definition," *Electric Power Systems Research*, vol. 57, pp. 195-204, 2001.
- [46] M.M.A. Salama W.El-Hhattam, "Distributed generation technologies, definitions and benefits," *Electric Power Systems Research*, vol. 71, pp. 119-128, January 2004.
- [47] M.R. Von Spakovsky, D.J. Nelson M.W. Ellis, "Fuel cell systems: efficient, flexible energy conversion for the 21st century," *Proceedings of the IEEE*, vol. 89, no. 12, pp. 1808-1818, December 2001.
- [48] Akhil A, Marnay C, Stephens J, Dagle J, Guttromson R, et al. Lasseter R, Integration of distributed energy resources-the CERTS microgrid concept. Rep, 2002, LBNL-50829.
- [49] Nadine Bellamy, Bernard Sinclair-Desgagne Pauline Barriau, "Assessing contaminated land cleanup costs strategies," *Applied Mathematical Modelling*, no. 42, pp. 478-492, Feb 2017.

- [50] N.P. Patidar, R.K. Nema Priyanka Paliwal, "Planning of grid integrated distributed generators: A review of technology, objectives and techniques," *Renewable and Sustainable Energy Review*, vol. 40, pp. 557-570, August 2014.
- [51] N. Gatsis, G.B. Giannakis Y. Zhang, "Robust energy management for microgrids with high-penetration renewables," *IEEE Trans. Sustain Energy*, no. 4, pp. 944-953, 2013.
- [52] Mihail Abrudean, Dorin Bica Lucian Ioan Dulau, "Smart Grid Economic Dispatch," in *9th International Conference Interdisciplinarity in Engineering*, Tirgu-Mures, Romania, 2015.
- [53] Jaime Guzmán Javier Arellano, *Ingeniera Ambiental*, Primera edición ed. Cd. de México, México: Alfaomega Grupo Editor, 2011.
- [54] Julie B. Zimmerman James R. Mihelcic, *Environmental Engineering: Fundamentals, Sustainability, Design*, Wiley, Ed. USA, 2014.
- [55] José Hernán Pérez Castellanos Noel De Nevers, *Air Pollution Control Engineering*, Third Edition ed., Long Grove, Ed. Utah, USA, 2017.
- [56] Randy A. Becker, "Air pollution abatement costs under the clean air act: evidence from the PACE survey," *Journal of environmental economics and management*, no. 50, pp. 144-169, May 2005.
- [57] P Nicolay R. Velik, "Grid price dependent energy management in microgrids using a modified simulated annealing triple optimizer," *Energy*, no. 130, pp. 384-395, 2014.
- [58] P. Wang, G. Xiao, S. Gong R. Wang, "Power demand and supply management in microgrids with uncertainties of renewable energies," *Electric Power Energy*, no. 63, pp. 260-269, 2014.
- [59] S.H. Hosseinian, G.B. Gharehpetian M. Mohammadi, "Optimization of hybrid solar energy sources/wind turbine systems integrated to utility grids as microgrid under pool/bilateral/hybrid electricity market using PSO," *Energy*, no. 86, pp. 112-125, 2012.
- [60] B. Zhu, X. Xia H. Tazvinga, "Energy dispatch strategy for a photo-voltaic wind diesel battery hybrid power system," *Energy*, no. 105, pp. 412-420, 2014.
- [61] Xiaohua Xia Nnamdi. Nwulu, "Optimal dispatch for a microgrid incorporating renewables and demand response," *Renewable Energy*, no. 101, pp. 16-28, 2017.
- [62] H. Tazvinga, X. Xia B. Zhu, "Switched model predictive control for energy dispatching of a photovoltaic diesel battery hybrid power system," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, no. 23, pp. 1229-1236, 2015.
- [63] M.C. Brito, C.A. Silva D. Neves, "Impact of solar and wind forecast uncertainties on demand response of isolated microgrids," *Renewable Energy*, no. 87, pp. 1003-1015, 2016.
- [64] S. Baldi, I. Michailidis, E.B. Kosmatopoulos C.D. Korkas, "Occupancy based demand response and thermal comfort optimization in microgrids with renewable energy sources and energy storage," *Energy*, no. 163, pp. 93-104, 2016.
- [65] X. Xia, J. Zhang H. Tazvinga, "Minimum cost solution of photovoltaic diesel battery hybrid power systems for remote consumer," *Energy*, no. 96, pp. 292-299, 2013.
- [66] M. Fahrioglu N.I. Nwulu, "A soft computing approach to projecting locational marginal price," *Neural Computing Application*, no. 22, pp. 1115-1124, 2012.
- [67] F.L. Alvarado M. Fahrioglu, "Designing incentive compatible contracts for effective demand management," *IEEE Trans. Power System*, no. 15, pp. 1255-1260, 2000.
- [68] LINDO Systems, *Optimization Modeling with LINGO*, 6th ed., Lindo, Ed. Chicago, IL, USA, 2006.