



U

P

T

“ROBOT PARALELO TIPO STEWART PARA LA REHABILITACIÓN DE TOBILLO”

Tesis que presenta

Ana Iris Aureles Cabrera

Para obtener el grado de:

MAESTRA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

Director de Tesis:

Dr. Hipólito Aguilar Sierra

Tulancingo de Bravo, Hidalgo

Marzo 2019

©UPT 2019

Derechos reservados

El autor otorga a UPT el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes.





U

P

T

“ROBOT PARALELO TIPO STEWART PARA LA REHABILITACIÓN DE TOBILLO”

Tesis de Maestría en
Automatización y Control

Por:

ING. ANA IRIS AURELES CABRERA

Universidad Politécnica de Tulancingo 2016-2018

Becaria de CONACYT, expediente no. 787114

Director de Tesis:

Dr. Hipólito Aguilar Sierra

Tulancingo de Bravo, Hidalgo, marzo 2019





ACTA DE COLOQUIO DE TESIS

En la **UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE TULANCINGO**, el día 18 de Diciembre de 2018, se reunieron los Doctores: **DR. . RAFAEL STANLEY NUÑEZ CRUZ**, **DR. IVÁN DE JESÚS RIVAS CAMBERO**, y **DR. HIPÓLITO AGUILAR SIERRA**, integrantes del jurado de **PRE-EXAMEN DE GRADO DE LA MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL** de la ingeniero:

ANA IRIS AURELES CABRERA

Que presentó el trabajo de Tesis titulado: **“Robot Paralelo tipo Stewart para la rehabilitación de tobillo”**.

Después de escuchar la presentación y defensa del trabajo de tesis, el jurado examinó y resuelve: Aprobado por unanimidad

DR. RAFAEL STANLEY NUÑEZ CRUZ
Presidente

DR. IVÁN DE JESÚS RIVAS CAMBERO
Secretario

DR. HIPÓLITO AGUILAR SIERRA
Vocal

Dedicatoria

Dedico esta tesis a Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio como profesores, amigos y compañeros.

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

*"La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡Qué importa!
Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo.
Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que
esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste."*

Marie Curie

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto, a Dios, el que en todo momento está conmigo ayudándome a aprender de mis errores y a no cometerlos otra vez. Eres quien guía el destino de mi vida

A mis padres por haberme forjado como la persona que soy en la actualidad; muchos de los logros se los debo a ustedes, en los que incluyo este. Me formaron con reglas y ciertas libertades, pero al final de cuentas, me motivaron con constancia para alcanzar mis anhelos. A mi familia, la cual es el cimiento de mi desarrollo, todos y cada uno de ustedes han destinado tiempo para enseñarme nuevas cosas, para brindarme aportes invaluableles que servirán para toda mi vida.

A la Universidad Politécnica de Tulancingo la cual me dio la bienvenida al posgrado, las oportunidades que me ha brindado son incomparables, agradezco mucho por la ayuda de mis profesores del área de Automatización y Control, amigos y mis compañeros por todo los conocimientos, apoyo y experiencias que me ha otorgado. De igual forma a mi asesor el Dr. Hipólito Aguilar Sierra por el apoyo brindado en el desarrollo de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mi preparación profesional en posgrado en la Universidad Politécnica de Tulancingo en la cual pude desarrollar mi tema de tesis.

Resumen

En esta tesis se presenta el análisis de la biomecánica de la articulación de tobillo, así como el estudio de los movimientos en la tarea de rehabilitación de la misma, para proponer un diseño adecuado de un prototipo que lleve a cabo la tarea de rehabilitación de manera satisfactoria, el cual se realizó en el programa de diseño SolidWorks en conjunto a los actuadores más adecuados para la aplicación. Se presenta también el análisis de una plataforma paralela tipo Stewart para la rehabilitación de tobillo.

Se realizó un análisis matemático del robot paralelo tipo Stewart, el cual está conformado por la cinemática inversa y directa con sus respectivas simulaciones numéricas utilizando Matlab, en el cual fueron programadas las ecuaciones obtenidas en el análisis previo.

Para la obtención del modelo matemático se obtuvo la matriz jacobiana la cual se emplea en robot paralelos en la dinámica directa y se propusieron trayectorias de acuerdo a la aplicación (rehabilitación) la cual se programó en Simulink de Matlab para mayor facilidad de procesamiento de ecuaciones, así como las simulaciones de la misma. De igual manera se realizó un modelo dinámico de una pierna para analizar su comportamiento en conjunto a la plataforma Stewart, dicho modelo se obtuvo por el método de Lagrange al igual que el de la plataforma, de esta forma poder vincular ambos para la simulación.

Dichos resultados se compararon con los datos biomecánicos de la cadera, rodilla y tobillo los cuales están dentro de los alcances de los mismos. Para un mejor desempeño se realizó un controlador PD y un PD más compensación a la gravedad en la plataforma Stewart esto para una posición más adecuada en base a la rehabilitación. Se desarrollaron pruebas con distintas trayectorias como los son señales sinusoidales y con la ecuación de Kane la cual está enfocada en la rehabilitación y presenta señales pequeñas pero persistentes.

Abstract

This thesis presents the analysis of the biomechanics of the ankle joint, as well as the study of the movements in the task of rehabilitation of the same, to propose an adequate design of a prototype that carries out the rehabilitation task in a way satisfactory, which was carried out in the SolidWorks design program together with the most suitable actuators for the application. The analysis of a Stewart-type parallel platform for ankle rehabilitation is also presented.

A mathematical analysis of the Stewart type robot was made, which is made up of inverse and direct kinematics with their respective numerical simulations using Matlab, in which the equations obtained in the previous analysis were programmed.

To obtain the mathematical model we obtained the Jacobian matrix which is used in parallel robots in the direct dynamics and trajectories were proposed according to the application (rehabilitation) which was programmed in Matlab Simulink for easier processing of equations, as well as the simulations of it. In the same way a dynamic model of a leg was made to analyze its behavior in conjunction with the Stewart platform, this model was obtained by the Lagrange method as well as that of the platform, in this way being able to link both for the simulation.

These results were compared with the biomechanical data of the hip, knee and ankle which are within the scope of the same. For better performance, a PD controller and a PD plus compensation for gravity on the Stewart platform were made for a more adequate position based on the rehabilitation. Tests with different trajectories were developed, such as sinusoidal signals and the Kane equation, which is focused on rehabilitation and has small but persistent signals.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Índice de Figuras	XI
Índice de Tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Justificación	2
1.3. Objetivo General	3
1.3.1. Objetivos Particulares	3
1.4. Introducción a Robots Paralelos	4
1.4.1. Clasificación de Robots Stewart	6
1.4.2. Aplicaciones Médicas	8
1.4.3. Simuladores	9
1.4.4. Aplicaciones Industriales	12
1.5. Robots seriales en rehabilitación	12
1.5.1. Dispositivos de rehabilitación.	12
2. Anatomía de la Articulación Tobillo	19
2.1. Biomecánica del tobillo	20
2.2. Lesiones	24
2.3. Rehabilitación	26
2.3.1. Fisioterapia	26
2.3.2. Rehabilitadores comerciales	27
2.4. Antropometría Humana	30
3. Modelado y Simulación	33
3.1. Arquitectura de Plataforma Stewart	33
3.1.1. Análisis Cinemático	34
3.1.2. Modelado Dinámico	54

3.2. Análisis de extremidad inferior	61
3.2.1. Modelo Dinámico	62
4. Estrategias de Control	69
4.1. Control PD descentralizado	70
4.2. Control PD con compensación de la gravedad	74
4.3. Generación de trayectorias	77
5. Resultados numéricos	79
5.1. Modelo Dinámico de la plataforma Stewart	79
5.1.1. Prueba 1	80
5.2. Modelo Dinámico de extremidad inferior	84
5.2.1. Prueba 2.	87
5.2.2. Prueba 3.	89
5.3. Diseño de plataforma	91
5.3.1. Componentes principales	91
6. Conclusiones	93
Referencias	99
Apéndice	103
A. Cinemática	105
A.1. Ángulos Euler	105
A.1.1. Código para cinemática inversa	106
A.2. Aclaraciones matemáticas	108
A.3. Método de Newton-Raphson	108
A.3.1. Código para cinemática directa	110
B. Dinámica	113
B.1. Plataforma Stewart	113
B.2. Modelo Dinámico de Pierna	114
C. Control	117
C.1. Generación de Trayectoria	117

Índice de figuras

1.1.	Primeros diseños y artes conceptuales de robots paralelos.	5
1.2.	Robots paralelos propuestos por Eric Gough	5
1.3.	Plataformas Paralelas del Stewart.	6
1.4.	a) Planares b) Esféricos y c) Espaciales. Adaptado de [10]	7
1.5.	Robots paralelos en la medicina.	8
1.6.	Simuladores de vuelo.	9
1.7.	Simuladores basados en la arquitectura Stewart.	10
1.8.	Aplicaciones más comunes en la industria para robots paralelos.	11
1.9.	Andadores con peso parcialmente soportado.	13
1.10.	Sistemas de rehabilitación de 1 o 2 grados de libertad.	15
2.1.	Ligamentos de la articulación de tobillo	19
2.2.	Movimientos en Rehabilitación de la articulación del tobillo.	21
2.3.	Biomecánica.	21
2.4.	Movimiento del nivel 1.	22
2.5.	Movimiento del nivel 2.	23
2.6.	Movimiento del nivel 3.	23
2.7.	Movimientos del tobillo en ejes x , y y z	24
2.8.	Clasificación de lesiones. [37]	24
2.9.	Tipos de esguince más comunes en la articulación de tobillo	25
2.10.	Tipos de Rehabilitación.	27
2.11.	Comparativa entre rehabilitadores comerciales.	28
2.12.	Porcentaje en percentiles.	30
2.13.	Dimensiones y peso del cuerpo humano.	31
3.1.	Arquitectura de la plataforma Stewart con actuadores lineales.	34
3.2.	Cinemática de un Robot.	34
3.3.	Estructura geométrica.	35
3.4.	Diagrama geométrico de la plataforma fija.	36
3.5.	Representaciones Gráficas de Rotación de motor	38
3.6.	Recorrido Angular	39
3.7.	Barrido de la Leva	40
3.8.	Rotación alrededor del eje x . (Inversión/Eversión)	43
3.9.	Rotación alrededor del eje y . (Plantarflexión/Dorsiflexión)	44
3.10.	Método Newton-Raphson	45
3.11.	Trayectoria en círculo	46

3.12. Trayectoria en ocho	47
3.13. Geometría de la plataforma Stewart.	48
3.14. Coordenadas de cada vértice.	49
3.15. Rotaciones en cada eje.	50
3.16. Diagrama a bloques del modelo dinámico del robot.	61
3.17. Cuerpo humano [71]	61
3.18. Análisis de Pierna.	62
3.19. Diagrama de cuerpo libre.	63
3.20. Diagrama a bloques en Simulink de la dinámica de la pierna.	67
4.1. Topología del controlador	70
4.2. Diagrama de control	71
4.3. Respuesta de la plataforma Stewart	73
4.4. Diagrama PD+G	74
4.5. Respuesta del sistema PD con compensación a la gravedad	76
4.6. Respuesta de polinomio con valores iniciales iguales	77
4.7. Respuesta de polinomio con valores iniciales distintos	78
5.1. Diagrama en Simulink del modelo Dinámico de la plataforma Stewart.	79
5.2. Posición relativa de cada actuador. (cm)	80
5.3. Velocidad relativa de cada actuador. (cm/seg)	80
5.4. Aceleración relativa de cada actuador. (cm/seg ²)	81
5.5. Longitud de actuador lineal	81
5.6. Posición de los 6 actuadores. (cm)	82
5.7. Velocidad de los 6 actuadores. (cm/seg)	82
5.8. Aceleración de los 6 actuadores. (cm/seg ²)	83
5.9. Longitud L de los 6 actuadores	83
5.10. Respuesta del modelo dinámico en posición, velocidad y aceleración.	85
5.11. Señales de control para cada actuador.	86
5.12. Torques y ángulos de cada articulación de la pierna	86
5.13. Respuesta del polinomio de Kane en el modelo Stewart.	87
5.14. Torques en la plataforma Stewart.	88
5.15. Torques y ángulos en articulaciones de la pierna.	88
5.16. Respuesta de la plataforma Stewart	89
5.17. Torques generados y posición angular.	90
5.18. Estructura de la plataforma móvil	91
5.19. Componentes de la plataforma Stewart	92
5.20. Propuesta y diseño 3D de plataforma Stewart	92
A.1. Ángulos de Euler.	106
A.2. Rotación en cada eje.	106
A.3. Método de Newton	109
C.1. Trayectoria	118

Índice de Tablas

1.1. Ventajas y desventajas de los robots seriales y paralelos	17
2.1. Alcance de Movimiento de un Tobillo [36].	22
2.2. Productos comerciales.	29
2.3. Peso de cada segmento en Kg.[51]	32
2.4. Dimensiones en metros. [52]	32
3.1. Parámetros Cinemática Inversa.	43
3.2. Peso teórico. [72]	68
5.1. Parámetros de pierna. [76]	84
5.2. Parámetros de Simulación. [77]	84

1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema

De acuerdo con los resultados de la Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica (ENADID), en 2014 en nuestro país habían 7.1 millones de habitantes que padecen algún tipo de discapacidad, siendo la limitación de la movilidad la de mayor frecuencia entre este sector de la población con 64.1 %. Es importante señalar que el estado de Hidalgo se encuentra entre las primeras siete entidades con mayor número de personas con discapacidad motriz mayores de 30 años [1].

La articulación del tobillo es una de las estructuras de mayor soporte de peso del cuerpo humano, está se compone de la unión de dos articulaciones: la primera es la que está formada por la tibia, peroné y el astrágalo en el pie, y la segunda la conforman el astrágalo del pie con el hueso calcáneo y el escafoides. Los problemas más comunes del tobillo son las torceduras y las fracturas. Una torcedura o esguince es una lesión en los ligamentos. Los esguinces pueden tardar algunas semanas o hasta varios meses en sanar completamente. La gravedad de un esguince de tobillo depende de qué tanto se estiraron o desgarraron los ligamentos. Por otro lado, una fractura es una ruptura de un hueso. Las fracturas de tobillo son el tipo más frecuente de fractura tratado por los cirujanos ortopédicos. Se producen por movimientos forzados del pie en aducción, abducción, pronación, supinación, combinados, torsión, choque vertical, etc. Una adecuada terapia de rehabilitación empieza con ejercicios sin resistencia (rehabilitación pasiva), progresando a ejercicios de resistencia y luego a actividades contra resistencia (rehabilitación activa). Por esta razón, surge la necesidad de plantear el desarrollo de un prototipo de robot paralelo basado en la plataforma Stewart con actuadores rotacionales, que facilite la tarea de rehabilitación de pacientes con lesiones motoras en las extremidades inferiores y más en específico de la articulación de tobillo.

Además, los servicios que ofrece el sector salud para rehabilitación son buenos, sin embargo la población que requiere de los servicios públicos llega a ser bastante elevado por lo cual el personal responsable no es suficiente en la mayoría de los casos. El adquirir un producto nuevo en el área de rehabilitación resulta muy caro y no todas las instituciones de salud cuentan con los recursos necesarios, además de que se requiere tiempo para su entrega sin hacer mención de las instalaciones y/o mantenimiento que se puedan necesitar.

1.2. Justificación

El presente proyecto está orientado a personas que han sufrido algún tipo lesión en la articulación del tobillo con el propósito de que éstas puedan reincorporarse a sus actividades diarias, lo más pronto posible. En el área de rehabilitación existen diversos equipos para dicha función los cuales llegan a ser bastante caros, por tal motivo se propone un prototipo que se encargue de la rehabilitación del tobillo mediante rutinas específicas en un determinado tiempo.

Este proyecto pretende ser puesto a prueba en algún centro de rehabilitación haciendo más accesible y más frecuentes las sesiones del paciente, esto beneficiará su salud y reducir el tiempo en que este puede retomar sus actividades cotidianas.

Por otra parte, los manipuladores cinemáticos paralelos tienen mejor rendimiento que los manipuladores en serie, en términos de un alto grado de precisión, altas velocidades o aceleraciones y alta rigidez. Por lo tanto, parecen perfectamente adecuados para la tarea de rehabilitación, por ejemplo, para ejercicios de rehabilitación activa y pasiva de dorsi/plantar flexión o también puede ser utilizado para el diagnóstico de lesiones de tobillo.

1.3. Objetivo General

Modelado y control de un robot paralelo tipo Stewart con 6 grados de libertad, para el desarrollo de rutinas de rehabilitación para la articulación de tobillo.

1.3.1. Objetivos Particulares

- Análisis y parametrización de ejercicios típicos en la rehabilitación de tobillo.
 - Análisis de la plataforma Stewart para la obtención de la cinemática directa e inversa.
 - Obtención de los modelos dinámicos de la plataforma y la pierna humana respectivamente.
 - Generación y simulación de trayectorias para la tarea de rehabilitación de tobillo a través de una computadora.
 - Desarrollo de algoritmos de control para el seguimiento de trayectorias.
 - Dimensionamiento y diseño de prototipo de plataforma tipo Stewart.
-

1.4. Introducción a Robots Paralelos

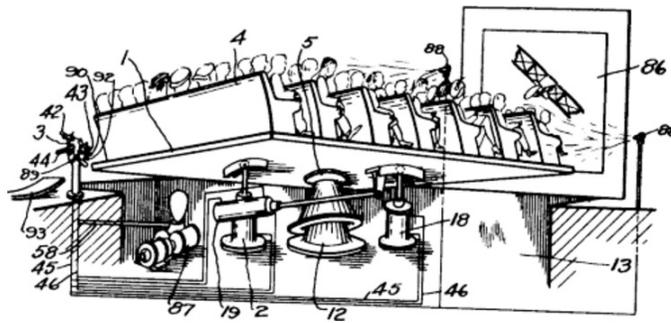
En la actualidad la robótica ha abarcado una gran área principalmente en la industria en las líneas de producción la cual nos brinda una mayor calidad y reduce costos en general. Una de las aplicaciones más recurrentes de los robots paralelos es la tarea de pick and place en industrias farmacéuticas ya que esta clase de robots superan por mucho a los robots de cadena abierta en lo que respecta a precisión, exactitud y velocidad. Los robots fueron principalmente empleados en las industrias automotrices, farmacéuticas e inclusive en las alimenticias, donde actualmente los podemos encontrar en áreas como la biomédica, médica y de rehabilitación.

En este capítulo se revisan los antecedentes de robots paralelos en general, así como los que están enfocados a la rehabilitación o aplicaciones médicas, de esta manera podremos visualizar nuestros alcances y limitaciones, de igual manera se analizará cada estructura para identificar la adecuada a lo que requerimos, que para nuestro caso es la tarea de rehabilitar la extremidad inferior.

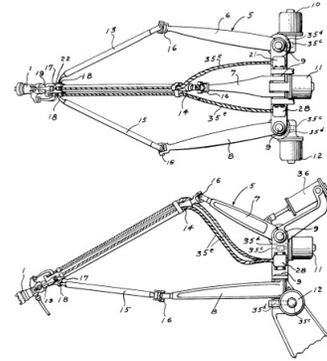
Los robots paralelos consisten de un mecanismo de lazo cerrado, parten de una plataforma móvil que está conectada a una base por al menos dos series de cadenas cinemáticas, se pueden encontrar aplicaciones de estos robots en las plataformas de movimiento de los simuladores de vuelo y en aparatos de posicionamiento para herramientas de cirugía de alta precisión, dadas las características de movimiento fino de un mecanismo de lazo cerrado. Por otro lado la estructura complicada del mecanismo no solo limita el movimiento de la plataforma, sino también crea singularidades cinemáticas complejas en el área de trabajo de la plataforma por esta razón el diseño, planeación de trayectorias y desarrollo de aplicaciones de los robots paralelos es difícil.

Un sistema de robot paralelo modular consiste en una serie de módulos diseñados independientemente, así como actuadores, articulaciones pasivas, eslabones rígidos, plataformas móviles y órganos terminales, que puede ser ensamblados rápidamente en un robot completo con varias configuraciones (grados de libertad y geometría), teniendo diferentes características cinemáticas y dinámicas.

Un robot paralelo con un diseño modular reconfigurable no solo posee las ventajas mencionadas sino también puede reducir el ciclo de desarrollo, el tiempo de diseño, desde su construcción hasta su total funcionamiento. Debido al diseño modular reduce la complejidad del problema de diseño a un nivel manejable. A continuación se muestran algunos de los robots paralelos. Uno de los primeros mecanismos para el entrenamiento fue diseñado por James E. Gwinnett y lo patentó en el año 1928. El mecanismo es una plataforma sobre la que estaban colocados los asientos de un teatro con el fin de introducir un movimiento y así diera una apariencia más real al espectáculo. (Ver figura 1.1 (a)) Este sistema fue basado en un mecanismo esférico paralelo y de acuerdo a sus antecedentes no llegó a construirse. [2]



(a) Arte conceptual de robot paralelo en 1928, Gwinnett [2]



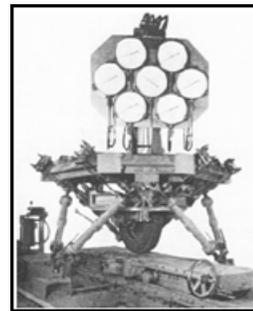
(b) Robot paralelo propuesto por Willard LV Pollard [3]

Figura 1.1: Primeros diseños y artes conceptuales de robots paralelos.

En 1938, Willard L.V.Pollard invento un robot para automatizar el proceso de pintura en spray, fue considerado como el primer robot industrial, sin embargo el primer diseño de Pollard no fue el que se construyó, para obtener mejoras en el diseño su hijo co-diseño el robot y así fue patentado en junio de 1942. Dicho diseño consiste de un sistema de cinco grados de libertad, y con tres brazos de dos eslabones cada uno, los eslabones estaban unidos mediante articulaciones universales. Los tres actuadores de la base comandaban la posición de la herramienta, mientras que la orientación era proporcionada por otros dos actuadores situados en la base y que transmitían el movimiento a la herramienta mediante la rotación proporcional de cables flexibles.(Ver figura 1.1 (b)).



(a) Plataforma actual tipo Gough [4].



(b) Universal Ring creado por Gough[3].

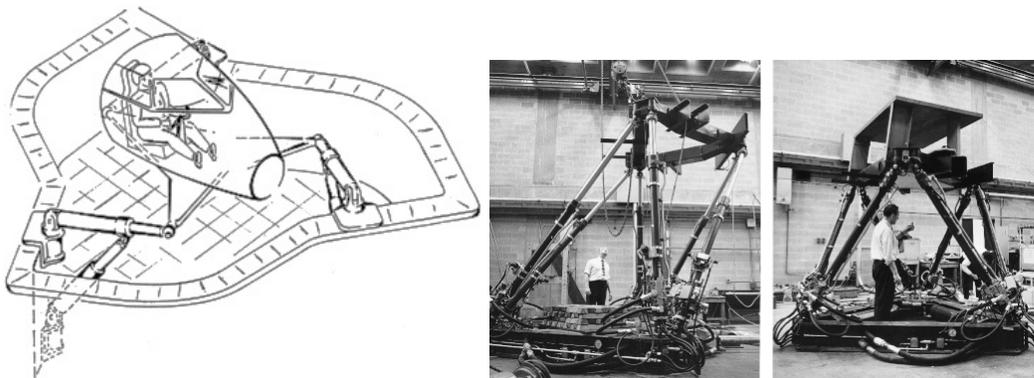
Figura 1.2: Robots paralelos propuestos por Eric Gough

El Dr. Eric Gough construyo en el año de 1947 el dispositivo octaédrico, fue un distinguido ingeniero automotriz de la Dunlop Rubber Co. En Birmingham, Inglaterra. Gough llama a su invento “la máquina para pruebas” fue creado para resolver problemas de cargas en los neumáticos al aterrizar los aviones de esta manera la plataforma de Gough intentaba simular el proceso de aterrizaje de un avión y así invento una máquina universal que debía determinar las propiedades de los neumáticos bajo cargas combinadas. Esta plataforma ha

sido uno de los mecanismos que han logrado un mayor reconocimiento en el área de la robótica paralela, la Figura 1.2 es un ejemplo de la plataforma de Gough. [5]

En 1965 aparece en las memorias del British ImechE un artículo de Dietmaier Stewart donde publicó un artículo, en el cual describe una plataforma de seis grados de libertad destinada a ser usada como simulador de vuelo; la unión de varias cadenas cinemáticas en este mecanismo, proveían varios movimientos complejos a la cabina del piloto en entrenamiento, este mecanismo fue llamado Plataforma de Stewart o mecanismo paralelo de Stewart (SPM), este consiste en una base y un plato móvil, los cuales están conectados por 6 piernas extensibles y unidas por juntas esféricas en ambos extremos. En la figura 1.3 (a) muestra un bosquejo de la plataforma de Stewart. [6]

El ingeniero Klaus Cappel, en el año de 1967 patentó un simulador de movimiento basado en un hexápodo, de esta forma se construyó el primer simulador de vuelo, en el año de 1967. En la Figura 1.3 (b) se muestra el primer simulador de vuelo construido por el Ing. Klaus Cappel. [7]



(a) Plataforma desarrollada por Stewart (b) Simulador de vuelo de Klaus Cappel

Figura 1.3: Plataformas Paralelas del Stewart.

Debido a los avances de la investigación, los robots paralelos se están perfeccionando rápidamente, y gracias al desarrollo de nuevas tecnologías hacen que el control automático de estas máquinas sea más preciso, y puedan integrarse una gran variedad de dispositivos externos como sensores, interfaces gráficas de usuario, cámaras digitales, etc.

1.4.1. Clasificación de Robots Stewart

Los manipuladores paralelos de acuerdo a sus características de movimiento se clasifican en planares, esféricos y espaciales en la Figura 1.4 se observa dicha clasificación.

Robots paralelos planares

Este tipo de robot tiene un efector final con tres grados de libertad, dos traslaciones y una rotación, cuentan con tres cadenas que soportan el efector final dichas cadenas están unidas al efector final en tres puntos, genéricamente el efector final es un triángulo. Ver

figura 1.4 a).

Robots paralelos esféricos

Se denominan así los robots cuyos mecanismos son esféricos es decir si todos los enlaces en movimiento realizan movimientos esféricos alrededor de un punto estacionario. En un mecanismo esférico, los movimientos de cada junta de revolución es la única permisible para la construcción de enlaces esféricos.

Además, todos los ejes de unión de un enlace esférico deben intersectarse en un punto común. La figura 1.4 b) se muestra un manipulador esférico paralelo de 3 dof. En este mecanismo, todas las juntas de revolución se intersectan en un punto central común O . Los enlaces 1,2 y 3 se consideran enlaces de entrada, y la plataforma móvil se designa como enlace de salida. Un manipulador se denomina manipulador espacial si al menos uno de los enlaces en movimiento en el mecanismo posee un movimiento espacial general. [8]

Robots paralelos espaciales

Un ejemplo común de esta clasificación es la plataforma Stewart diseñada por D. Stewart en 1965, la cual fue pensada para simuladores de vuelo, actualmente variantes de este prototipo son aplicados en maquinas como herramientas o dispositivos virtuales.[9] Las ventajas de este tipo de manipuladores son la gran capacidad de cargar, buena rigidez y precisión. Esto es debido a sus 6 cadenas cinemáticas cerradas paralelas unidas por juntas, sus actuadores son principalmente lineales. Ver figura 1.4 c).

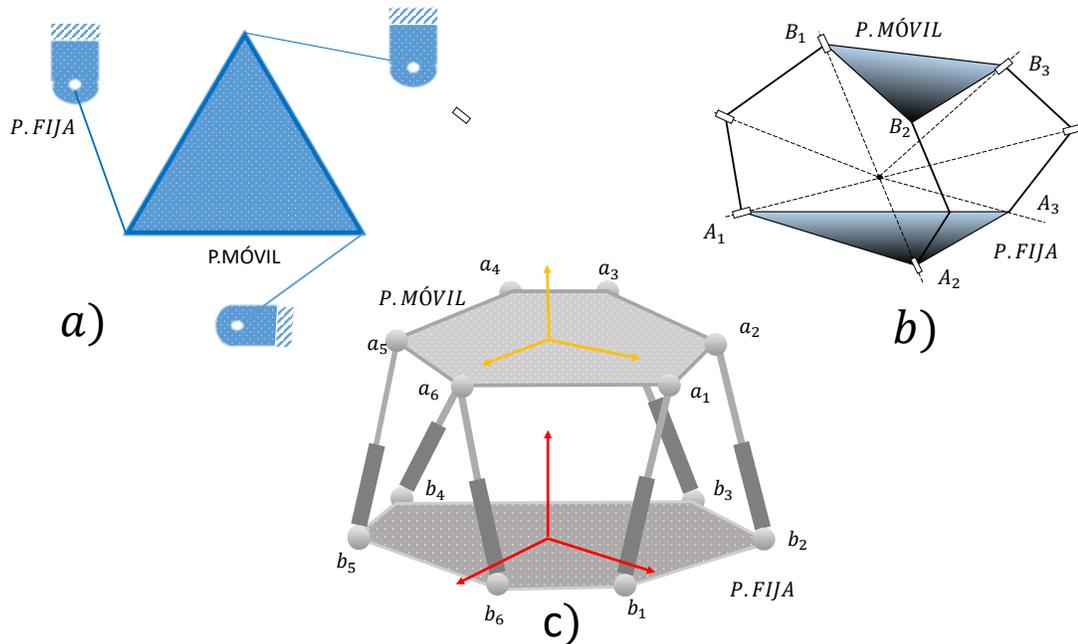


Figura 1.4: a) Planares b) Esféricos y c) Espaciales. Adaptado de [10]

Cada una de las clasificaciones presentadas en la figura 1.4 tienen sus propias aplicaciones, en este apartado nos enfocaremos a los robots del tipo Stewart que conforma el

tipo de robots espaciales dentro de la clasificación de robots paralelos, a continuación se muestran algunas de las aplicaciones más comunes para dicho robot.

1.4.2. Aplicaciones Médicas

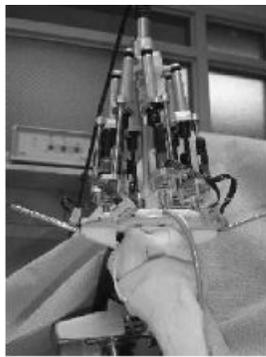
Los robots ingresan lentamente en el campo de la medicina con sistemas como el Da Vinci Robots (Intuitive Surgical) o Zeus (Computer Motion). Estructuras paralelas jugar también un papel en esta evolución y se mencionó su uso potencial temprano.

Por ejemplo, en el sistema Crigos de Brandt es un robot paralelo se usó para operaciones de cirugía ortopédica, mientras que INRIA una muñeca activa ha sido empleado con éxito para operaciones de cirugía oftalmológica en perros.

Pero en cuanto a su contra parte en serie, no muchos prototipos del laboratorio han encontrado su camino en el campo (aunque la investigación todavía está en curso), podemos mencionar dos ejemplos de dicho uso. El SurgiScope, sistema provisto por ISIS Robotics ISIS, un tipo Delta el robot se usa como soporte de microscopio. Ver figura 1.5



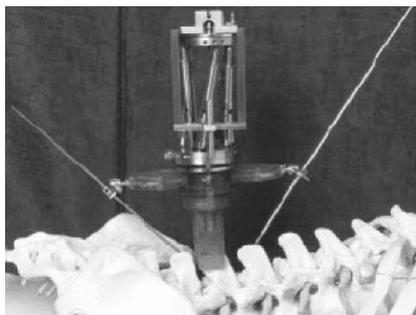
(a) ISIS/surgiScope [11]



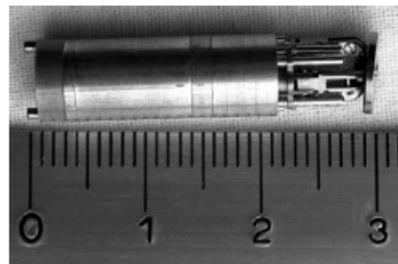
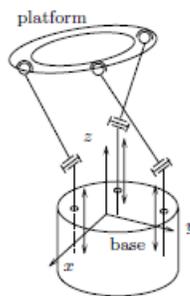
(b) CMU MBARS [11]



(c) Robot Spine Assist (Tamaño)



(d) Robot Spine Assist



(e) Mips 3GDL

Figura 1.5: Robots paralelos en la medicina.

De la figura 1.5 podemos observar del lado izquierdo el sistema ISIS / SurgiScope utiliza un robot Delta como microscopio stand (en el hospital Val de Grace en París, cortesía

de ISIS). A la derecha, está CMU MBARS (Mini Robot Attached Robotic System). Otro ejemplo aborda una dificultad para el robot quirúrgico que es el movimiento del paciente, esto ha motivado el desarrollo del Robot MARS que tiene una estructura de 6 UPS, el robot está directamente montado en la estructura ósea del paciente cerca del sitio quirúrgico. Este robot se ha utilizado como una herramienta quirúrgica que guía la colocación de los tornillos pediculares espinales, (figura 1.5 (c) y (d)) y Mazor MAZ lo vende como el robot Spine Assist. Un similar robot para artroplastia de rodilla, el MBARS (Mini Bone-Attached Robotic Sistema) se está desarrollando actualmente en CMU. Los Spine Assist y MBARS pueden indicar una tendencia hacia otro enfoque para robótica quirúrgica, basada en robots pequeños, adaptables y de costo relativamente bajo, en comparación con estructuras caros y de gran escala. [11]

Otra ventaja de estructuras paralelas comparada a su contra parte en serie son mucho menos sensibles al efecto de escala, y por lo tanto, son apropiados para micro-robots. Para aplicaciones médicas esto es apropiado para cirugía mínimamente invasiva, especialmente endoscopia. Wendlandt construyó una cabeza activa de endoscopio hecha de 3 grados de libertad robot que es accionado por cables BU. Hemos sugerido otra solución para una cabeza endoscópica con Mips 3-d.o.f. robot ilustrado en la figura 1.5 (e), que utiliza motores eléctricos.

El uso de estructuras paralelas en diversos campos médicos que solo mencionaré que la cinemática de estructuras paralelas también se usa para una mejor comprensión de la cinemática de articulaciones humanas complejas, como la rodilla o el complejo de hombro , para la corrección de las deformidades óseas (reemplazo del aparato de Ilizarov por un hexápodo), para rehabilitación y entrenamiento deportivo con la plataforma Caren de Motek (figura1.7(d)).

1.4.3. Simuladores

Después de la propuesta inicial de Stewart, ha habido numerosos desarrollos de robots paralelos para simuladores de vuelo.



(a) Simulador A340



(b) Simulador NADS en Iowa

Figura 1.6: Simuladores de vuelo.

Hoy en día, muchas empresas están construyendo simuladores de movimiento para realidad virtual y aumentada, no solo para aeronaves sino también para barcos, trenes, camiones, este sector es probablemente aquel en el que las estructuras paralelas son las más exitosas.



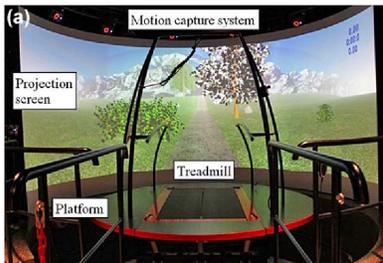
(a) Turret Motion Based Simulator



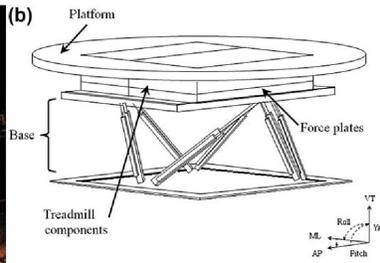
(b) Simulaor Persival



(c) KAIST Interactive Bicycle Simulator



(d) Robot Caren.



(e) Simuladores en Cinematografía.

Figura 1.7: Simuladores basados en la arquitectura Stewart.

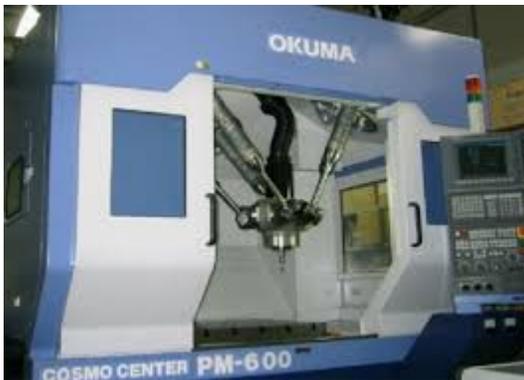
Mencionamos CAE (Canadá) CAE, Thalès (Francia) TH, Frasca (EE. UU.) FRA. Un ejemplo de tal simulador se presenta en la fotografía figura 1.6(a). El simulador de conducción avanzado nacional (NADS) es el simulador de conducción de investigación más sofisticado del mundo. Desarrollado por la Administración Nacional de Seguridad del Tráfico en las Carreteras, el NADS ofrece simulación de conducción en tiempo real de alta fidelidad. Consiste en una gran cúpula en la que se pueden montar automóviles completos y las cabinas de camiones y autobuses. [12]

El Departamento de Transporte ha ubicado el NADS en la Universidad de Iowa, que será responsable de la investigación operativa diaria, el mantenimiento y la actualización a largo plazo del NADS. Ver figura 1.6(b). Un impresionante manipulador paralelo, el "Turret Motion Based Simulator"(TMBS) fue construido por el Centro de Investigación de Tanques del Ejército de los EE. UU. (TACOM). Los actuadores son hidráulicos, la

capacidad de carga es de 27 toneladas, con aceleraciones verticales de alrededor de 4-6 g. El objetivo es probar la ergonomía del interior del tanque y estudiar los sistemas de estabilización del brazo (figura 1.7 (a)).

Un sorprendente simulador es Persival, desarrollado inicialmente por la Escuela Nacional de Equitación en Francia (figura 1.7 (b)) tiene como objetivo proporcionar a los jinetes principiantes una formación preliminar sin poner en peligro la educación de un buen caballo, actualmente es comercializada. El "KAIST Interactive Bicycle Simulator" consiste en una bicicleta, una plataforma Stewart, un mango Magneto-Rheological y un sistema de resistencia del pedal para generar sensaciones de movimiento, el simulador visual en tiempo real y el sistema de proyección, los sub controladores y la red de control integradora 1.7 (c) [13].

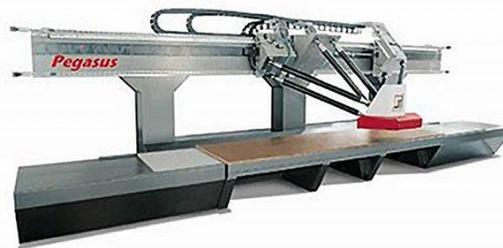
Otro simulador es el "Caren system" de Motek el cual es usado para aplicaciones médicas en la rehabilitación como se observa en la figura 1.7(d). La base de movimiento Caren utilizada para entrenamiento deportivo y rehabilitación médica (cortesía de Motek). Los robots Stewart has abarcado una gran área de aplicación las mas usadas son como simuladores de vuelo y para videojuegos, pero también cabe mencionar que son usados en el cine, como simuladores ciertos ambientes, en la figura 1.7(e) se observa la simulación de una pequeña barca en el mar grabado para la película "La vida de Pi", el cual se emplea para la simulación de una tormenta.



(a) Cosmo Center Pm-600



(b) Robot Delta



(c) Pegasus de Reichenbacher

Figura 1.8: Aplicaciones más comunes en la industria para robots paralelos.

1.4.4. Aplicaciones Industriales

En la industria son empleados los robots tipo delta, para aplicaciones pick and place, en líneas de producción, inclusive en áreas farmacéuticas. También se encuentran en algunos tipos maquinado o impresoras 3D. Los robots Delta forman parte de las estructuras paralelas sin en cambio nuestro enfoque es hacia robots Stewart por esta razón no se abordará a fondo el tema. A continuación se muestran algunas de las aplicaciones en la industria de robots paralelos.

En la figura 1.8 a) se presenta el Cosmo Center Pm-600 fabricado por OKUMA dedicada a emplear robots paralelos para un maquinado cnc, sobresale entra otras debido a que las piernas del robot están conectadas en configuración hexagonal sin cruzarse.[14]

La compañía Demareux obtuvo una licencia para el robot Delta en 1987, de esta forma comercializar el robot paralelo para la industria del empaquetado. En la Figura 1.8 b) se muestra una línea de montaje con robots tipo delta de la empresa Demareux. [15]

1.5. Robots seriales en rehabilitación

El campo de la rehabilitación robótica hoy en día hay gran cantidad de dispositivos para dicha aplicación de extremidades inferiores, las cuales se diferencian entre sí por la fase del tratamiento a la que este destinada. Díaz, Gil y Sánchez presentan una clasificación de los dispositivos según el principio de rehabilitación al que estén destinados. [16]

- Caminadoras en cinta
- Caminadoras en base para el pie
- Caminadoras en superficie
- Caminadoras estacionarias
- Sistemas de rehabilitación de tobillo

1.5.1. Dispositivos de rehabilitación.

Una lesión en la rodilla y tobillo son muy frecuentes hoy en día al llevar a una actividad descuidada o accidental, lo que provoca la incapacidad de un individuo para levantar o mover ambas articulaciones. El movimiento del tobillo es muy complicado debido a sus complejas estructuras óseas [17]. Los movimientos generales del tobillo se pueden organizar como dorsiflexión/plantarflexión, inversión/eversión y abducción / aducción. Se han desarrollado muchos sistemas para imponer o restaurar estos movimientos de tobillo y rodilla en la actualidad existen comerciales y otros en fase de investigación.

A pesar de que diversos autores han desarrollado criterios para clasificarlos, en ocasiones, algunos de ellos pueden estar comprendidos en varios grupos. A continuación se

muestran algunos de los prototipos trabajados y en el mercado en tipo robots seriales.

Los dispositivos comerciales más desarrollados son los que principalmente asisten el proceso de marcha, así como también los de tipo estacionario, y por lo general presentan costos elevados y principalmente enfocados hacia su implementación en centros de salud. Entre los más conocidos se encuentra el Lokomat, desarrollado por Hocoma AG, Volketswil, Suiza, el cual consiste de una órtesis robótica para asistir la marcha, tal como se observa en la figura 1.9 (a). Es este un sistema avanzado para el soporte del cuerpo combinado con una cinta caminadora [16].



Figura 1.9: Andadores con peso parcialmente soportado.

El Lokomat (Hocoma AG) consiste en una órtesis de marcha robótica y un sistema avanzado de soporte del peso corporal, combinado con una cinta de correr [18]. Utiliza motores controlados por computadora (unidades) que se integran en la órtesis de la marcha en cada articulación de cadera y rodilla (Figura 1.9 (a)). Los accionamientos están sincronizados de manera precisa con la velocidad de la cinta de correr para garantizar una

coincidencia precisa entre la velocidad de la ortesis de marcha y la cinta de correr. Hasta la fecha, es el sistema más evaluado clínicamente y uno de los primeros de su tipo.

El LokoHelp (Grupo LokoHelp) es un dispositivo electromecánico. Dispositivo desarrollado para mejorar la marcha después de una lesión cerebral [16]. La Ayuda Loko (Figura 1.9 (b)) se coloca en el centro de la superficie de la máquina para correr paralela a la dirección de la marcha y se fija en la parte delantera de la máquina para correr con una abrazadera simple. También proporciona un sistema de soporte de peso corporal para el paciente. Se han realizado ensayos clínicos para analizar su viabilidad y eficacia [19]. Los resultados muestran que el sistema mejora la capacidad de marcha del paciente de la misma manera que el entrenamiento locomotor manual; sin embargo, al usar LokoHelp se requiere menos asistencia terapéutica y se reduce la incomodidad del terapeuta. Este hecho es una conclusión general para casi todos los sistemas robóticos hasta la fecha.

ReoAmbulator (Motorika Ltd., comercializado en los EE. UU. Como "AutoAmbulator") es otro sistema robótico de cinta de correr con soporte corporal [16]. Los brazos robóticos están sujetos a las piernas del paciente en el muslo y el tobillo, conduciéndolos a través de un patrón de pasos (Figura 1.9 (c)). Actualmente se está llevando a cabo un ensayo clínico aleatorizado y simple ciego para evaluar su efectividad en pacientes con accidente cerebrovascular. ReoAmbulator fue desarrollado en cooperación con la red de hospitales de rehabilitación de HealthSouth.

Otros sistemas robóticos se encuentran en un estado de investigación o en desarrollo, pero ya se han utilizado para realizar algunas pruebas clínicas. Por ejemplo, el laboratorio de biomecatrónica de la Universidad de California ha desarrollado varios dispositivos robóticos para el entrenamiento locomotor después de una lesión en la médula espinal: la herramienta robótica de ambulación para la rehabilitación humana (ARTHUR), un dispositivo diseñado para medir y manipular el paso humano en una cinta rodante [20]; la ortesis de marcha operada neumáticamente (POGO), un diseño mejorado de pierna-robot; el manipulador de asistencia pélvica (PAM), un dispositivo que puede acomodar y controlar el movimiento pélvico naturalista [21].(Figura 1.9 (d))

Otros dispositivos similares es el robot de rehabilitación de la marcha LOPES (ExoSkeleton accionado por extremidades LOwer) puede moverse en paralelo con las piernas de una persona que camina sobre una cinta de correr, a la altura de la pelvis, conectada de forma flexible al mundo fijo [22], y finalmente el String-Man [23], desarrollado en Fraunhofer IPK, Berlín, es un sistema robótico para apoyar la rehabilitación de la marcha y la restauración de las funciones motoras. Tiene una estructura cinemática particular con 7 cables conectados al tronco del paciente.

El MotionMaker (Swortec SA) es un sistema de entrenamiento estacionario que permite realizar ejercicios físicos con la participación activa de las extremidades paralizadas. [24] Las extremidades solo están unidas a las ortesis al nivel del pie para simular las fuerzas de reacción naturales del suelo (Figura 1.10 a)). La ventaja de MotionMaker es su ejercicio en tiempo real controlado por sensores, combinado con la electroestimulación controlada,

adaptada a los esfuerzos de los pacientes. Los primeros ensayos clínicos se llevaron a cabo con el sistema [16], mostrando una mejora en la capacidad del paciente para desarrollar una fuerza voluntaria más alta durante un movimiento de presión de piernas.

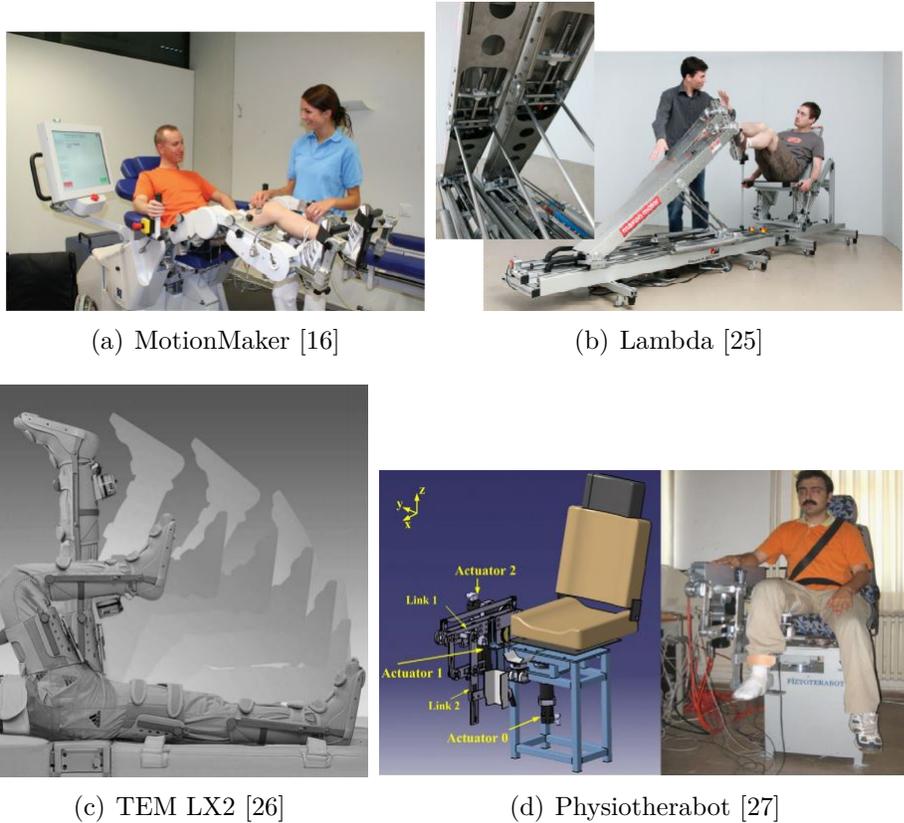


Figura 1.10: Sistemas de rehabilitación de 1 o 2 grados de libertad.

Otros dos sistemas robóticos que se han desarrollado con un principio de funcionamiento similar, el Lambda (Figura 1.10 b)), un robot de rehabilitación y acondicionamiento físico utilizado para la movilización de las extremidades inferiores que proporciona el movimiento de las extremidades inferiores en el plano sagital, incluida una rotación adicional para el movilización del tobillo, y un sistema de rehabilitación de piernas por cable desarrollado por el Instituto Nacional de Ciencia y Tecnología Industrial Avanzada (AIST) de Tsukuba [25].

El WalkTrainer está también destinado a pacientes con parálisis, y a diferencia del MotionMaker, el paciente se encuentra en posición de pie. El WalkTrainer asemeja el movimiento natural de la extremidad inferior, y esto incide en la motivación del paciente. El dispositivo está compuesto de distintos elementos, entre los que se encuentra un marco para el caminado, una órtesis pélvica, un sistema para el soporte del cuerpo, dos órtesis para las piernas y un sistema para la electroestimulación [28].

Yaskawa Electric produjo un dispositivo para la rehabilitación de extremidades inferiores, el TEM LX2, que comenzó a desarrollarse desde hace más de 15 años. Se trata de un dispositivo que permite hacer ejercicios de movimiento pasivo continuo (CPM) y otros que usualmente se aplican por terapeutas. El dispositivo es de tipo serial y sobre él se fija la pierna del paciente a la que se hace el tratamiento de rehabilitación [26]. Luego de comercializado en el año 2004, no se reportan cambios importantes y en la actualidad no se observa que el dispositivo se ofrezca por parte de la empresa.

En cuanto a dispositivos que aún se encuentran en fase de investigación, algunos con gran desarrollo y otros básicamente en una fase inicial, hay una gran diversidad de dispositivos en cuanto a la fase de rehabilitación a la que están destinados. (Figura 1.10 c)) Destaca un dispositivo estacionario para la rehabilitación de rodillas desarrollado por Akdogan y Adli llamado el Physiotherabot [27]. Este trabaja en distintos modos, uno definido como modo de enseñanza, en el que el terapeuta manipula el dispositivo asemejando ciertos ejercicios de rehabilitación y de esta manera el dispositivo recoge la información de fuerzas y posiciones de la terapia. Luego, en el modo terapia, el robot es capaz de controlar al paciente tomando en cuenta las fuerzas de reacción que este pudiera generar. Además, considera los límites que debe tener el movimiento ejecutado durante el proceso de terapia. (Figura 1.10 d)).

Finalmente, otros dispositivos que se encuentran en fase de investigación se destacan el LEG-100 desarrollado por Michnik [29], que resulta ser menos robusto que algunos de los descritos anteriormente. Valdivia [30] propone un dispositivo de cinco GDL que incluye la movilidad de la cadera y de la rodilla y es capaz de planificar trayectorias para simular ejercicios de rehabilitación tanto bidimensional como tridimensional, es decir, que no se limita al plano sagital. Weiqun Wang [31] presenta un mecanismo que solo se mueve en el plano sagital, pero que tiene la particularidad de que genera movimientos rotacionales a partir de pares prismáticos. El exoskeleton for lower limb training with instrumented orthosis (ELLTIO) propuesto por H. Aguilar y R. López ([32]) es un dispositivo que ayuda en la fisioterapia para aumentar la fuerza y resistencia de los músculos humanos se presenta como una alternativa para la rehabilitación, basado en exoesqueleto de rodilla y tobillo. Los movimientos de la articulación de la rodilla y el tobillo se emplean para proponer trayectorias similares en una rehabilitación generadas por una computadora.

Estos dispositivos son algunos de los tantos que se encuentran en investigación como prototipos para rehabilitadores de pierna y tobillo en robots tipo serie, se puede observar que no existe uniformidad de criterios en el diseño de los dispositivos de rehabilitación para rodillas, pues cada autor presenta ventajas del dispositivo que propone.

Manipulador	Ventaja	Desventajas
Serial	<ul style="list-style-type: none"> - Incremento de la fuerza - Incremento de la resistencia - Espacio de trabajo amplio - Fácil control 	<ul style="list-style-type: none"> - Movilidad limitada - Capacidad de carga limitada - Alto costo - Pesado
Paralelo	<ul style="list-style-type: none"> - Alta rigidez - Alta eficiencia - Alta precisión - Alta movilidad - Alta capacidad de carga - Ligero 	<ul style="list-style-type: none"> - Espacio de trabajo reducido - Altos esfuerzos internos - Difícil control - Alto costo

Tabla 1.1: Ventajas y desventajas de los robots seriales y paralelos

En base a la investigación presentada en esta sección, mostramos las ventajas y desventajas que tienen los robots tipos seriales y paralelos en la tabla 1.1, con respecto a esta podemos observar que el robot paralelo tiene mayor rigidez, precisión y eficiencia, características muy deseables para la tarea de rehabilitación. Como desventaja de los robot paralelos estos presentan un espacio de trabajo reducido, sin embargo esto es fácil de solucionar de acuerdo a la aplicación a desarrollar, en este trabajo se propone una plataforma del tipo Stewart para la tarea de rehabilitación de tobillo ya que nos brinda un espacio de trabajo suficiente para llevar a cabo dicha tarea en sus diferentes tipos de ejercicios y en los 3 ejes de trabajo, dicho análisis se presenta en el siguiente capítulo de esta tesis.

2

Anatomía de la Articulación Tobillo

El tobillo es una de las más complejas partes del sistema esquelético y juega un papel importante en la locomoción humana, transmitiendo fuerzas y torques a la tierra durante el andar. El movimiento del tobillo puede ser descrito por las rotaciones a través de 3 ejes los cuales son perpendiculares a los planos anatómicos. Los términos usados para definir la dirección del movimiento pie-tobillo y los rangos estimados de movimientos en cada dirección están dados en la Tabla 2.1. Cabe señalar que el rango de movimiento puede variar extremadamente entre los individuos, así destacando la necesidad de un sistema adaptable el cual puede limitar la fuerza aplicada (tema que no se va a abordar en esta tesis), cuando se acerca a los límites de la unión previniendo lesiones en el paciente, Tabla 2.1.

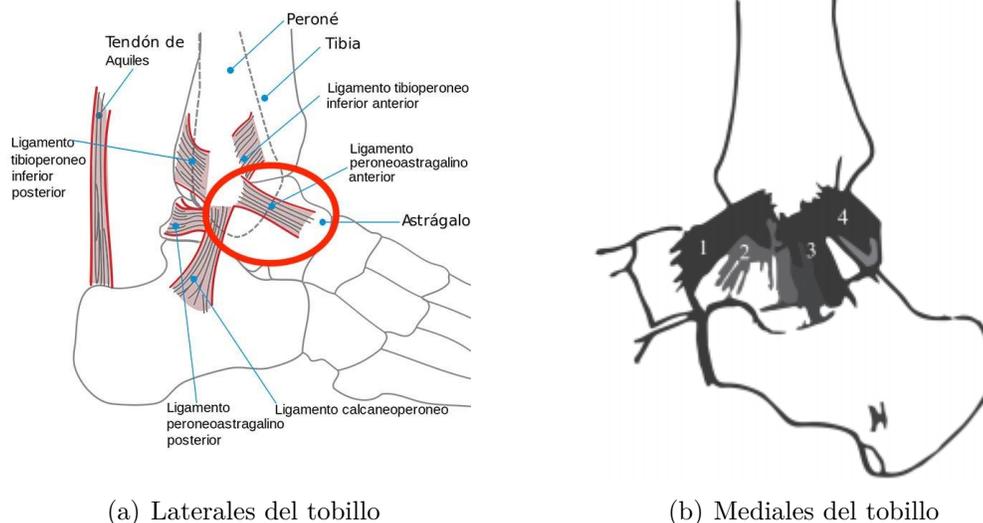


Figura 2.1: Ligamentos de la articulación de tobillo

El tobillo es una articulación tipo bisagra, reforzada por ligamentos a su alrededor encargados de ofrecer estabilidad y brindar propiocepción. El ligamento lateral tiene menor resistencia que el medial haciendo que éste sea más débil comparado con su contra parte

medial. El ligamento lateral está formado por tres bandas, LAPA, LCP y el ligamento astragaloperoneo posterior (LAPP).[33]

El LAPA es el elemento más débil del complejo y por esta razón el ligamento que más se lesiona, por el contrario el LAPP es el más grande y resistente (Figura 2.1 (a)). De igual manera el ligamento medial o deltoideo es muy resistente y está formado por cuatro bandas que estabilizan la articulación en eversión y protege de la subluxación (Figura 2.1 (b)). La articulación del tobillo tiene movimientos en el plano vertical, la dorsiflexión efectuada por los músculos del compartimiento anterior de la pierna y la plantarflexión por los del compartimiento posterior. La eversión e inversión ocurren en las articulaciones subtalar y talocalcanea. En la figura 2.1 (b) se puede observar como 1. Ligamento tibio astragalino anterior, 2. Ligamento tibio navicular, 3. Ligamento tibio calcaneo, 4. Ligamento tibio astragalino posterior.

2.1. Biomecánica del tobillo

La biomecánica del pie es un tema mas complejo a comparación con el tema de anatomía. Cuando una persona camina presenta ciertas características como la rotación en el plano transversal, partiendo desde la pelvis hasta la tibia y peroné, esta rotación se transmite al tobillo el cual a su vez la transmite a la articulación subastragalina hasta los huesos del pie. El pie es una estructura única, en la medida en que puede ser rígida o flexible durante las distintas etapas del ciclo en marcha.

El pie es flexible durante la etapa de oscilación y temprana postura de la marcha, para después convertirse en una estructura rígida hasta poco antes del levantamiento del pie. Una ventaja de estas características es que el pie puede ser flexible para adaptarse a los distintos terrenos que nos encontremos sobre el entorno que nos rodea y a su vez funciona como una palanca sobre la que el cuerpo avanza.

En la marcha normal, el segmento inferior del cuerpo experimenta rotación sobre el plano transversal, la cual se incrementa en los segmentos mas lejanos de la cadera. Cuando una persona camina sobre un terreno plano, la pelvis rota un promedio de 6° , en el fémur encontramos una rotación promedio de 13° y 18° en la tibia. Durante la etapa de oscilación y el 15° inicial de la etapa de postura la rotación es interna, en este momento se invierte y comienza la rotación externa hasta poco antes del despegue de los dedos, entonces comienza la rotación interna una vez mas y se repite el ciclo. [34]

Se clasificarán los seis movimientos en tres niveles solo para su representación gráfica. Para que un tobillo sea rehabilitado completamente debe seguir tres principales movimientos como en la figura 2.2 siguiendo estrictamente los alcances de movilidad de la tabla 2.1.

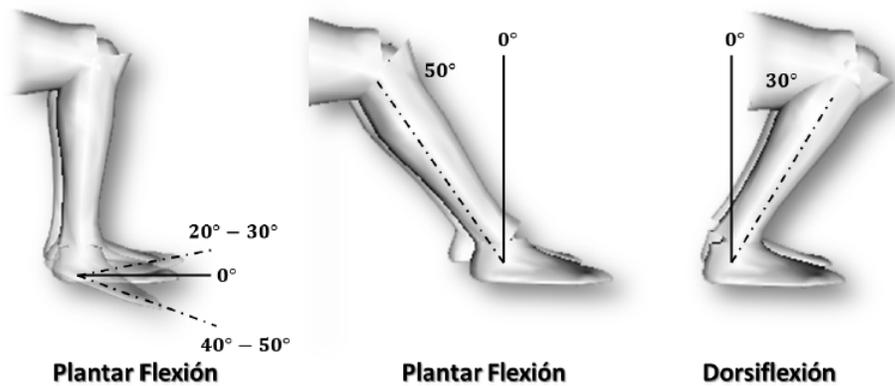
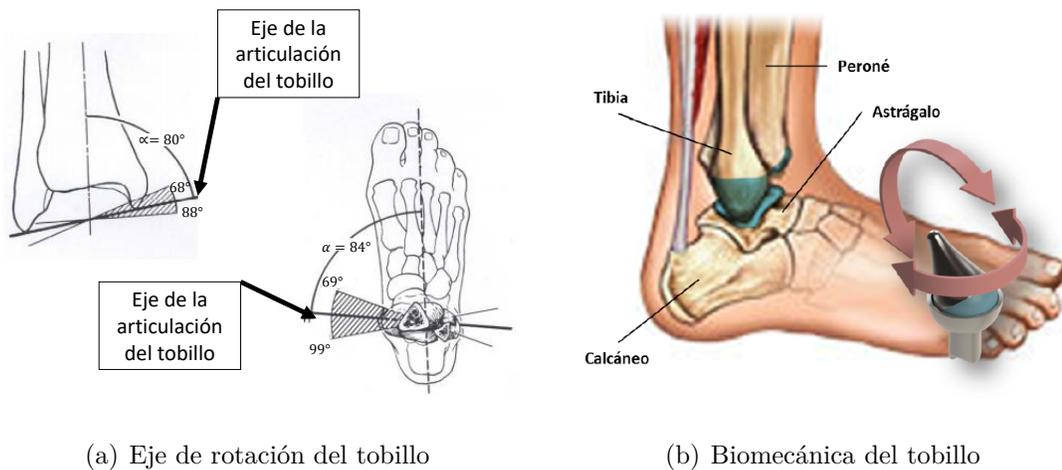


Figura 2.2: Movimientos en Rehabilitación de la articulación del tobillo.

El eje de rotación del tobillo está dirigido lateralmente y posteriormente en el plano transversal y lateralmente y hacia abajo en el plano frontal. Se puede encontrar su ubicación exacta tomando como referencia algunos otros ejes. El ángulo entre el eje del tobillo y el eje de la tibia es de 80° con rango de movimiento entre 68° y 88° . Si se visualiza desde el plano transversal encontramos una rotación entre 20° y 30° con respecto al eje de la rodilla, el cual es perpendicular a la línea de progresión o avance. Y por último comparado con el ángulo longitudinal del pie el cual pasa entre el segundo y el tercer dedo del pie, existen 84° entre este y el eje de rotación del tobillo, esto quiere decir que está rotado internamente 6° con respecto a la perpendicular de este eje longitudinal. Su rango de movimiento es de 21° de rotación interna y 9° de rotación externa. [35]



(a) Eje de rotación del tobillo

(b) Biomecánica del tobillo

Figura 2.3: Biomecánica.

El tratamiento posterior a una lesión de tobillo consta en realizar ejercicios isométricos que pueden ser en inversión, eversión, flexión dorsal y flexión plantar, las cuales se realizan con el paciente sentado descalzo, con los pies apoyados, el cual debe realizar flexión dorsal

ligera del tobillo y aplicar una fuerza con la parte externa del pie contra un objeto estático que puede ser la base de una mesa, mantener 5 segundos y volver a la posición inicial.

Alcance de movimiento	
Rutina	Alcance de movimiento
Plantarflexión	37,6° ~ 45,8°
Dorsiflexión	20° ~ 29,8°
Inversión	14° ~ 22°
Eversión	15° ~ 25°
Aducción (rotación interna)	22° ~ 36°
Abducción (rotación externa)	15° ~ 25°

Tabla 2.1: Alcance de Movimiento de un Tobillo [36].

Este tipo de ejercicios isométricos permite que las fibras de colágeno se reparen de manera más organizada y fuerte, posteriormente se realizan ejercicios de propiocepción, que pueden ser: ejercicio de propiocepción con plato en movilidad de tobillo, movimientos propioceptivos en cadena cinética abierta, movimientos propioceptivos en cadena cinética semi abierta con pelota, marcha con apoyo en talones, marcha con apoyo en los dedos y en el antepié (de puntillas), logrando disminuir en un 85 % la recurrencia del esguince de tobillo. En esta parte del tratamiento involucran a los diferentes tipos de rehabilitación de esto depende de la valoración del médico o fisioterapeuta, puede ser pasiva, activa, asistida.

2.1.0.1. Nivel 1

En el nivel 1 se considera la Dorsiflexión o flexión dorsal es el movimiento que reduce el ángulo entre el pie y la pierna en el cual los dedos del pie se acercan a la espinilla. el movimiento opuesto se llama plantarflexión (Ver Figura 2.4). Ocurre en el tobillo. El alcance de movimiento de la dorsiflexión indicado en la literatura es de 20° a 30°.

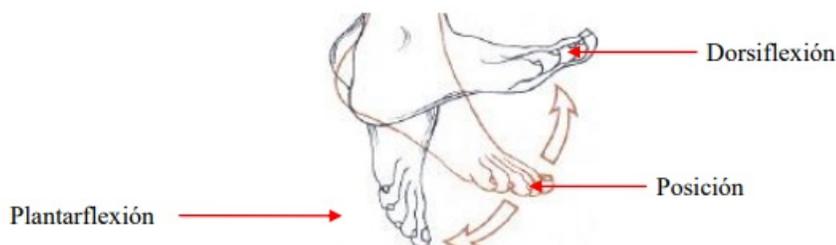


Figura 2.4: Movimiento del nivel 1.

2.1.0.2. Nivel 2

El Nivel 2 incluye la eversión es la rotación externa del pie con elevación del borde externo del pie. Los músculos que participan en la eversión son: Tercer peróneo (principal),

Peróneo corto, peróneo largo, extensor largo de los dedos, extensor corto de los dedos. La inversión es también una rotación pero interna del pie con elevación del borde interno del pie. Los músculos que participan en la inversión son: Tibial anterior y tibial posterior son los principales, pero también participan: flexor largo de los dedos, flexor del dedo gordo, extensor largo del dedo pulgar. (Ver Figura 2.5)



Figura 2.5: Movimiento del nivel 2.

2.1.0.3. Nivel 3

Este movimiento como tal, se menciona sin embargo no es del total interés forma parte de los movimientos naturales del tobillo, estos consisten en el movimiento de la zona anterior del pie hacia dentro y hacia afuera. (Ver Figura 2.6)

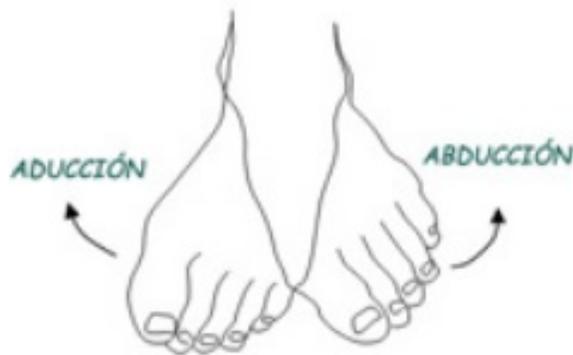


Figura 2.6: Movimiento del nivel 3.

Para cada grupo de los movimientos presentados son generados en un eje cartesiano, los cuales se visualizan mejor en la figura 3.18 así como el movimiento de cada ángulo de Euler.

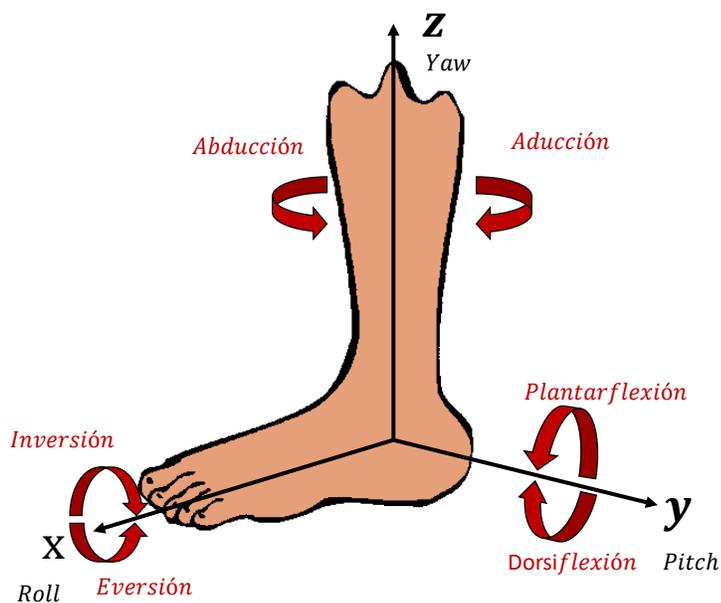
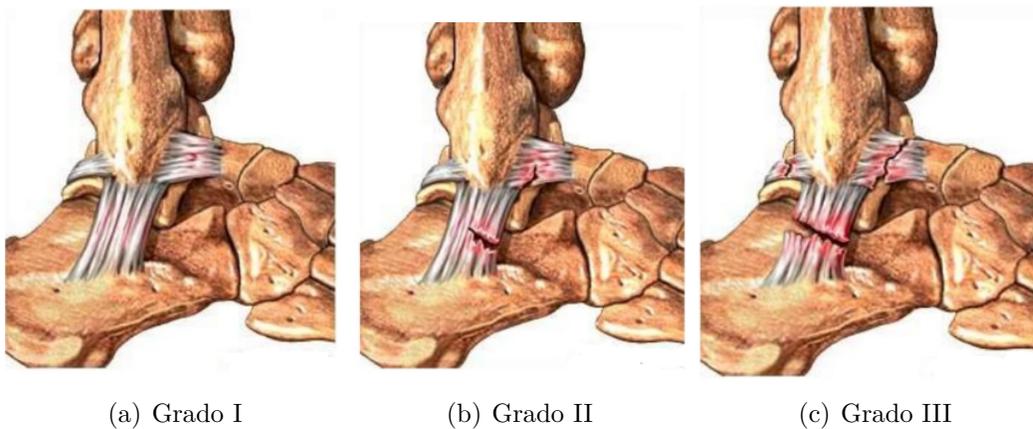


Figura 2.7: Movimientos del tobillo en ejes x , y y z .

2.2. Lesiones

Durante la carga fisiológica los ligamentos utilizan la tercera parte de la fuerza, la deformidad oscila entre 2% y 5%. En la dorsiflexión el LAPA no se tensa, por lo que se presume que el mecanismo de lesión es de inversión más plantiflexión, lo que hace que el peso que normalmente soporta la mortaja se desplace. Esta lesión se clasifica en tres grados.



(a) Grado I

(b) Grado II

(c) Grado III

Figura 2.8: Clasificación de lesiones. [37]

El grado I ocurre cuando se compromete de manera leve el ligamento (microdesgarros),

los pacientes refieren poco dolor, acompañado de discreto edema, y finalmente no hay pérdida de la funcionalidad, no hay dificultad en la marcha (Figura 2.8 (a)).

En el grado II se encuentra daño en menos del 50% del ligamento, el paciente presenta dolor moderado, sensibilidad al tacto y puede presentar equimosis, acompañado de una marcha dolorosa con pérdida funcional (Figura 2.8 (b)).

Por último en el grado III se aprecia la lesión completa del ligamento, el paciente refiere intenso dolor aunque algunos autores refieren que no siempre se presenta por la denervación secundaria a la extensión severa de la lesión, gran edema, siempre hay equimosis, dificultad marcada para la marcha y pérdida de funcionalidad articular (Figura 2.8 (c)) aumentando la tensión en este ligamento y termine en su compromiso (Figura 2.9 (a)). Por el contrario la eversión forzada causaría lesión al LD y la combinación de esta última fuerza con rotación interna de la tibia producirán una lesión en la sindesmosis (Figura 2.9 (b)) [38]

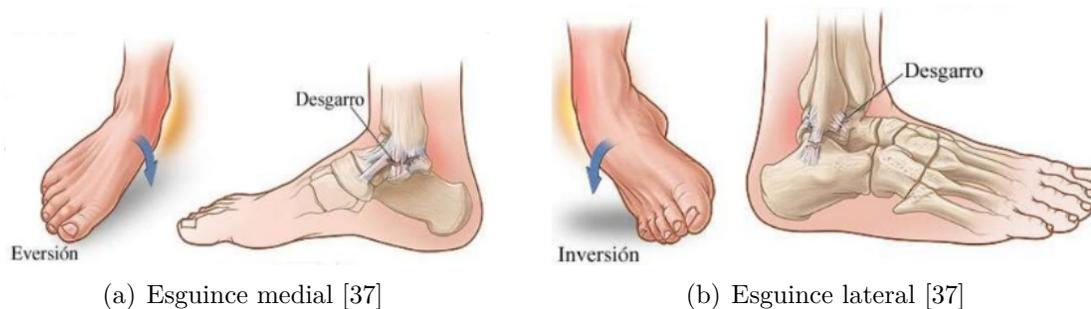


Figura 2.9: Tipos de esguince más comunes en la articulación de tobillo

Al presentar estas molestias el especialista procederá a realizar un diagnóstico a profundidad comenzando por un examen físico el cual inicia con la inspección, donde el edema y la equimosis son indicadores confiables de la severidad del trauma y compromiso de tejidos blandos; siguiendo con la evaluación, se deben palpar estructuras anatómicas entre las cuales es importante valorar la existencia de dolor en los ligamentos (LAPA, LCP, LAPP). Por otra parte, si se encuentra aumento de la sensibilidad en la articulación tibioperonea distal luego de un trauma en dorsiflexión y eversión, se sugiere esguince de la sindesmosis. Continuando con la evaluación funcional del tobillo, se deben realizar una serie de pruebas muy útiles a la hora de evaluar los diferentes componentes anatómicos para esto también se requiere un estudio de imágenes por medio de radiografías.

En el trauma de tobillo, además del compromiso de tejidos blandos es necesario descartar en la mayoría de los casos trazos de fractura, de esta manera se deben tomar radiografías. Las radiografías se realizan cuando hay sospecha clínica de lesión del LAPA /LCP, y se realizan tomando proyecciones radiográficas antero posterior y lateral, mientras se realiza la maniobra del cajón anterior y la maniobra de inversión talar, buscando observar un desplazamiento mayor a $5mm$ entre el domo del astrágalo y la superficie articular en la radiografía lateral para lesión del LAPA y de 10° en la proyección AP para el LCP. Posterior al diagnóstico se determina el tratamiento para el paciente por un especialista o médico.

2.3. Rehabilitación

La rehabilitación ha sido definida por la Organización Mundial de la Salud (OMS) como:

“El uso de todo los medios disponibles, con el objetivo de reducir el impacto de la discapacidad y de las enfermedades que la producen, permitiendo a las personas discapacitadas alcanzar una integración óptima en la sociedad”.

Esta definición incorpora la rehabilitación clínica pero también, muy importante, añade el concepto de la participación social, requiriendo el respaldo de la sociedad, para las necesidades de las personas con discapacidad, a fin de eliminar las barreras que impiden la participación, ya sea a nivel social o profesional.

Dentro de un contexto de salud, la rehabilitación ha sido definida como: *“Un proceso de cambio activo, mediante el cual, una persona discapacitada adquiere los conocimientos y las habilidades necesarias para poder llevar a cabo una función óptima, a nivel físico, psicológico y social”.* Esta definición indica, más explícitamente, el proceso que llevan a cabo las personas discapacitadas, para desarrollar sus propias capacidades, lo cual es el área más efectiva promovida por la rehabilitación médica. [39].

Posteriormente a todos los procedimientos médicos como reposo después de vendajes elásticos, férulas, botas de yeso, la siguiente fase es la rehabilitación, en sentido general, es el proceso por el cual se recuperan las aptitudes físicas perdidas a causa de un incidente traumático mediante terapia física. El objetivo de la rehabilitación es recuperar una función completa y sin limitaciones, sobre todo en el caso de los deportistas que necesitan volver al mismo nivel de exigencia física. Existen dos tipos de rehabilitación.

2.3.1. Fisioterapia

La kinesioterapia o fisioterapia es el arte de curar que utiliza todas las técnicas del movimiento. Integra un conjunto de terapias que emplean diversos agentes físicos y que se complementan entre si, según la afección a tratar, este conjunto se denomina a menudo fisioterapia. [40]

2.3.1.1. Fisioterapia Pasiva

El método consiste en una fuerza externa que provoca el movimiento en una determinada zona corporal evitando que el paciente tenga o realice una contracción muscular, que a su vez puede ser relajada o auto pasiva. En el caso de que dicha contracción sea relajada, el movimiento se vera limitado por la fisiología y la patología correspondiente al paciente y generalmente es recomendado para que se mantengan los recorridos articulares, en el caso de que la contracción sea auto pasiva, entonces la fuerza externa sera provocada por el mismo paciente en las zonas corporales que no son accesibles. (Ver figura 2.10 (a)). Este tipo de terapia se encuentra indicada particularmente para recuperar los movimientos

articulares y el esquema corporal del paciente y específicamente para corregir cualquier tipo de alteración circulatoria. [36]

2.3.1.2. Fisioterapia Activa

Este método terapéutico se basa en que el movimiento debe ser llevado a cabo mediante la contracción muscular del paciente, provocado por las fisuras musculares. Ambas técnicas se utilizan para el tratamiento de kinesiología, estos son ideales para provocar algún movimiento por la acción de la musculatura voluntaria, en situaciones en donde la contracción es muy débil y no logra generar el movimiento o bien, lo hace pero de manera completa. También puede utilizarse como técnica preventiva induciendo a la relajación y produciendo a su vez una estimulación en las áreas cutáneas y circulatorias. (Ver figura 2.10 (b)).

2.3.1.3. Fisioterapia Asistida

Finalmente se encuentra este método el cual es una mezcla de las dos anteriores, donde interviene la voluntad del paciente así como el trabajo del fisioterapeuta, dentro de las actividades se lleva el uso de tecnologías como lo son los rehabilitadores robóticos. (Ver figura 2.10 (c)). [36]



Figura 2.10: Tipos de Rehabilitación.

2.3.2. Rehabilitadores comerciales

En este apartado se mencionan algunos de los rehabilitadores comerciales, a continuación se mencionará brevemente las características de cada uno de los prototipos. En la tabla 2.2 se muestran las características principales de los productos presentados en la 2.11 y una clasificación de los movimientos: Dorsiflexión y Plantarflexión corresponde al grupo 1, Eversión e Inversión al grupo 2 y Aducción y Abducción al grupo 3. [41]

A partir del prototipo final en el año 1998 la investigación ha tratado de seguir esa línea para mejorar aplicaciones, rediseñar las interfases, inclusive modificar la estructura para diferentes tipos de actuadores. Un sin fin de trabajos para continuar con esta línea de robots Stewart en Rehabilitación.



(a) Producto 1



(b) Producto 2



(c) Producto 3



(d) Producto 4



(e) Producto 5



(f) Producto 6



(g) Producto 7



(h) Producto 8

Figura 2.11: Comparativa entre rehabilitadores comerciales.

Nombre	Tipo de movimiento			Actuador	Descripción
	1	2	3		
Prototipo 1. Elevador de pierna [41]	✓	X	X	No actuado	No realiza ningún movimiento por sí solo, El usuario coloca el pie en una altura en la cual una persona especializada realiza los movimientos de rehabilitación.
Prototipo 2. Fisiotek 2000 TS [42]	✓	X	X	Lineales en lazo abierto	Sólo proporciona un tipo de movimiento, este tiene que ser controlado por una persona especialista.
Prototipo 3. Reeducador de Tobillo [43]	✓	✓	✓	No actuado	Este dispositivo ofrece movimientos circulares bien definidos y el sistema mecánico está diseñado para mover el peso del pie con relativa facilidad, mezcla dos movimientos y tiene que ser usado de forma manual.
Prototipo 4. Artromot K1 [44]	✓	X	X	Motores	Los movimientos del dispositivo ya están motorizados pero no están bien definidos los rangos que se manejaran y no tienen un dispositivo que puede delimitarlos por lo que todo el tiempo de la terapia es necesario que un especialista este supervisando las rutinas.
Prototipo 5. OptiFlex [45]	✓	X	X	Motor en lazo abierto	Dispositivo que genera movimientos circulares teniendo como eje el tobillo, limitados por las dimensiones del aparato, usa un control que sobresale (teach-pendant) para manipular el tiempo y la velocidad.
Prototipo 6. Artromot Ankle Cpm Kit [44]	✓	X	X	Lineales	Aporta benéficos estéticos como reducir el riesgo de rozaduras y frotamiento de la piel además su combinación de vellón, espuma y piel de oveja sigue siendo cómoda para la piel.
Prototipo 7. Rutgers Ankle [46]	✓	✓	✓	Lineales	El sector educativo o de investigación también ha mostrado interés en desarrollar rehabilitadores de tobillo. Se muestra el primer prototipo desarrollado de la Universidad de New Jersey, EUA.
Prototipo 8. Desarrollo de un Sistema Robótico[47]	✓	X	✓	Motor	Proyecto Presentado en las memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica 2017 llevando el nombre de "Desarrollo de un Sistema Robótico para Rehabilitación de Lesiones de Tobillo"

Tabla 2.2: Productos comerciales.

2.4. Antropometría Humana

En esta sección se estudiará la antropometría de las extremidades del ser humano enfatizando el análisis en las extremidades inferiores de igual manera se presentará el estudio de la biomecánica del tobillo.

La antropometría es la medición de segmentos corporales que permiten clasificar al individuo, estos datos en el área de la ergonomía tienen una amplitud de usos tales como la determinación general y específica de las características dimensionales de los usuarios en sus diversas agrupaciones poblacionales. [48]

Percentil

Es una medida de posición no central que se puede describir como una forma de comparación de resultados, este dato es usado en estadística o en análisis de datos. El percentil es un número de 0 a 100 que está muy relacionado con el porcentaje pero no es el porcentaje en sí (Ver figura 2.12). Para un conjunto de datos, el percentil para un valor dado indica el porcentaje de datos que son igual o menores que dicho valor es decir nos indica donde se posiciona una muestra respecto al total. [49]

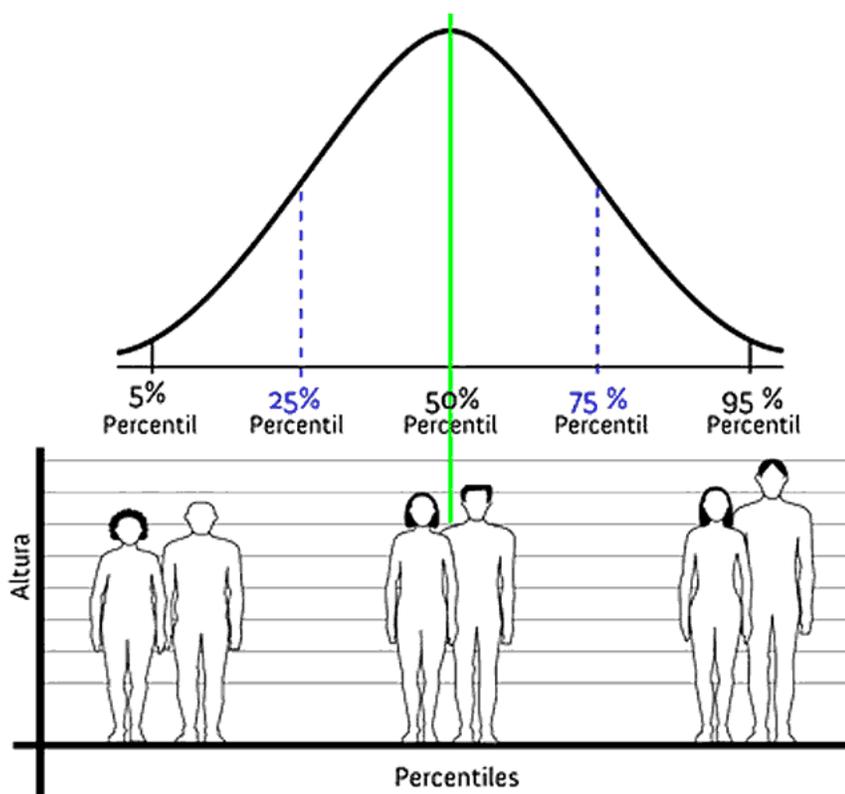


Figura 2.12: Porcentaje en percentiles.

Variabilidad humana

El ser humano es totalmente variado, por ejemplo, si tomamos una muestra de individuos

del mismo sexo, edad, raza, y condición socioeconómica y observamos sus características físicas nos encontraremos con una variedad de formas, tamaños, proporciones, colores de piel, tipos de cabello, etc. Estas variaciones son producto de la evolución biológica y sociocultural del hombre. [50]

Variabilidad antropométrica

La variabilidad esta determinada por cuatro factores principales:

- Herencia genética.
- Sexo.
- Edad.
- Condiciones socioeconómicas.

A continuación se presentan las variables antropométricas del cuerpo humano como se muestra en la figura 2.13 de esta forma se clasifican en grupos por el peso de cada segmento corporal (tabla 2.3) y las longitudes correspondientes (tabla 2.4) ordenados en base a cada porcentaje en percentiles.

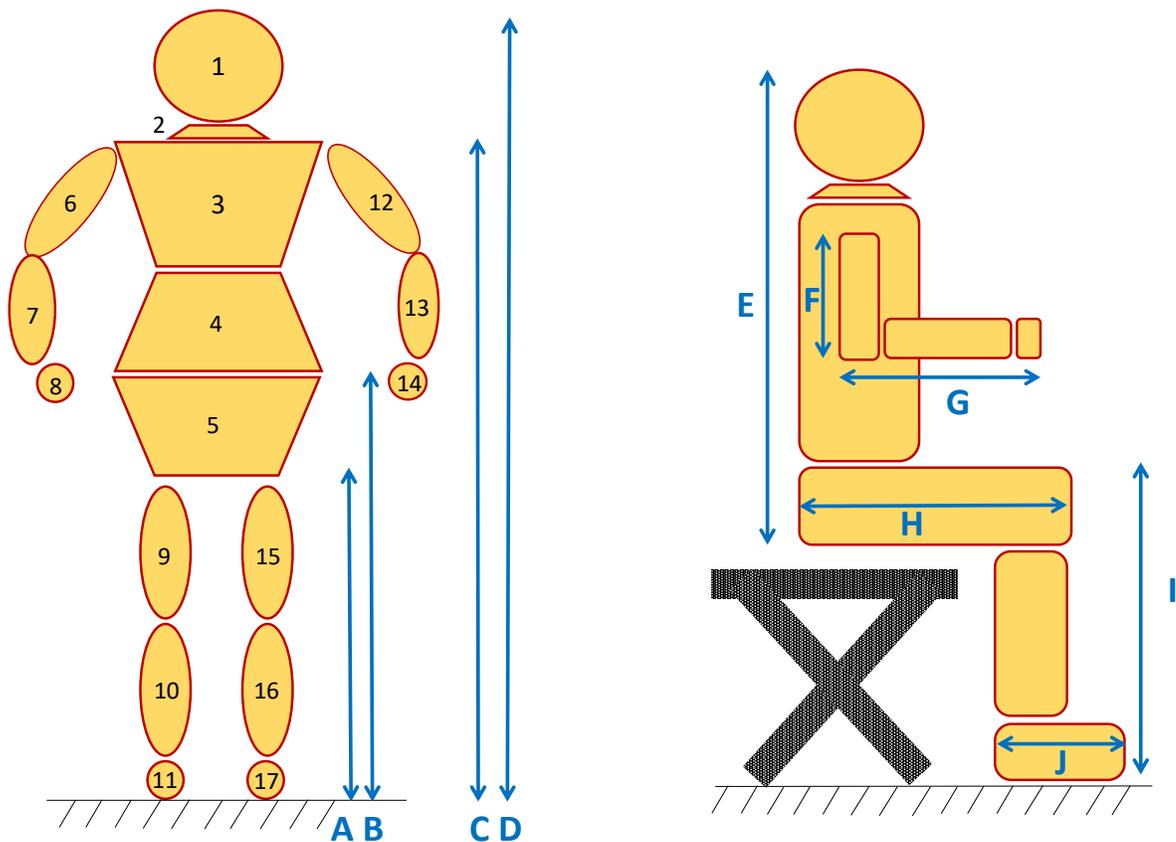


Figura 2.13: Dimensiones y peso del cuerpo humano.

Distribución del peso (Kg)							
Nombre		Masculino			Femenino		
		5 %	50 %	95 %	5 %	50 %	95 %
1	Cabeza	4.07	4.95	5.93	3.31	4.01	4.85
2	Cuello	1.48	1.80	2.16	1.20	1.45	1.76
3	Torso superior	15.30	18.58	22.28	7.69	9.30	11.25
4	Torso medio	9.01	10.95	13.13	5.45	6.59	7.95
5	Torso inferior	8.24	10.00	11.99	8.27	10.00	12.11
6,12	Brazo superior	1.84	2.23	2.67	1.41	1.71	2.07
7,13	Brazo inferior	1.14	1.39	1.66	0.848	1.02	1.24
8,14	Mano	0.43	0.52	0.63	0.34	0.42	0.50
9,15	Pierna superior (Muslo)	6.96	8.45	10.13	6.22	7.53	9.11
10,16	Pierna inferior	2.84	3.45	4.14	2.24	2.71	3.28
11,17	Pie	0.85	1.03	1.23	0.71	0.86	1.04
	Total	66.22	80.42	96.41	49.44	59.85	72.43

Tabla 2.3: Peso de cada segmento en Kg.[51]

Dimensiones del cuerpo humano (m)							
Nombre		Masculino			Femenino		
		5 %	50 %	95 %	5 %	50 %	95 %
A	Glúteos-pies	0.761	0.839	0.919	0.691	0.742	0.832
B	Cintura-pies	0.993	1.102	1.168	0.907	0.985	1.107
C	Hombros-pies	1.346	1.444	1.564	1.210	1.314	1.441
D	Estatura	1.649	1.759	1.869	1.518	1.618	1.724
E	Altura sentado	0.859	0.927	0.975	0.797	0.853	0.911
F	Brazo superior	0.333	0.361	0.389	0.306	0.332	0.358
G	Brazo inferior-mano	0.45	0.483	0.517	0.396	0.428	0.458
H	Pierna superior	0.558	0.605	0.660	0.531	0.578	0.628
I	Pierna inferior	0.506	0.553	0.599	0.461	0.502	0.546
J	Pie	0.243	0.261	0.282	0.218	0.233	0.258

Tabla 2.4: Dimensiones en metros. [52]

Con respecto a las tablas mostradas anteriormente y el análisis antropométrico de dicho capítulo, podemos obtener las dimensiones adecuadas para el diseño de la plataforma móvil tomando en cuenta el 95 % en percentiles masculinos esto es para tener una capacidad máxima en peso y longitud de cada extremidad, para el análisis se toman en cuenta los datos de pierna superior equivalente a 10.13 kg, pierna inferior a 4.14 kg, pie con valor de 1.23 kg y longitud de igual forma tomamos los datos equivalentes al 95 % en percentiles masculinos los cuales corresponden a la pierna superior a 0.6660 m, pierna inferior a 0.599 m, pie a 0.218 m, suponiendo que la persona dentro de este grupo pesa 96.41 kg, de esta forma cualquier persona con tamaño de pie distinto puede ser colocado sobre ella.

3

Modelado y Simulación

El manipulador Stewart utilizado en este estudio es un mecanismo paralelo de seis Grados de Libertad (GDL) que consiste en una placa móvil de cuerpo rígido, conectada a una placa base fija a través de seis patas cinemáticas independientes.

Estas piernas son cadenas cinemáticas idénticas, juntan la parte superior móvil y la plataforma inferior fija mediante juntas universales. Cada eslabón contiene un conjunto de tornillo de bola de precisión y un actuador. Por lo tanto, la longitud del eslabón es variable y se puede controlar por separado para realizar el movimiento de la plataforma móvil. [53]

Dado que una estructura paralela es una cadena cinemática cerrada, todas las patas están conectadas desde el origen del punto de la herramienta mediante una conexión en paralelo. Esta conexión permite una mayor precisión y mayor velocidad.

Los manipuladores cinemáticos paralelos tienen mejor rendimiento que los manipuladores cinemáticos en términos de un alto grado de precisión, altas velocidades o aceleraciones y alta rigidez. Por lo tanto, parecen perfectamente adecuados para la industria de alta velocidad aplicaciones, tales como pick-and-place o micro y mecanizado de alta velocidad. Se utilizan en muchos campos tales como sistemas de simulación de vuelo, fabricación y aplicaciones médicas.

3.1. Arquitectura de Plataforma Stewart

La Plataforma Stewart es un mecanismo paralelo de seis Grados de libertad (GDL) que consiste en una placa móvil de cuerpo rígido, conectada a una placa base fija a través de seis patas cinemáticas independientes, estas piernas son cadenas cinemáticas idénticas.

La placa superior móvil y la plataforma inferior fija por juntas universales, dándole movimiento a través de actuadores lineales o rotaciones. Por lo tanto, la longitud de las patas es variable y se pueden controlar por separado para realizar el movimiento de la plataforma móvil. Ver figura 3.1.

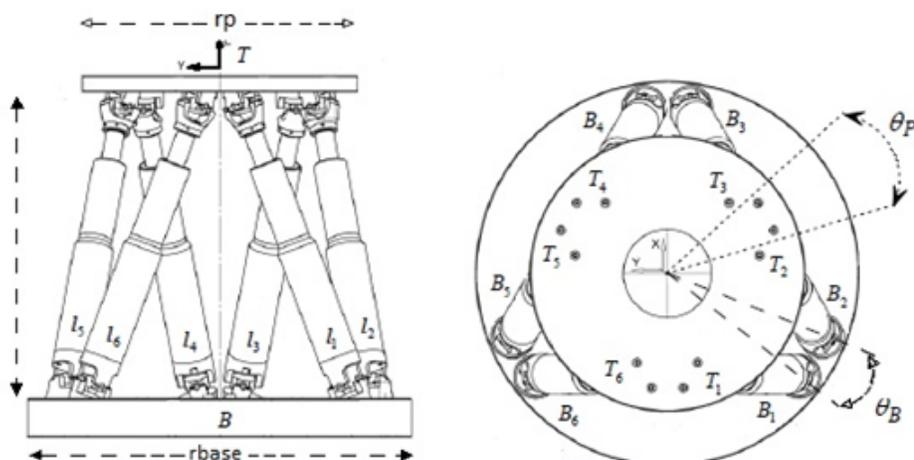


Figura 3.1: Arquitectura de la plataforma Stewart con actuadores lineales.

3.1.1. Análisis Cinemático

La cinemática es el estudio analítico de la geometría del movimiento de un robot con respecto a una referencia fija de un sistema de coordenadas sin tener en cuenta las fuerzas o momentos que causan el movimiento

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. Se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.

En la figura 3.2 se muestra la relación entre la cinemática Directa y la inversa, a continuación se presenta el análisis cinemático para la plataforma Stewart, de igual manera se presentan resultados de las mismas.

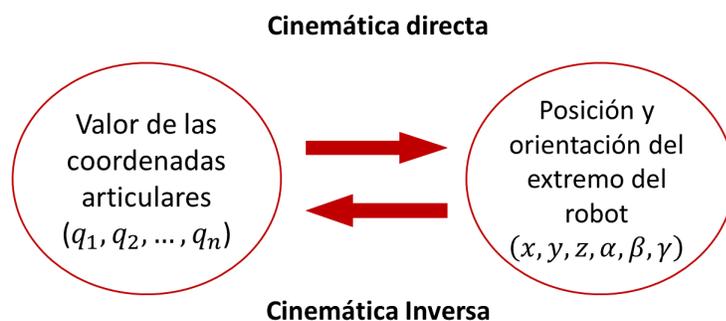


Figura 3.2: Cinemática de un Robot.

3.1.1.1. Cinemática Inversa

Uno de los principales problemas que se presentan en el análisis cinemático inverso en robots paralelos sin importar la configuración del mismo es su método de análisis cinemático puesto que no hay uno específico en la literatura Robótica para la obtención de las ecuaciones finales del mismo análisis.

Cuando se resuelve el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución de forma cerrada, [54] esto implica encontrar una relación matemática de la forma: $q_x = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ Este tipo de solución presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

- En muchas aplicaciones el problema cinemático inverso debe ser resuelto en tiempo real, por lo que una solución de tipo iterativo no garantiza una solución en el momento adecuado.
- Al contrario de la cinemática directa, el método inverso no siempre tiene una solución única. Existen ciertos métodos para resolver el problema de la cinemática inversa de un manipulador.

Método Geométrico.

El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

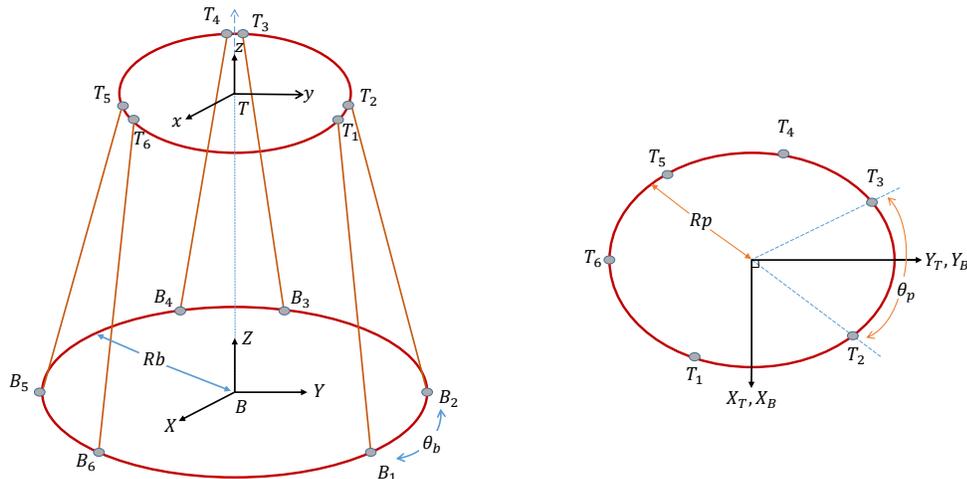


Figura 3.3: Estructura geométrica.

Para describir claramente el movimiento de la plataforma móvil, los sistemas de coordenadas se ilustran en la Figura 3.3. El sistema de coordenadas (B_{xyz}) está unido a la base

fija y otro sistema de coordenadas (T_{xyz}) está situado en el centro de masa de la plataforma móvil. Los puntos (B_i y T_i) son los puntos de conexión a la base ya las plataformas móviles, respectivamente.

Estos puntos se colocan en plataformas fijas y móviles. Además, los ángulos de separación entre los puntos (T_2 y T_3 , T_4 y T_5 , T_1 y T_6) están denotados por θ_p . De igual manera los ángulos de separación entre los puntos (B_1 y B_2 , B_3 y B_4 , B_5 y B_6) están denotados por θ_b . En la estructura de la figura 3.3, se visualizan las variables R_p y R_b las cuales son los radios de la plataforma móvil y la base, respectivamente.

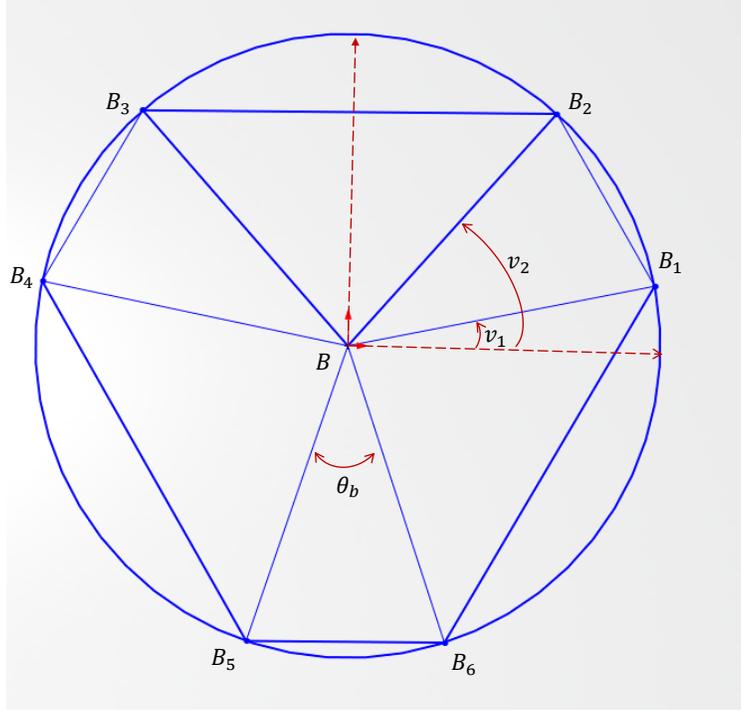


Figura 3.4: Diagrama geométrico de la plataforma fija.

La plataforma fija y móvil del robot Stewart estructuralmente están diseñados como un hexágono irregular posicionado en el plano x-y simétrico con respecto al eje como en la figura 3.4.

La distancia desde el centro de coordenadas de cada plataforma a cada punto de posición del actuador $\overline{B_1B_6}$ es igual al radio de la plataforma R_b y la forma es determinada por el ángulo θ_b , entre las dos primeras articulaciones, del mismo modo la forma de la base y de las coordenadas de las articulaciones de base $\overline{P_1P_6}$ están determinadas por R_p y θ_p . Indicando el ángulo entre $\angle BB_i$ con respecto al eje x esta dado por ν_i de igual manera para la plataforma móvil el ángulo formado entre $\angle PP_i$ esta dado por λ_i para $i = 1, 2, \dots, 6$, estos ángulos son obtenidos de forma trigonométrica con las siguientes ecuaciones:

$$\nu_i = 60^\circ i - \frac{\theta_b}{2} \quad ; \quad \lambda_i = 60^\circ i - \frac{\theta_p}{2} \rightarrow i = 1, 3, 5 \quad (3.1)$$

$$\nu_i = 60^\circ i + \frac{\theta_b}{2} \quad ; \quad \lambda_i = 60^\circ i + \frac{\theta_p}{2} \rightarrow i = 2, 4, 6 \quad (3.2)$$

Dado que las coordenadas de los actuadores son simétricas se pueden emplear para ambas plataformas, los puntos pares son positivos en el ángulo y los impares negativos. Teniendo estas coordenadas se procede a obtener las coordenadas generales en el plano x, y y z las cuales describen la posición de la i -ésima junta de la base con respecto al sistema de coordenadas de la base así como de la plataforma móvil como se muestra en las ecuaciones 3.3 y 3.4.

$$GT_i = \begin{bmatrix} GT_x \\ GT_y \\ GT_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \cos(\lambda_i) \\ R_p \sin(\lambda_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} GT_x \\ GT_y \\ GT_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b \cos(\nu_i) \\ R_b \sin(\nu_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde GT_i es la plataforma móvil y B_i es la plataforma base. La posición de la plataforma se puede describir mediante un vector de posición P y una matriz de rotación ${}^B R_T$. La matriz de rotación es definida por los ángulos yaw, pitch y roll. Es decir una rotación de α alrededor del eje x corresponde a la rotación $R_x(\alpha)$ seguido de una rotación de β alrededor del eje y da la rotación $R_y(\beta)$ y la rotación en γ alrededor del eje z corresponde a $R_z(\gamma)$, de esta manera se obtiene el sistema de coordenadas de la matriz de rotación de la plataforma móvil con respecto a las coordenadas de la plataforma fija (Base).

El vector de posición P denota el vector de traslación del origen de la plataforma móvil con respecto a la Base, por lo tanto la matriz de rotación y el vector de posición se dan a continuación.

$$P = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_Z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Dado que las tres rotaciones tienen lugar alrededor de los ejes de una trama de coordenadas fijas, el resultado de matriz de rotación se obtiene de la multiplicación de las tres matrices de rotación básicas como sigue:

$$X_{p-o} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T \quad (3.5)$$

$${}^B\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_Z(\gamma) \mathbf{R}_Y(\beta) \mathbf{R}_X(\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$${}^B\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \cos \gamma \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Al tener el vector de posición y orientación (3.5) procedemos a obtener el vector L_i el cual representa la longitud de cada actuador lineal, por medio de la norma Euclidiana.

$$L_i^2 = (P_x - B_{xi} + GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12})^2 + (P_y - B_{yi} + GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})^2 + (P_z + GT_{xi}r_{31} + GT_{yi}r_{32})^2 \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) se describe solo la longitud de un actuador lineal, pero para el análisis completo del prototipo que se requiere construir necesitamos realizar el análisis para actuadores rotacionales, esto para obtener el ángulo necesario para dicho actuador. Se procede a esquematizar el sistema de la plataforma Stewart en el área de los actuadores como un sistema leva-manivela como la figura 3.5 (a). Esto se realiza debido a la necesidad de conocer la variación de la longitud de cada unión brazo/hélice se produce con el movimiento angular del correspondiente motor anclado a dicha unión.

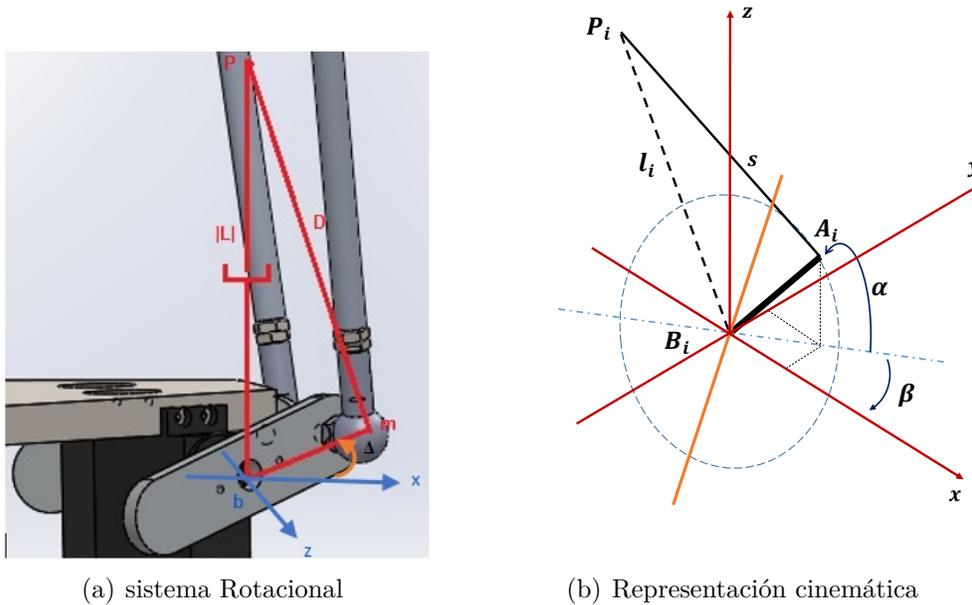


Figura 3.5: Representaciones Gráficas de Rotación de motor

En la figura 3.5 (b) se muestra la representación cinemática del recorrido de la hélice del motor anclada a la variable S Donde:

A_i : Es el punto de ancla del i -ésimo brazo con la hélice del rotor de su correspondiente motor.

B_i : Es el punto de unión de la hélice del motor con el rotor.

S : Es la longitud del i -ésimo brazo rígido de la plataforma

a Es la longitud de la hélice del motor

l_i : Es la distancia variable que existe entre el punto de ancla P_i del brazo con la placa superior y la junta B_i

w es un vector con coordenadas x y y cuyo origen esta en B_i y sirve de referencia para hallar las coordenadas del punto de ancla A_i

La elipse punteado representa el recorrido rotacional de la hélice del motor que forma los ángulos β con respecto a x y y y el ángulo α con respecto a x, y, z .

La posición de los puntos A_i y P_i varían con respecto al movimiento del motor, en cambio el punto B_i es fijo; con el fin de encontrar las coordenadas de A_i en cada instante de tiempo, se grafican los ángulos α y β como se muestra en la figura 3.6

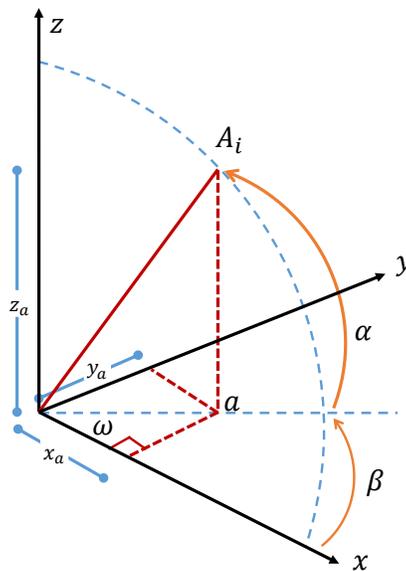


Figura 3.6: Recorrido Angular

Las coordenadas de A_i , B_i , y P_i se hallan usando las definiciones trigonométricas proyectando vectores y trasladando los ángulos α y β . A cada coordenada se le suma la correspondiente componente de B_i como se ve en la ecuación 3.9 debido a que este punto no es $(0,0,0)$, hay una distancia fija entre el origen y el centro de anclaje de la hélice con

el rotor, a continuación se hallan las coordenadas de A_i para el servomotor, al cual le corresponden los ángulos α y β .

$$A_i = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}; P_i = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

De acuerdo a la figura 3.6 obtenemos las equivalencias $\omega = x_a / \cos(\beta)$ y $\omega = a \cos(\alpha)$ de esta forma obtenemos las siguientes coordenadas al igualar y despejar, de igual manera se emplea para cada coordenada x_a y y_a :

$$\omega = \omega \therefore \rightarrow \frac{X_a}{\cos(\beta)} = a \cos(\alpha)$$

$$x_a = a \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_b \quad (3.10)$$

$$\omega = \omega \therefore \rightarrow \frac{y_a}{\sin(\beta)} = s \cos(\alpha)$$

$$y_a = a \cos(\alpha) \sin(\beta) + y_b \quad (3.11)$$

Para z_a se forma un solo equivalente trigonométrico $\sin(\alpha) = z_a/a$,donde a es la longitud de la hélice del motor

$$z_a = a \sin(\alpha) + z_b \quad (3.12)$$

Las ecuaciones anteriores solo son para los actuadores pares para el análisis de los motores impares los cuales tendrán el giro en sentido contrario corresponde el análisis de la figura 3.7 en la cual se muestra la relación entre los impares y pares.

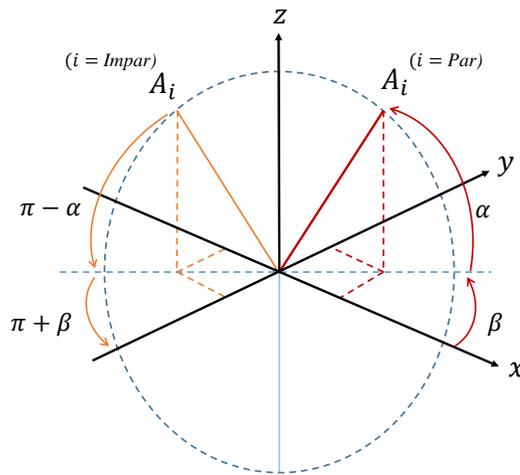


Figura 3.7: Barrido de la Leva

$$x_a = a \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi + \beta) + x_b \quad (3.13)$$

$$y_a = a \cos(\pi - \alpha) \sin(\pi + \beta) + y_b \quad (3.14)$$

$$z_a = a \sin(\pi - \alpha) + z_b \quad (3.15)$$

Donde:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha), \quad y \quad , \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad (3.16)$$

$$\sin(\pi + \beta) = -\sin(\beta), \quad y \quad , \cos(\pi + \beta) = -\cos(\beta) \quad (3.17)$$

Para comprobar las identidades trigonométricas sustituimos las ecuaciones 3.16 y 3.17 en las ecuaciones impares 3.13, 3.14, 3.15 y como resultado obtenemos las ecuaciones pares 3.10, 3.11 y 3.12 respectivamente. Ahora que se conocen las coordenadas del punto A_i se procede a determinar el ángulo α que se forma entre la hélice del motor y los ejes coordenados, por lo tanto se halla la magnitud de los vectores a , s y l teniendo en cuenta los puntos de cada uno como ve en la figura 3.6, cabe mencionar que las coordenadas x_b , y_b y z_b son fijas.

$$\begin{aligned} a^2 &= (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 \\ a^2 &= x_a^2 - 2x_a x_b + x_b^2 + y_a^2 - 2y_a y_b + y_b^2 + z_a^2 - 2z_a z_b + z_b^2 \\ a^2 &= (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) - 2(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} l^2 &= (x_p - x_b)^2 + (y_p - y_b)^2 + (z_p - z_b)^2 \\ l^2 &= x_p^2 - 2x_p x_b + x_b^2 + y_p^2 - 2y_p y_b + y_b^2 + z_p^2 - 2z_p z_b + z_b^2 \\ l^2 &= (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) - 2(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2 + (z_p - z_a)^2 \\ s^2 &= x_p^2 - 2x_p x_a + x_a^2 + y_p^2 - 2y_p y_a + y_a^2 + z_p^2 - 2z_p z_a + z_a^2 \\ s^2 &= (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) - 2(x_p x_a + y_p y_a + z_p z_a) + (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

De las ecuaciones 3.18 y 3.19 se despejan las expresiones x , y y z respectivamente como se muestran en las siguientes.

$$(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) = -a^2 - 2(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) \quad (3.21)$$

$$(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) = -l^2 - 2(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) \quad (3.22)$$

Se reemplazan las ecuaciones 3.21 y 3.22 en 3.20 y de esta manera se obtiene la ecuación siguiente:

$$s^2 - l^2 - a^2 = -(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) + 2(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b) - 2(x_p x_a + y_p y_a + z_p z_a) - (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) \quad (3.23)$$

Para manejar un sistema más común se multiplica todo por -1 y se reorganizan los términos para obtener la ecuación 3.24

$$l^2 - (s^2 - a^2) = 2(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b) + 2x_a(x_p - x_b) + 2y_a(y_p - y_b) + 2z_a(z_p - z_b) \quad (3.24)$$

Las ecuaciones 3.10 ,3.11 y 3.12 son las coordenadas del punto A_i del sistema por lo tanto se reemplazan en la ecuación 3.24, simplificando obtenemos la ecuación 3.25

$$l^2 - (s^2 - a^2) = 2(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_p x_b + y_p y_b + z_p z_b) + 2(a \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_b)(x_p - x_b) + 2(a \cos(\alpha) \sin(\beta) + y_b)(y_p - y_b) + 2(a \sin(\alpha) + z_b)(z_p - z_b)$$

$$l^2 - (s^2 - a^2) = 2a \sin(\alpha)(z_p - z_b) + 2a \cos(\alpha)(\cos(\beta)(x_p - x_b) + \sin(\beta)(y_p - y_b)) \quad (3.25)$$

Se realiza una sustitución de variables para simplificar la expresión 3.25

$$M = 2a(z_p - z_b) \quad (3.26)$$

$$N = 2a(\cos(\beta)(x_p - x_b) + \sin(\beta)(y_p - y_b)) \quad (3.27)$$

$$L = l^2 - (s^2 - a^2) \quad (3.28)$$

Se reemplazan las ecuaciones 3.26 ,3.27 y 3.28 en la ecuación 3.25.

$$L = M \sin(\alpha) + N \cos(\alpha) \quad (3.29)$$

Para finalizar el análisis necesitamos obtener el ángulo β que es el que necesitamos para la rotación del motor, de la ecuación 3.29 se despeja dicho ángulo aplicando identidades trigonométricas las cuales se expresan en el apéndice.

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2}}\right) - \arctan\left(\frac{N}{M}\right) \quad (3.30)$$

Con esto finalizamos la parte del análisis de la cinemática inversa, teniendo como resultado un ángulo así como la longitud de cada actuador según su posición y orientación

inicial. Posterior a esto, se lleva a cabo la programación en Matlab de las ecuaciones necesarias para la obtención de los parámetros así como una representación del robot Stewart.

Para la programación se requieren algunos parámetros para la simulación del mismo, en la tabla 3.1 se muestran los principales parámetros que se necesitan para ejecutar el algoritmo desarrollado empleando las ecuaciones del análisis cinemático inverso.

Parámetros	
R_b	0.200 m
R_p	0.125 m
θ_b	0.4103 rad
θ_p	0.6028 rad

Tabla 3.1: Parámetros Cinemática Inversa.

La estructura de la articulación del tobillo requiere su rotación alrededor de los tres ejes del sistema. Las coordenadas cartesianas se fijan con el tobillo y los tres ejes que representan el pivote giratorio en tres diferentes direcciones. Así, el movimiento de la articulación del tobillo se puede describir en tres momentos giratorios diferentes Presentados en el capítulo anterior, los cuales están representados alrededor de estos los tres ejes.

La Dorsiflexionn/Plantarflexion alrededor del eje y, Aducción/Abducción al rededor del eje z y finalmente la Eversión/Inversión alrededor del eje x esto de acuerdo a la biomecánica del tobillo humano. Teniendo esto en cuenta procedemos a realizar las pruebas necesarias dando parámetros iniciales para el algoritmo como lo son coordenadas de posición en x y y z, así como la orientación de la misma con los ángulos α , β y γ .

En la figura 3.8 se muestra la simulación de la plataforma Stewart en Matlab en la cual tienen diferentes ángulos de orientación en el eje x, de igual manera en la 3.9 se visualizan los mismos ángulos de orientación pero en el eje y. Estos datos se tomaron en base a la tabla 2.1 del capítulo anterior, en la cual se muestra un rango de 15° a 45° .

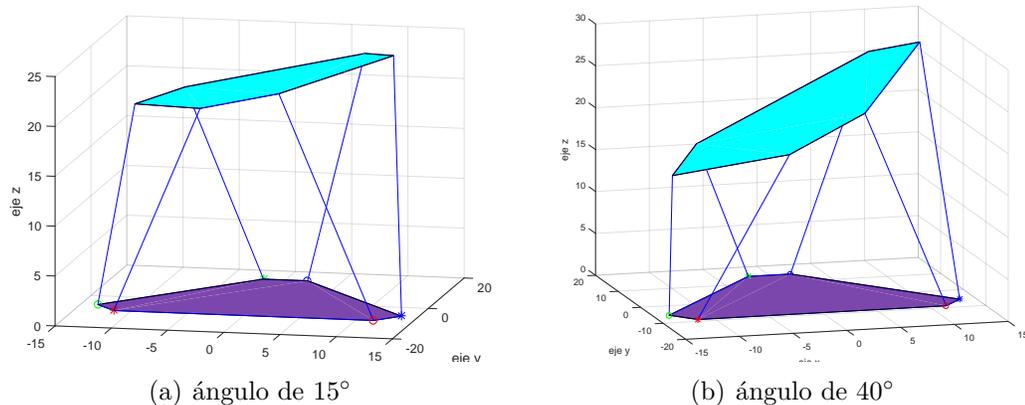


Figura 3.8: Rotación alrededor del eje x. (Inversión/Eversión)

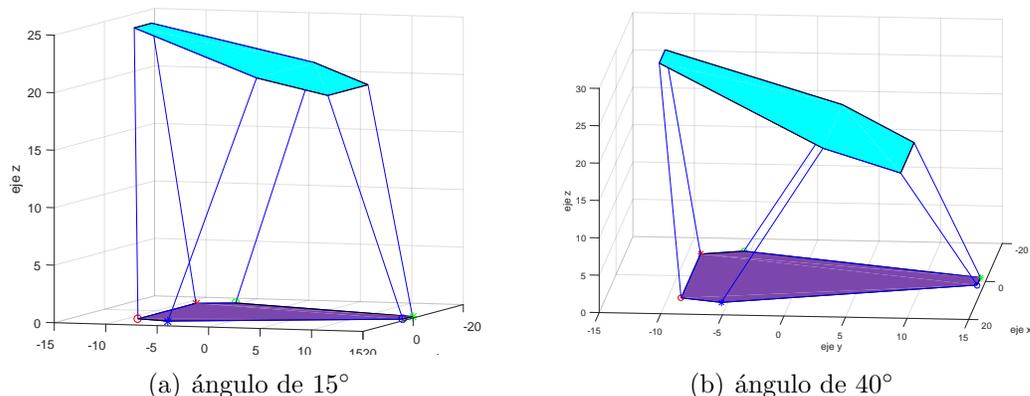


Figura 3.9: Rotación alrededor del eje y. (Plantarflexión/Dorsiflexión)

3.1.1.2. Cinemática Directa

La cinemática directa de un manipulador consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia (sistema inercial), conocidos los valores de las articulaciones actuadas y los parámetros geométricos de los elementos del robot [11]. Para el caso de la cinemática directa de los robots paralelos la solución no es única, cada manipulador posee un método distinto de solución, debido a que se llega a una ecuación polinomial con más de una solución .

Dado que sólo son conocidas las posiciones de las articulaciones actuadas, se busca en las matrices de transformación homogéneas del manipulador, las relaciones en las que un ángulo sea descrito a partir de los otros. Uno de los principales problemas que se presentan en el análisis de la cinemática directa en robots paralelos es la complejidad del sistema, puesto que en su mayoría estos resultan no lineales y de un conjunto varias de variables lo cual nos genera un alto costo computacional al momento de programar un algoritmo.

Los métodos numéricos en el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos han cobrado fuerza en los últimos años por varias razones. Probablemente la más importante, es que puede ingresarse a computadoras altamente eficientes a un costo cada vez más bajo, lo que permite su uso para la resolución de problemas altamente complejos. Una segunda razón es que los métodos numéricos son en muchos casos la única alternativa posible para la resolución de los frecuentes problemas no-lineales muchas veces intratables analíticamente.

Se pueden elegir varios algoritmos numéricos, para el análisis cinemático directo emplearemos el método de Newton-Raphson, que converge cuadráticamente en las proximidades de una solución. El método Newton-Raphson funcionará si las funciones varían sin problemas en el área de una solución, y si las condiciones iniciales propuestas para iniciar el algoritmo no está lejos de la solución real.

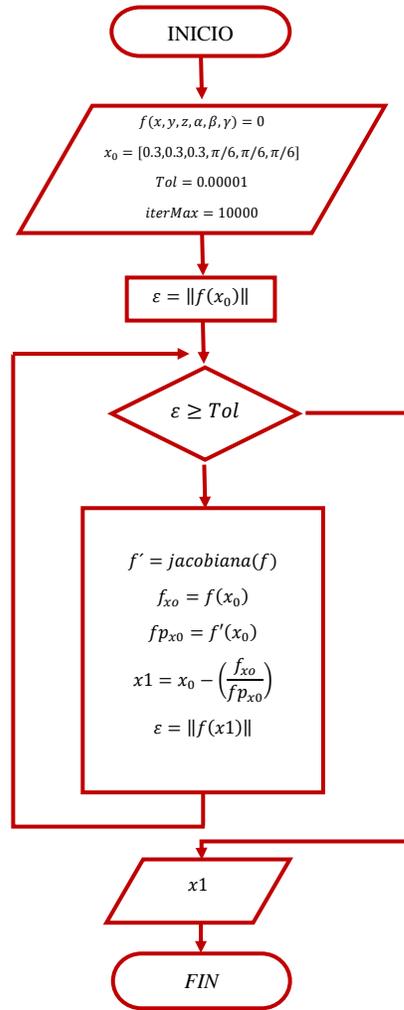


Figura 3.10: Método Newton-Raphson

Para comenzar el análisis cinemático directo partimos de la norma euclidiana en la ecuación 3.8 la cual forma parte de la cinemática inversa. Esta ecuación están elevados cada coordenada al cuadrado, se procede a expandir este polinomio.

$$\begin{aligned}
 L_i^2 = & x^2 + y^2 + z^2 + B_{xi}^2 + B_{yi}^2 + (GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12})^2 + (GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})^2 + \\
 & (GT_{xi}r_{31} + GT_{yi}r_{32})^2 - 2(GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12})(x - B_{xi}) + 2(GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})(y - B_{yi}) + \\
 & 2(GT_{xi}r_{31} + GT_{yi}r_{32})z - 2(xB_{xi} + yB_{yi}) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.3,3.4 y 3.7 en 3.31 tomando en cuenta los cambios de variable para facilitar el análisis, donde: $P_x = x, P_y = y, P_z = z$ y los componentes de la matriz de rotación ${}^B R_T$ (Ec. 3.6) están dados por r con los subíndices correspondientes.

$$\begin{aligned}
 L_i^2 = & x^2 + y^2 + z^2 + R_b^2 + R_a^2 + 2(GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12})(x - B_{xi}) + \\
 & 2(GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})(y - B_{yi}) + 2(GT_{xi}r_{31} + GT_{yi}r_{32})z - 2(xB_{xi} + yB_{yi}) \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = -L_i^2 + x^2 + y^2 + z^2 + R_b^2 + R_a^2 + 2(GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12}) \\ (x - B_{xi}) + 2(GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})(y - B_{yi}) + 2(GT_{xi}r_{31} + \\ GT_{yi}r_{32})z - 2(xB_{xi} + yB_{yi}) \quad (3.33)$$

Para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

La ecuación 3.33 nos representa un sistema de ecuaciones no lineales, además de tener 6 variables a solucionar, para esto emplearemos el método de Newton-Raphson multivariables el cual es programado en Matlab siguiendo el pseudocódigo de la figura 3.10, teniendo como función principal la ecuación 3.33 con condiciones iniciales en el vector x_0 . El código tiene un número máximo de iteraciones, al ser un sistema de seis variables de igual manera la función forma un vector de seis filas generando un alto costo computacional.

Para realizar las pruebas correspondientes en el algoritmo de Newton-Raphson dentro de la cinemática directa, se necesitan los parámetros de entrada a la función del algoritmo, los cuales son la longitud de cada actuador de la cinemática inversa, con estos datos el código se ejecuta dando como respuesta un vector de las coordenadas en x, y, z, α, β y γ . En las figuras 3.11 y 3.12 se muestran solo en las coordenadas x y y en la que se gráfica correctamente las coordenadas iniciales de posición y orientación (P).

$$x_0 = [0,3; 0,3; 0,3; \pi/6; \pi/6; \pi/6] \quad (3.34)$$

$$P = [0,3 \cos(\pi t); 0,3 \sin(\pi t); 0,55 + 0,2 \sin(\pi t/2); 0; 0; 0] \quad (3.35)$$

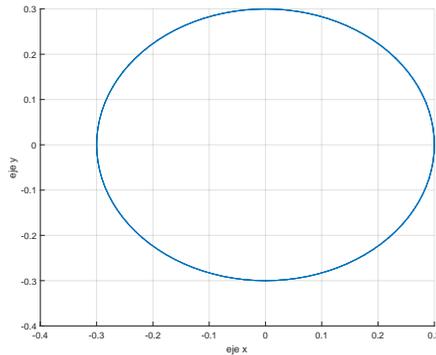


Figura 3.11: Trayectoria en círculo

Como resultado mostramos dos trayectorias diferentes con ciertos parámetros que favorezcan al algoritmo Newton-Raphson. En la figura 3.11 se muestra una trayectoria circular y 3.12 se muestra otra en forma de ocho, ambas tienen buenos resultados con el algoritmo

Newton-Raphson implementado en la cinemática directa. Por medio de esta trayectoria se puede probar el alcance de la plataforma, ya que para la aplicación de rehabilitación y en base a la biomecánica estudiada anteriormente, sabemos las limitaciones del tobillo para poder realizar un giro, el cual es limitado, la estructura Stewart presenta un espacio de trabajo reducido sin embargo este es suficiente para realizar los movimientos de rehabilitación.

$$P = [2,5 \sin(t); 2,5 \sin(2t); 14; 0; 0; 0] \quad (3.36)$$

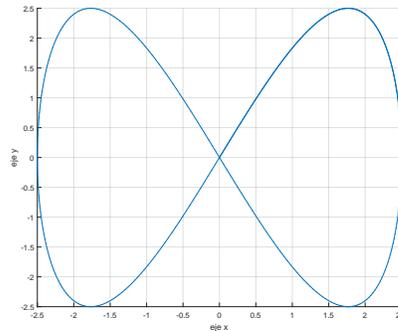


Figura 3.12: Trayectoria en ocho

Para la plataforma Stewart se necesitan de ambos análisis cinemáticos para mejores resultados, en la cinemática inversa se propusieron modelos geométricos para facilitar la comprensión de la misma, de esta forma obteniendo las longitudes de los actuadores lineales como rotacionales y a partir de esta continuar con el desarrollo de la cinemática directa, la cual presentó algunas singularidades al ser un sistema de seis variables, vector de $[6 \times 1]$ donde en cada fila se encuentra una ecuación no lineal representado el sistema mismo. Esto generó un algoritmo bastante robusto para poder solucionar el sistema de ecuaciones no lineales así como satisfacer los parámetros de referencia.

Como resultados finales tenemos gráficas en 3D del análisis cinemático inverso así como los ángulos correspondientes para cada actuador rotacional, en la parte directa obtenemos gráficas de la trayectoria propuesta como parámetro inicial, en esta parte depende de la cinemática directa por lo tanto si la cinemática inversa es incorrecta el algoritmo final no convergerá a ningún resultado, pero realizando el análisis previo los resultados del análisis cinemático son satisfactorios.

3.1.1.3. Cinemática Diferencial

En esta sección, el interés se centra en la configuración de la plataforma Stewart que consiste en una plataforma inferior hexagonal semi-regular, un equilátero, plataforma superior triangular, y seis actuadores, como se muestra en la Figura 3.13.

Posicionando un punto de inercia (X, Y, Z) en el centro de la plataforma inferior con el eje Z apuntando verticalmente hacia arriba. Se Fija otro sistema de coordenadas móviles (x, y, z) en el centro de gravedad de la plataforma superior con el eje z normal a la plataforma, apuntando hacia afuera. [55]

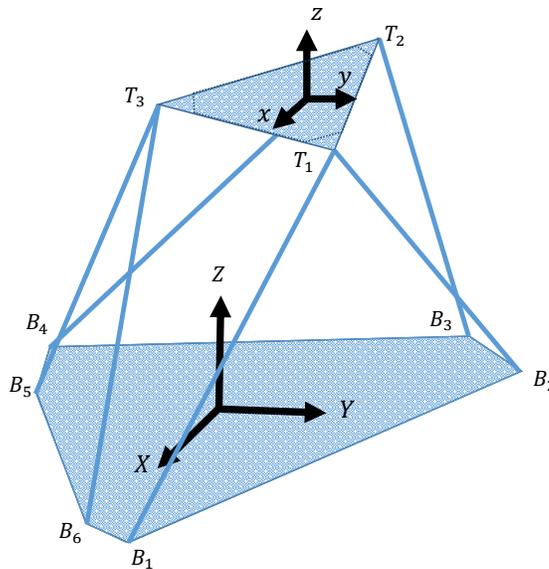


Figura 3.13: Geometría de la plataforma Stewart.

A continuación estos dos sistemas de coordenadas se llaman estructura base (BASE) y estructura superior (TOP), respectivamente. Las dimensiones físicas de la plataforma inferior y superior y las coordenadas de sus vértices en términos de la estructura BASE y la estructura TOP se muestran en la Figura 3.14.

Para especificar la configuración de la plataforma Stewart de seis grados de libertad, se necesitan seis variables independientes de orientación de posición. Denotada por la ubicación del origen de TOP con respecto a BASE por $[px, py, pz]^T$. Dejando a (α, β, γ) representar los ángulos de rotación definidos por una rotación en serie de TOP sobre tres ejes determinados. Por lo tanto, la posición y orientación de la plataforma superior se especifica mediante $X_{p-o} = [P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta, \gamma]^T$.

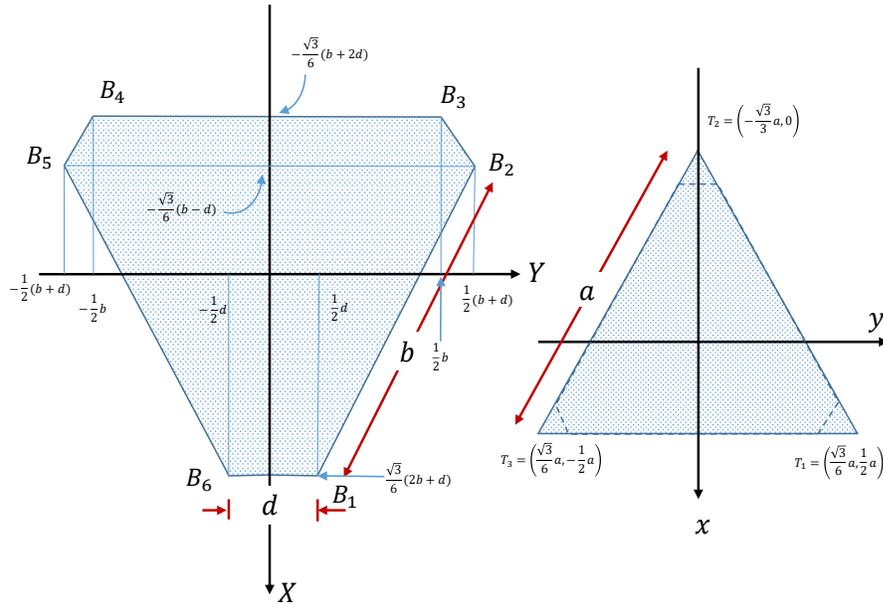


Figura 3.14: Coordenadas de cada vértice.

Un requisito básico para $Xp - o$ es que existe una relación de uno a uno entre la configuración del sistema y el valor de $Xp - o$. Otro requisito es que el valor de $Xp - o$ debe tener un significado físico claro que haga que el operador del sistema sea fácil de especificar y pruebe las configuraciones del sistema por $Xp - o$. La orientación de TOP con respecto a BASE se define rotando en serie TOP alrededor de tres ejes girados, si en algún momento, dos de los ejes girados coinciden entre sí, entonces dos ángulos de rotación se vuelven dependientes entre sí. Solo cinco variables independientes de posición-orientación están disponibles. La relación uno a uno mencionada anteriormente es violada. Lo peor es que en esta configuración, la matriz jacobiana perderá su rango incluso si el sistema no está en una posición singular. Para evitar este dilema, se pueden elegir tres ejes fijos (por ejemplo, la transformación del balanceo (yaw), cabeceo (pitch) y guiñada (roll)) o tres ejes móviles como ejes girados. De esta forma, los tres ejes fijos (o los ejes móviles) nunca coinciden, los ángulos de rotación son siempre independientes entre sí. Una deficiencia de esta opción es que no es fácil obtener los valores de (α, β, γ) si se da la configuración del sistema.

Los ángulos de Euler estándar se definen girando primero el marco móvil sobre el eje Z fijo, luego sobre el eje y en movimiento y el eje z. En nuestro caso, si la plataforma superior es paralela a la base, entonces el eje Z y el eje z coinciden entre sí, lo que nos pone en un dilema. En vista de este hecho, en este análisis los ángulos de rotación (α, β, γ) se definen rotando primero TOP sobre el eje X fijo en un grado, luego alrededor del eje Y fijo en 13 grados, y finalmente sobre el eje z en movimiento por grados. Todos los ángulos se miden en un sentido diestro [56].

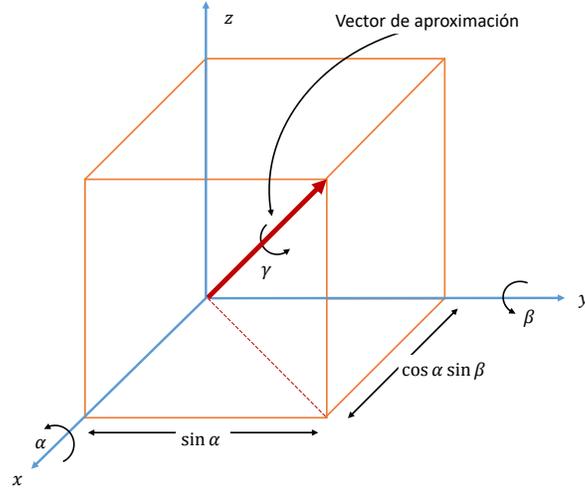


Figura 3.15: Rotaciones en cada eje.

Los ángulos de rotación definidos en este análisis tienen un significado físico muy claro. Los α y β se utilizan para definir un "vector de aproximación" de la plataforma superior. El ángulo γ se usa para definir el ángulo de balanceo (roll) sobre el vector de aproximación. Dada la configuración, los valores correspondientes de (α, β, γ) se calculan fácilmente (ver Figura 3.15). Aunque el dilema discutido anteriormente aún posiblemente ocurra cuando $\alpha = 90^\circ$, en cuyo caso el mover el eje z coincidirá con el eje Y fijo, en la práctica esta configuración nunca se alcanza debido a las limitaciones mecánicas en la plataforma Stewart.

Ahora resumamos brevemente el análisis cinemático del capítulo anterior. Denote un vector de las longitudes de las piernas por $L = [L_1, L_2, \dots, L_6]^T$. La transformación cinemática es el mapeo desde las longitudes L del actuador a la posición y orientación de la plataforma superior $X_{p-o} = [px, py, pz, \alpha, \beta, \gamma]$ en el espacio cartesiano, se determinan las longitudes de las patas L_i por:

$$L_1 = \sqrt{(X_{T1} - d/2\sqrt{3} - b/\sqrt{3})^2 + (Y_{T1} - d/2)^2 + Z_{T1}^2} \quad (3.37)$$

$$L_2 = \sqrt{(X_{T1} - d/2\sqrt{3} + b/2\sqrt{3})^2 + (Y_{T1} - d/2 - b/2)^2 + Z_{T1}^2} \quad (3.38)$$

$$L_3 = \sqrt{(X_{T2} + d/\sqrt{3} + b/2\sqrt{3})^2 + (Y_{T2} - b/2)^2 + Z_{T2}^2} \quad (3.39)$$

$$L_4 = \sqrt{(X_{T2} + d/\sqrt{3} + b/2\sqrt{3})^2 + (Y_{T2} + b/2)^2 + Z_{T2}^2} \quad (3.40)$$

$$L_5 = \sqrt{(X_{T3} - d/2\sqrt{3} + b/2\sqrt{3})^2 + (Y_{T3} + b/2 + d/2)^2 + Z_{T3}^2} \quad (3.41)$$

$$L_6 = \sqrt{(X_{T3} - d/2\sqrt{3} - b/\sqrt{3})^2 + (Y_{T3} + d/2)^2 + Z_{T3}^2} \quad (3.42)$$

Donde:

$$X_{T1} = px + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \sin \beta \sin (\gamma + 60^\circ) + \cos \beta \cos (\gamma + 60^\circ)] \quad (3.43)$$

$$Y_{T1} = py + \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin(\gamma + 60^\circ) \quad (3.44)$$

$$Z_{T1} = pz + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \cos \beta \sin(\gamma + 60^\circ) - \sin \beta \cos(\gamma + 60^\circ)] \quad (3.45)$$

$$X_{T2} = px - \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma] \quad (3.46)$$

$$Y_{T2} = py - \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin \gamma \quad (3.47)$$

$$Z_{T2} = pz - \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma] \quad (3.48)$$

$$X_{T3} = px + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \sin \beta \sin (\gamma - 60^\circ) + \cos \beta \cos (\gamma - 60^\circ)] \quad (3.49)$$

$$Y_{T3} = py + \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin(\gamma - 60^\circ) \quad (3.50)$$

$$Z_{T3} = pz + \frac{a}{\sqrt{3}} [\sin \alpha \cos \beta \sin(\gamma - 60^\circ) - \sin \beta \cos(\gamma - 60^\circ)] \quad (3.51)$$

En resumen, uno no puede obtener la solución explícita para las ecuaciones cinemáticas generales. Eso hace que sea imposible estudiar la dinámica de la plataforma Stewart usando las ecuaciones de la cinemática directa. Por otro lado, el problema inverso es mucho más simple que el directo. Las ecuaciones 3.37 a 3.42 dan las expresiones explícitas de las longitudes de las patas L_i en términos de las coordenadas de los vértices de la plataforma superior (X_{Ti}, Y_{Ti}, Z_{Ti}) , y luego de las ecuaciones 3.43 a 3.51 se expresan estas coordenadas con la posición y orientación dadas del centro de la plataforma superior $(Px, Py, Pz, \alpha, \beta, \gamma)$.

Por lo tanto, para obtener la relación entre la velocidad de \dot{L} y la velocidad en el espacio cartesiano $\dot{X}_{p-o} = [\dot{p}x \ \dot{p}y \ \dot{p}z \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]$, diferenciando ambos lados de las ecuaciones (3.37) a (3.51) con respecto al tiempo. Donde $X_T = [X_{T1} \ Y_{T1} \ Z_{T1} \ X_{T2} \ Y_{T2} \ Z_{T2} \ X_{T3} \ Y_{T3} \ Z_{T3}]^T$ y la matriz $J_1(X_{p-o})$ es de (6×9) .

$$\dot{L} = J_1(X_{p-o})\dot{X}_T \quad (3.52)$$

$$\dot{X}_T = J_2(X_{p-o})\dot{X}_{p-o} \quad (3.53)$$

$$\ddot{L}_i = J\dot{X}_{p-o} + J\ddot{X}_{p-o} \quad (3.54)$$

$$J_1(X_{p-o}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_1}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_1}{\partial Z_{T1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_2}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_2}{\partial Z_{T1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_3}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_3}{\partial Z_{T1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_4}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_4}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_4}{\partial Z_{T1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_5}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_5}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_5}{\partial Z_{T1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_6}{\partial X_{T1}} & \frac{\partial L_6}{\partial Y_{T1}} & \frac{\partial L_6}{\partial Z_{T1}} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_{T1}} = \frac{X_{T1} - d/2\sqrt{3} - b/\sqrt{3}}{L1}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial Y_{T1}} = \frac{Y_{T1} - d/2}{L1}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial Z_{T1}} = \frac{Z_{T1}}{L1} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_{T1}} = \frac{X_{T1} - d/2\sqrt{3} + b/2\sqrt{3}}{L2}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial Y_{T1}} = \frac{Y_{T1} - d/2 - b/2}{L2}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial Z_{T1}} = \frac{Z_{T1}}{L2} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial X_{T2}} = \frac{X_{T2} + d/\sqrt{3} + b/2\sqrt{3}}{L3}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial Y_{T2}} = \frac{Y_{T2} - b/2}{L3}, \quad \frac{\partial L_3}{\partial Z_{T2}} = \frac{Z_{T2}}{L3} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial L_4}{\partial X_{T2}} = \frac{X_{T2} + d/\sqrt{3} + b/2\sqrt{3}}{L4}, \quad \frac{\partial L_4}{\partial Y_{T2}} = \frac{Y_{T2} + b/2}{L4}, \quad \frac{\partial L_4}{\partial Z_{T2}} = \frac{Z_{T2}}{L4} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial L_5}{\partial X_{T3}} = \frac{X_{T3} - d/2\sqrt{3} + b/2\sqrt{3}}{L5}, \quad \frac{\partial L_5}{\partial Y_{T3}} = \frac{Y_{T3} + d/2 + b/2}{L5}, \quad \frac{\partial L_5}{\partial Z_{T3}} = \frac{Z_{T3}}{L5} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial L_6}{\partial X_{T3}} = \frac{X_{T3} - d/2\sqrt{3} - b/\sqrt{3}}{L6}, \quad \frac{\partial L_6}{\partial Y_{T3}} = \frac{Y_{T3} + d/2}{L6}, \quad \frac{\partial L_6}{\partial Z_{T3}} = \frac{Z_{T3}}{L6} \quad (3.61)$$

Y la matriz $J_2(X_{p-o})$ es de (9x6) como se muestra:

$$J_2(X_{p-o}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (Y_{T1} - py) \sin \beta & (Z_{T1} - pz) & \frac{X_{T2} - X_{T3}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin(\gamma + 60^\circ) & 0 & \frac{Y_{T2} - Y_{T3}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & (Y_{T1} - py) \cos \beta & (X_{T1} - px) & \frac{Z_{T2} - Z_{T3}}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & (Y_{T2} - py) \sin \beta & (Z_{T2} - pz) & \frac{X_{T3} - X_{T1}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \gamma & 0 & \frac{Y_{T3} - Y_{T1}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & (Y_{T2} - py) \cos \beta & -(X_{T2} - px) & \frac{Z_{T3} - Z_{T1}}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & (Y_{T3} - py) \sin \beta & (Z_{T3} - pz) & \frac{X_{T1} - X_{T2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin(\gamma - 60^\circ) & 0 & \frac{Y_{T1} - Y_{T2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & (Y_{T3} - py) \cos \beta & -(X_{T3} - px) & \frac{Z_{T1} - Z_{T2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Tomando en cuenta que J_1 y J_2 son funciones explícitas de X_T , pero a su vez son funciones implícitas de X_{p-o} . Para enfatizar que el vector X_{p-o} dado, puede determinar de manera única el valor de J_1 y J_2 , se usa un argumento explícito para X_{p-o} . Se realiza una combinación de las ecuaciones (3.52) y (3.53) para obtener una sola ecuación:

$$\dot{L} = J_1(X_{p-o})J_2(X_{p-o})\dot{X}_{p-o} = J(X_{p-o})\dot{X}_{p-o} \quad (3.63)$$

Donde la matriz Jacobiana final es de (6x6) y se obtiene de la siguiente ecuación:

$$J(X_{p-o}) = \begin{bmatrix} \partial L_1/\partial X_{T1} & \partial L_1/\partial Y_{T1} & \partial L_1/\partial Z_{T1} & \dot{j}_{1,4} & \dot{j}_{1,5} & \dot{j}_{1,6} \\ \partial L_2/\partial X_{T1} & \partial L_2/\partial Y_{T1} & \partial L_2/\partial Z_{T1} & \dot{j}_{2,4} & \dot{j}_{2,5} & \dot{j}_{2,6} \\ \partial L_3/\partial X_{T2} & \partial L_3/\partial Y_{T2} & \partial L_3/\partial Z_{T2} & \dot{j}_{3,4} & \dot{j}_{3,5} & \dot{j}_{3,6} \\ \partial L_4/\partial X_{T2} & \partial L_4/\partial Y_{T2} & \partial L_4/\partial Z_{T2} & \dot{j}_{4,4} & \dot{j}_{4,5} & \dot{j}_{4,6} \\ \partial L_5/\partial X_{T3} & \partial L_5/\partial Y_{T3} & \partial L_5/\partial Z_{T3} & \dot{j}_{5,4} & \dot{j}_{5,5} & \dot{j}_{5,6} \\ \partial L_6/\partial X_{T3} & \partial L_6/\partial Y_{T3} & \partial L_6/\partial Z_{T3} & \dot{j}_{6,4} & \dot{j}_{6,5} & \dot{j}_{6,6} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Para $i = 1, 2$

$$j_{i,4} = (Y_{T1} - py) \left(\frac{\partial L_i}{\partial X_{T1}} \sin \beta + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T1}} \cos \beta \right) - \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T1}} \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin (\gamma + 60^\circ) \quad (3.65)$$

$$j_{i,5} = (Z_{T1} - pz) \frac{\partial L_i}{\partial X_{T1}} - (X_{T1} - px) \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T1}} \quad (3.66)$$

$$j_{i,6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial L_i}{\partial X_{T1}} (X_{T2} - X_{T3}) + \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T1}} (Y_{T2} - Y_{T3}) + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T1}} (Z_{T2} - Z_{T3}) \right) \quad (3.67)$$

Para $i = 3, 4$

$$j_{i,4} = (Y_{T2} - py) \left(\frac{\partial L_i}{\partial X_{T2}} \sin \beta + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T2}} \cos \beta \right) - \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T2}} \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \gamma \quad (3.68)$$

$$j_{i,5} = (Z_{T2} - pz) \frac{\partial L_i}{\partial X_{T2}} - (X_{T2} - px) \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T2}} \quad (3.69)$$

$$j_{i,6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\partial L_i}{\partial X_{T2}} (X_{T3} - X_{T1}) + \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T2}} (Y_{T3} - Y_{T1}) + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T2}} (Z_{T3} - Z_{T1}) \right] \quad (3.70)$$

Para $i = 5, 6$

$$j_{i,4} = (Y_{T3} - py) \left(\frac{\partial L_i}{\partial X_{T3}} \sin \beta + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T3}} \cos \beta \right) - \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T3}} \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin (\gamma - 60^\circ) \quad (3.71)$$

$$j_{i,5} = (Z_{T3} - pz) \frac{\partial L_i}{\partial X_{T3}} - (X_{T3} - px) \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T3}} \quad (3.72)$$

$$j_{i,6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial L_i}{\partial X_{T3}} (X_{T1} - X_{T2}) + \frac{\partial L_i}{\partial Y_{T3}} (Y_{T1} - Y_{T2}) + \frac{\partial L_i}{\partial Z_{T3}} (Z_{T1} - Z_{T2}) \right) \quad (3.73)$$

Singularidades

La expresión (3.63) proporciona una ruta de transformación de \dot{X}_{p-o} a \dot{L} usando la matriz jacobiana $J(X_{p-o})$. También muestra que si $J(X_{p-o})$ no es singular, entonces cualquier variación de

la velocidad en el espacio del enlace puede transformarse de forma única en el correspondiente variación de la velocidad en el espacio cartesiano. Por lo tanto, la matriz Jacobiana actúa como un puente que permite una transformación bidireccional entre el espacio de enlace y el espacio cartesiano. Particularmente, si no hay movimiento en el espacio de enlace, es decir $\dot{L} = 0$, esto significa que no hay movimiento en el espacio cartesiano, y la plataforma Stewart permanecerá quieta. Sin embargo, si en ciertas configuraciones $J(X_{p-o})$ es singular, entonces la ruta de transformación desde el espacio actuado al espacio cartesiano está bloqueada. En este caso, incluso si no hay movimiento en el espacio de enlace ($\dot{L} = 0$), la plataforma superior todavía se mueve posiblemente en algunas direcciones. [56]

En otras palabras, en singularidades, la plataforma Stewart puede ganar más grados de libertad. El problema se agrava aún más porque ninguna fuerza o par en el espacio cartesiano se puede transformar en el espacio actuado, es decir, la plataforma Stewart está fuera de control en posiciones singulares. Se sugiere tomar la redundancia del manipulador para resolver el problema. En realidad, la redundancia solo puede mover las singularidades originales de algunos puntos a algunos otros puntos, no puede eliminar o incluso reducir las posiciones singulares. Por lo tanto, desde el punto de vista de la aplicación, investigar las condiciones bajo las cuales habrá singularidades se vuelve más importante y más útil.

Por lo tanto, el manipulador no tiene una singularidad cinemática inversa dentro del espacio de trabajo del manipulador, pero puede poseer una singularidad cinemática directa cuando J tiene un rango deficiente. Tenga en cuenta que las singularidades de la cinemática inversa pueden ocurrir en el límite del espacio de trabajo, donde una o más ramas están completamente estiradas o en posiciones retractadas ([57]). La singularidad en la cinemática directa puede ocurrir dentro del espacio de trabajo del manipulador, cuando J se vuelve deficiente en rango. Esta singularidad ocurrirá cuando la matriz jacobiana del manipulador sea cuadrada (6x6) y cumpla con:

$$\det(J) = 0 \tag{3.74}$$

En la estructura, así como en las simulaciones de la plataforma Stewart se observan dichas singularidades, tales como indeterminación de la matriz jacobiana con condiciones iniciales iguales a cero, también podemos observar el rango de movimiento de alcance de tobillo es limitado debido a ello.

3.1.2. Modelado Dinámico

El modelado dinámico de los manipuladores paralelos es bastante complicado debido a su estructura de bucle cerrado, la relación entre los parámetros del sistema, el alta no linealidad en la dinámica del sistema y las restricciones cinemáticas. El modelado dinámico de robots también puede dividirse en dos temas: el modelo inverso dinámico y el modelo directo. El modelo de dinámica inversa es importante para el control del sistema mientras que el modelo directo se utiliza para la simulación. Para obtener el modelo dinámico de los manipuladores paralelos, estudios publicados por muchos investigadores en la literatura. El análisis dinámico de manipuladores paralelos se ha realizado tradicionalmente a través de varios métodos diferentes, tales como el método de Newton-Euler, la formulación de Lagrange, el principio del trabajo virtual. El enfoque de Newton-Euler requiere el cálculo de todas las fuerzas y momentos de restricción entre los enlaces. Uno de los estudios importantes fue presentado por Dasgupta y Mruthyunjaya (1998) sobre la formulación dinámica del manipulador SP. En su estudio, las ecuaciones dinámicas de forma

cerrada del SP 6GDL en el espacio de trabajo y el espacio articular fueron derivadas usando el enfoque de Newton-Euler [58]. Las ecuaciones dinámicas derivadas se implementaron para la dinámica inversa y hacia adelante del manipulador de la plataforma Stewart, y los resultados de la simulación mostraron que esta formulación proporcionó un modelado completo de la dinámica de SP. Además, demostró la fuerza del enfoque de Newton-Euler aplicado a los manipuladores paralelos y señaló una manera eficiente de derivar las ecuaciones dinámicas a través de esta formulación. Este método también fue utilizado por Khalil e Ibrahim (2007) ([59]). Presentaron una solución de forma cerrada simple y general para los modelos dinámicos inverso y directo de robots paralelos.

El método propuesto se aplicó en dos robots paralelos con estructuras diferentes. Harib y Srinivasan (2003) realizaron análisis cinemático y dinámico de estructuras de máquinas basadas en SP con cinemática inversa y directa, singularidad, dinámica inversa y dinámica de avance, incluyendo la fricción de las articulaciones y la dinámica del actuador [60]. La formulación de Newton-Euler se utilizó para derivar las ecuaciones dinámicas del cuerpo rígido. Do y Yang (1988) [61] y Reboulet y Berthomieu, (1991) [62] presentaron el modelado dinámico de SP usando el enfoque de Newton-Euler. Introdujeron algunas simplificaciones en los modelos de piernas. Además de estos trabajos, otros (Guo y Li [63], 2006, Carvalho y Ceccarelli, 2001, [64]) también utilizaron el enfoque de Newton-Euler. Otro método para derivar la dinámica del manipulador SP es la formulación de Lagrange. Este método se utiliza para describir la dinámica de un sistema mecánico a partir de los conceptos de trabajo y energía. Abdellatif y Heimann (2009) derivaron el conjunto de ecuaciones diferenciales explícitas y detalladas en seis dimensiones que describen la dinámica inversa de los manipuladores cinemáticos paralelos no redundantes con seis GDL [65]. Demostraron que la derivación del modelo explícito era posible utilizando el formalismo lagrangiano de una manera computacionalmente eficiente y sin simplificaciones. Lee y Shah (1988) derivaron el modelo dinámico inverso en el espacio articular de un manipulador de 3-DGL actuado en paralelo usando un enfoque lagrangiano [66]. Además, dieron un ejemplo numérico de trazado de una trayectoria helicoidal para demostrar la influencia de la dinámica de enlace sobre la fuerza de accionamiento requerida. Guo y Li (2006) derivaron las ecuaciones dinámicas compactas de seis GDL con actuadores prismáticos sobre la base de la combinación del método de Newton-Euler con la formulación de Lagrange [63].

Para validar la formulación propuesta, se estudiaron ejemplos numéricos utilizados en otras referencias. Los resultados de la simulación mostraron que se podrían derivar ecuaciones dinámicas explícitas en el espacio de tareas para los manipuladores de la plataforma Stewart aplicando la combinación de Newton-Euler con la formulación de Lagrange. Leuret y co-autores (1993) estudiaron las ecuaciones dinámicas del manipulador de la plataforma de Stewart. La dinámica se dio en el algoritmo paso a paso [53]. Lin y Chen presentaron un procedimiento eficiente para la generación computarizada de ecuaciones de modelado simbólico para el manipulador de la plataforma Stewart [67]. Utilizaron la formulación de Lagrange para la derivación de ecuaciones dinámicas. El objetivo del estudio fue desarrollar un algoritmo eficiente basado en MATLAB para el cálculo de las ecuaciones dinámicas de manipuladores de robots de enlace paralelo. Además, propusieron el control del torque de la computadora para verificar la efectividad de las ecuaciones dinámicas.

Para el modelado dinámico de los manipuladores paralelos, se han desarrollado muchos enfoques como el principio del trabajo virtual así como el método de matriz recursiva. Aunque las ecuaciones derivadas para la dinámica de los manipuladores paralelos presentan diferentes

niveles de complejidad y cargas computacionales, los resultados de las fuerzas calculados por diferentes aproximaciones son equivalentes. El análisis cinemático diferencial desempeña un papel vital en el estudio de manipuladores robóticos. Resulta que el estudio de las velocidades en un manipulador paralelo conduce a la definición de la matriz jacobiana. La matriz jacobiana no solo revela la relación entre las velocidades variables conjuntas de un manipulador paralelo a las velocidades lineales y angulares de la plataforma móvil, también construye la transformación necesaria para encontrar las fuerzas del actuador a partir de las fuerzas y los momentos que actúan sobre la plataforma móvil. El diseño cinemático óptimo de manipuladores es un tema importante y desafiante en la investigación robótica paralela [68].

La mayor parte del trabajo que se ha realizado sobre el tema se ha dirigido hacia la optimización de los índices de destreza o manipulabilidad [69], que de hecho están relacionados con la precisión cinemática y con el análisis jacobiano de dichos sistemas [70]. En el contexto de los manipuladores paralelos, la precisión cinemática es un tema muy importante. De hecho, es bien sabido que un tipo especial de degeneración local puede ocurrir en el movimiento de estos manipuladores. Físicamente, estas configuraciones conducen a:

- a. Un cambio instantáneo en los grados de libertad del sistema y, por lo tanto, una pérdida de capacidad de control.
- b. Una importante degradación de la rigidez natural que puede conducir a una articulación muy alta fuerzas o pares.

Por lo tanto, es muy importante identificar configuraciones singulares en la etapa de diseño para mejorar el rendimiento. Las singularidades de los manipuladores paralelos han sido estudiados por varios investigadores. El propósito principal de los enfoques propuestos recientemente es minimizar el número de operaciones implicadas en el cálculo de la dinámica del manipulador. Se puede concluir que las ecuaciones dinámicas de los manipuladores paralelos teóricamente no tienen problemas. Por otra parte, el foco de atención debe estar en la exactitud y la eficiencia computacional del modelo.

El objetivo de este capítulo es presentar el análisis sobre la formulación dinámica de un manipulador tipo Stewart de 6 GDL en conjunto al análisis previo según requiera el sistema. Las ecuaciones dinámicas del manipulador han sido formuladas por medio del método de Lagrange. El modelo dinámico incluyó la dinámica rígida del cuerpo del mecanismo, así como la dinámica de los actuadores. Obtener la matriz Jacobiana precisa es muy esencial para el modelo de simulación precisa. Por otra parte presentar el análisis dinámico de la extremidad inferior humana, y haciendo relación para la rehabilitación.

3.1.2.1. Modelo Dinámico de la Plataforma Stewart

El análisis dinámico del manipulador SP siempre es difícil en comparación con el serial manipulador debido a la existencia de varias cadenas cinemáticas, todas conectadas por el plataforma móvil. Se usaron varios métodos para describir el problema y obtener modelado dinámico del manipulador. En la literatura, todavía no hay consenso sobre qué la formulación es la mejor para describir la dinámica del manipulador. La formulación de Lagrange fue utilizado para el análisis de la plataforma Stewart ya que proporciona una estructura analítica y ordenada facilitando la comprensión de la misma.

Energía Cinética

La energía cinética de la plataforma móvil es una suma de dos energías de movimiento dado que la plataforma móvil tiene traslación y rotación de tres ejes ortogonales, (X, Y, Z) . La primera parte es la energía de traslación que se produce debido al movimiento de traslación del centro de masa de la plataforma móvil. La energía de traslación está definida por:

$$K_{(tras)} = \frac{1}{2} m_{up} (\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2) \quad (3.75)$$

Donde m_{up} es la masa de la plataforma móvil. Para movimiento rotatorio de la plataforma móvil alrededor de su centro de masa, la energía cinética de rotación se puede escribir como

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{up(mf)}^T I_{mf} \bar{\Omega}_{up(mf)} \quad (3.76)$$

Donde $I_{(mf)}$ y $\bar{\Omega}_{up(mf)}$ son: La matriz de inercia y la velocidad angular de la plataforma móvil respectivamente.

$$\bar{\Omega}_{up(mf)} = R_z(\gamma)^T R_x(\beta)^T R_y(\beta)^T \bar{\Omega}_{up(ff)} \quad (3.77)$$

$$I_{(mf)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Donde $\bar{\Omega}_{up(ff)}$ denota la velocidad angular de la plataforma móvil con respecto a la base. Dada la definición de los ángulos α , β y γ , la velocidad angular, $\bar{\Omega}_{up(ff)}$ es:

$$\bar{\Omega}_{up(ff)} = \dot{\alpha} R_y(\beta) \bar{X} + \dot{\beta} \bar{Y} + \dot{\gamma} R_x(\alpha) R_z(\gamma) \bar{Z} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{up(ff)} = & \left(\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\bar{\Omega}_{up(ff)} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

En el sistema de coordenadas de la plataforma móvil, la velocidad angular de la plataforma móvil está dada en la ecuación 3.77 la cual da como resultado lo siguiente:

$$\bar{\Omega}_{up(mf)} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \gamma \sin \beta - \cos \alpha \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & -\cos \alpha \cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ 0 & -\sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Teniendo como resultado la energía cinética total de la plataforma móvil de la siguiente forma:

$$K = K_{tras} + K_{rot} = \frac{1}{2}m_{up} (\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2) + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{up(mf)}^T I_{mf} \bar{\Omega}_{up(mf)} \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{X}_{p-o}^T M_{up}(X_{p-o}) \dot{X}_{p-o} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{P}_x & \dot{P}_y & \dot{P}_z & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}^T M_{up} \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Donde la matriz $M_{up} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y sus elementos se denominan $M_{n,m}$ respectivamente en las siguientes ecuaciones y para otro caso igual a cero.

$$M_{11} = m_{up} \quad (3.85)$$

$$M_{22} = m_{up} \quad (3.86)$$

$$M_{33} = m_{up} \quad (3.87)$$

$$M_{44} = I_x \cos^2 \gamma + I_y \sin^2 \gamma \quad (3.88)$$

$$M_{45} = (I_x - I_y) \cos \alpha \cos \gamma \sin \gamma \quad (3.89)$$

$$M_{54} = (I_x - I_y) \cos \alpha \cos \gamma \sin \gamma \quad (3.90)$$

$$M_{55} = \cos^2 \alpha (I_x \sin^2 \gamma + I_y \cos^2 \gamma) + I_z \sin^2 \alpha \quad (3.91)$$

$$M_{56} = -I_z \sin^2 \alpha \quad (3.92)$$

$$M_{65} = -I_z \sin^2 \alpha \quad (3.93)$$

$$M_{66} = I_z \quad (3.94)$$

$$(3.95)$$

$$K = \frac{1}{2}(\dot{X}_{p-o}^T M_{up} \dot{X}_{p-o}) \quad (3.96)$$

Energía Potencial

Para el cálculo en esta parte es mas sencilla, considerando el término de energía potencial la cual esta relacionada directamente con la aceleración de la gravedad se tiene lo siguiente:

$$P = m_{up}gh$$

Donde g es la gravedad y h es la altura de la plataforma móvil, por lo tanto la energía potencial se resume como:

$$P = m_{up}gp_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{up}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_{p-o} \quad (3.97)$$

Ecuaciones de Lagrange

La función de Lagrange se define como la diferencia entre cinética y potencial energías de un sistema mecánico (3.98).

Dado que la energía cinética depende tanto de las coordenadas generalizadas como de sus derivadas temporales, y mientras que la energía potencial solo depende de las coordenadas generalizadas.

$$\mathcal{L} = K - P \quad (3.98)$$

La formulación de Lagrange se usa para derivar el modelado dinámico de la Manipulador Stewart. Considerando q y τ como las coordenadas generalizadas correspondientes y fuerzas generalizadas, respectivamente, las ecuaciones clásicas generales del movimiento pueden ser obtenido de la formulación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} = \tau \quad (3.99)$$

Donde $K(q, \dot{q})$ es la energía cinética y $P(q)$ es la energía potencial.

Antes de derivar las ecuaciones de movimiento gobernantes de algunos manipuladores paralelos típicos, vale la pena reducir las ecuaciones dinámicas obtenidas para un manipulador de robot en términos de su estructura y propiedades. Considere un manipulador totalmente paralelo de n grados de libertad, cuya coordenada generalizada se denota por el vector X . Si el conjunto de la ecuación dinámica derivada de la ecuación 3.99 se escribe para todas las coordenadas generalizadas en una forma vectorial, este rendimiento en el que τ denota el vector de fuerzas generalizadas del manipulador, y L denota el lagrangiano que se define como la diferencia entre cinética y energías potenciales (Ec. 3.98). Para este análisis usaremos la ecuación siguiente que se deriva de la ecuación 3.99 la cual se iguala a $J^T F$, esto se debe al tipo de actuadores de la plataforma, al ser rotacionales exigen generar fuerza a partir del torque generado por estos.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J^T F \quad (3.100)$$

Donde M es la matriz de inercias, C es la matriz de Coriolis y G el vector de pares gravitacionales. La matriz de Coriolis $C(q, \dot{q})$ es el vector que se puede determinar directamente a partir de la derivada temporal de la función de Lagrange basada en la ecuación de Lagrange. También puede ser determinado de manera equivalente a partir de las relaciones basado en la derivada de tiempo de la matriz de masa. Usa la derivada del tiempo del Lagrangiano para determinar el Coriolis de la formulación general así como empleando los símbolos de Christoffel

$$C(q, \dot{q})_k = \sum_j^n \left(\sum_i^n c_{ijk} \dot{q}_i \right) \dot{q}_j \quad \text{para } k = 1, \dots, 6 \quad (3.101)$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \quad (3.102)$$

Aplicando los símbolos de Christoffel a la matriz de las masas de la plataforma obtenemos la siguiente matriz

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(q, \dot{q})_{44} & C(q, \dot{q})_{45} & C(q, \dot{q})_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C(q, \dot{q})_{54} & C(q, \dot{q})_{55} & C(q, \dot{q})_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C(q, \dot{q})_{64} & C(q, \dot{q})_{65} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$C(q, \dot{q})_{44} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\dot{\gamma} \sin(2\gamma) \quad (3.104)$$

$$C(q, \dot{q})_{45} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\dot{\gamma} \cos(\alpha) \cos(2\gamma) + \frac{1}{2}I_z\dot{\gamma} \sin(2\alpha) - \frac{1}{2}(I_z - I_x \sin^2(\gamma) - I_y \cos^2(\gamma))\dot{\beta} \sin(2\alpha) \quad (3.105)$$

$$C(q, \dot{q})_{46} = \frac{1}{2}(I_y - I_x)\dot{\alpha} \sin(2\gamma) - \frac{1}{2}(I_y - I_x)\dot{\beta} \cos(\alpha) \cos(2\gamma) + \frac{1}{2}I_z\dot{\beta} \sin(2\alpha) \quad (3.106)$$

$$C(q, \dot{q})_{54} = \frac{1}{2}(I_y - I_x)\dot{\gamma} \sin(\alpha) \sin(2\gamma) - \frac{1}{2}I_z\dot{\gamma} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\dot{\gamma} \cos(\alpha) \cos(2\gamma) + \frac{1}{2}(I_z - I_x \sin^2(\gamma) - I_y \cos^2(\gamma) - I_y \cos^2(\gamma)) \quad (3.107)$$

$$C(q, \dot{q})_{55} = \frac{1}{2}\dot{\alpha} \sin(2\alpha)(I_z - I_x \sin^2(\gamma) - I_y \cos^2(\gamma)) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos^2(\alpha) \sin(2\gamma)\dot{\gamma} \quad (3.108)$$

$$C(q, \dot{q})_{56} = -\frac{1}{2}I_z \sin(2\alpha)\dot{\alpha} + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos(\alpha) \cos(2\gamma)\dot{\alpha} + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos^2(\alpha) \sin(2\gamma)\dot{\beta} \quad (3.109)$$

$$C(q, \dot{q})_{64} = -\frac{1}{2}(I_x \sin^2(\gamma) + I_y \cos^2(\gamma)) \sin(2\alpha)\dot{\beta} + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin(2\gamma)\dot{\alpha} + \frac{1}{2}(I_y - I_x) \cos(\alpha) \cos(2\gamma)\dot{\beta} \quad (3.110)$$

$$C(q, \dot{q})_{65} = -\frac{1}{2}I_z \sin(2\alpha)\dot{\alpha} - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos(\alpha) \cos(2\gamma)\dot{\alpha} - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos^2(\alpha) \sin(2\gamma)\dot{\beta} \quad (3.111)$$

El par gravitacional de la plataforma lo obtenemos a partir de la energía potencial que esta representado en el ecuación 3.135. Se procede a programar todas las ecuaciones en Simulink, para esto requerimos de ciertos parámetros para generar el algoritmo para esto, emplearemos los mismos que se llevaron a cabo en el análisis cinemático.

Al ser un sistema de seis variables en posición, velocidad y aceleración, resulta mas complejo y los diagramas de Simulink son muy amplios por lo tanto se presenta un diagrama sencillo para la representación del sistema, y posteriormente se presentarán cada uno de los diagramas por separado. Para el modelo se empleará la siguiente ecuación derivada de 3.100.

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \left(J^T F - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) \right) \quad (3.112)$$

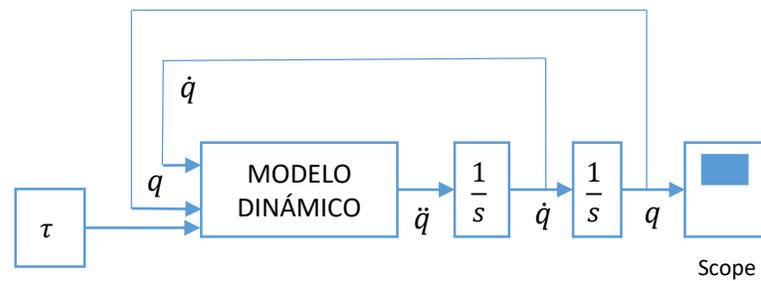


Figura 3.16: Diagrama a bloques del modelo dinámico del robot.

3.2. Análisis de extremidad inferior

Para la obtención del modelo dinámico, se requiere un análisis de los planos geométricos para esto se considere a una persona en una posición de pie como en la Figura 3.17 a). Si se coloca un sistema de coordenadas cartesianas en el torso de la persona, es una práctica común tener el eje X hacia adelante, el eje Z hacia arriba y el eje Y hacia la izquierda de la persona, como se muestra. [71]

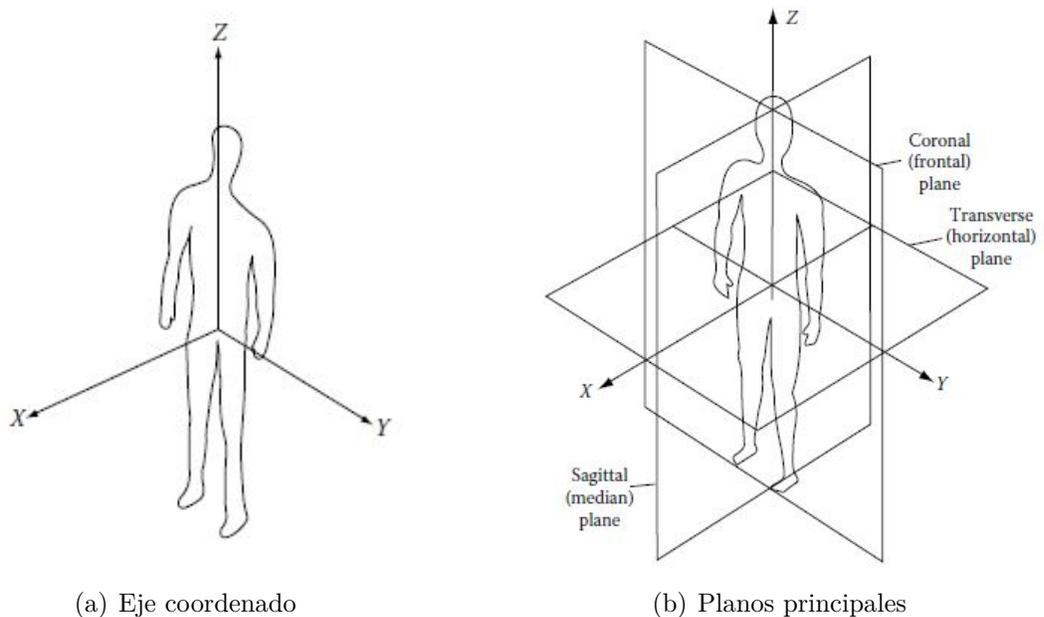


Figura 3.17: Cuerpo humano [71]

Estos ejes definen planos que también son útiles en el análisis biomecánico (Figura 3.17 b)), el plano XY, denominado plano transversal u horizontal, divide el cuerpo en partes superiores e inferiores en el cual se realizan movimientos de rotación, el plano YZ llamado plano coronal o frontal, divide el cuerpo de adelante hacia atrás (anterior a posterior) realiza movimientos de

aducción, abducción y la inclinación lateral y el plano ZX, llamado plano sagital o mediano, divide el cuerpo de izquierda a derecha realizando movimientos de flexión y extensión como en hombro, cadera, cabeza, rodilla, tobillo y pie.

En la figura 3.18 (a) se visualiza una pierna humana representado la posición que llevará sobre la plataforma Stewart, posteriormente se obtuvo el diagrama de cuerpo libre de la misma para obtener las ecuaciones de movimiento. Por otra parte en la figura 3.18 (b) se muestra el diseño de la plataforma Stewart en SolidWorks resaltando las partes principales de la misma.

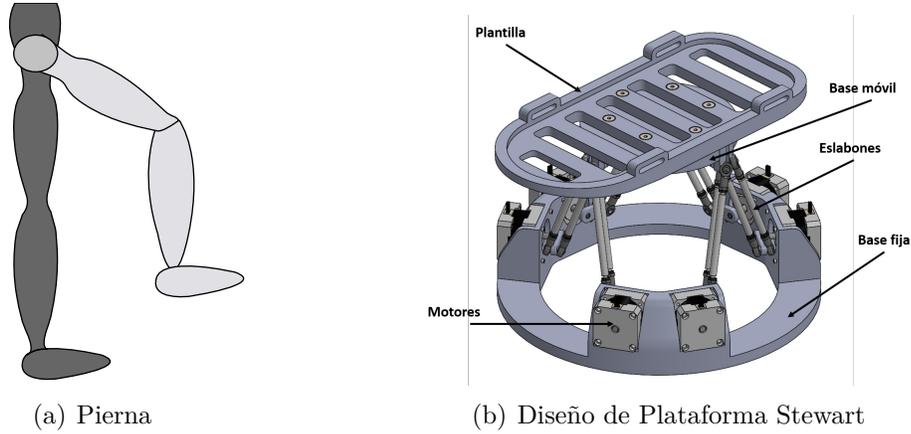


Figura 3.18: Análisis de Pierna.

3.2.1. Modelo Dinámico

En la figura 3.19 se muestra el diagrama de cuerpo libre de la pierna, a partir de este se obtendrán las ecuaciones de movimiento, de igual manera el comportamiento de los tres ángulos de cada articulación denominados q_1 para la cadera, q_2 para la rodilla y q_3 para el tobillo.

Se establecen las coordenadas en x y y de las articulaciones en base a la figura 3.19, así como sus respectivas derivadas las cuales se requieren para la obtención de la velocidad que mas adelante se necesitará en la obtención de energía cinética.

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 \quad (3.113)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 \quad (3.114)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (3.115)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (3.116)$$

$$\dot{x}_3 = l_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.117)$$

$$\dot{y}_3 = l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.118)$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \quad (3.119)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \quad (3.120)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (3.121)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (3.122)$$

$$\dot{x}_3 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.123)$$

$$\dot{y}_3 = l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.124)$$

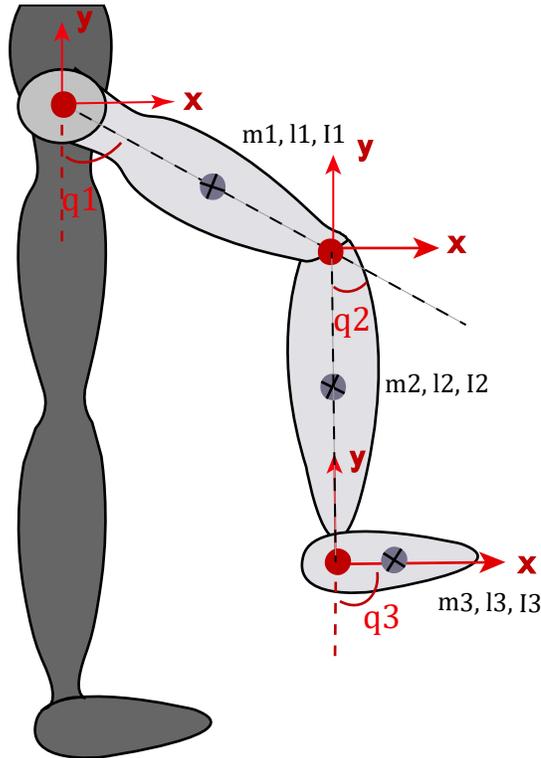


Figura 3.19: Diagrama de cuerpo libre.

Teniendo los valores de cada posición, obtendremos la velocidad de cada articulación $\|v_1\|$, $\|v_2\|$ y $\|v_3\|$ como parte de cinemática diferencial.

$$\|v_1\| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} = (l_1^2 \dot{q}_1^2)^{1/2} \quad (3.125)$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} = (l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2))^{1/2} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \|v_3\| = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2} = & (l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) \\ & + 2[l_3 [l_2 \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)])^{1/2} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Energía Cinética

Se obtiene la energía cinética de cada articulación tomando en cuenta los datos calculados anteriormente como la velocidad en cada eslabón.

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} [m_1l_1^2 + I_1] \dot{q}_1^2 \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2 [l_1^2\dot{q}_1^2 + l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_3 [l_1^2\dot{q}_1^2 + l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1l_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + 2[l_3(l_2 \cos(q_3) \\ &(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 \cos(q_2 + q_3)\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)]] + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} [m_1l_1^2 + I_1] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_1^2\dot{q}_1^2 + l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\ &\frac{1}{2}m_3 [l_1^2\dot{q}_1^2 + l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1l_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + 2[l_3(l_2 \cos(q_3) \\ &(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 \cos(q_2 + q_3)\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)]] + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Energía Potencial

Para la energía potencial la variable h es la coordenada en y de cada articulación.

$$P_1 = m_1gh_1 = -m_1gl_1 \cos(q_1) \quad (3.132)$$

$$P_2 = m_2gh_2 = -m_1gl_1 \cos(q_1) \quad (3.133)$$

$$P_3 = m_3gh_3 = -m_3g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \quad (3.134)$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = -m_1gl_1 \cos(q_1) - m_1gl_1 \cos(q_1) - m_3g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \quad (3.135)$$

Ecuaciones de Lagrange

El lagrangiano consta de la diferencia de las energías cinéticas menos las energías potenciales para ello tomaremos las ecuaciones 3.131 y 3.135 obtenidas anteriormente.

$$\mathcal{L} = K - P$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[m_1 l_1^2 + I_1 \right] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] \frac{1}{2} l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\
& \frac{1}{2} m_3 \left[l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2) + 2 \left[l_3 (l_2 \cos(q_3) \right. \right. \\
& \left. \left. (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_1 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right] \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + m_1 g l_1 \cos(q_1) + \\
& m_1 g l_1 \cos(q_1) + m_3 g \left[l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \right] \quad (3.136)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{L}}{\dot{q}_1} \right) - \frac{\mathcal{L}}{q_1} = \tau_1 \quad (3.137)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{L}}{\dot{q}_2} \right) - \frac{\mathcal{L}}{q_2} = \tau_2 \quad (3.138)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{L}}{\dot{q}_3} \right) - \frac{\mathcal{L}}{q_3} = \tau_3 \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_1 \left[m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2)) + I_2 + m_3 (l_1^2 l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + 2(l_1 l_2 \cos(q_2 + q_3) + l_2 l_3 \cos(q_3))) + I_3 \right] + \\
& \ddot{q}_2 \left[m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + I_2) + m_3 (l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + (l_1 l_2 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3))) + I_3 \right] + \\
& \ddot{q}_3 \left[m_3 (l_3^2 + l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3)) + I_3 \right] + \dot{q}_1^2 \left[(-m_2 l_1 l_2 - m_3 l_1 l_2) \sin(q_2) - m_3 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \right] + \\
& \dot{q}_2^2 \left[-m_3 l_3 l_1 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_3) \right] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left[-2(m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_2) \sin(q_2) + m_3 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \right] + \\
& \dot{q}_1 \dot{q}_3 \left[-2m_3 (l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 l_3 \sin(q_3)) \right] + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \left[-2m_3 (l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 l_3 \sin(q_3)) \right] + \\
& g \left[\sin(q_1) (m_1 l_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) + \sin(q_1 + q_2) (m_2 l_2 + m_3 l_2) + \sin(q_1 + q_2 + q_3) (m_3 l_3) \right] = \tau_1 \quad (3.140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_2 \left[m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + I_2) + m_3 (l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + (l_1 l_2 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3))) + I_3 \right] + \\
& \ddot{q}_3 \left[m_3 (l_3^2 + l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3)) + I_3 \right] + \dot{q}_1^2 \left[(-m_2 l_1 l_2 - m_3 l_1 l_2) \sin(q_2) - m_3 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) \right] + \\
& \dot{q}_2^2 \left[-m_3 l_2 l_3 \sin(q_3) \right] + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \left[-2m_3 l_2 l_3 \sin(q_3) \right] + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \left[-2m_3 l_2 l_3 \sin(q_3) \right] + \\
& m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2) + m_3 g \left[l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \right] = \tau_2 \quad (3.141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_1 \left[m_3 (l_3^2 + l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 l_3 \cos(q_3)) + I_3 \right] + \ddot{q}_2 \left[m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 \cos(q_3)) + I_3 \right] + \ddot{q}_3 \left[m_3 l_3 + I_3 \right] + \\
& \dot{q}_1^2 \left[m_3 (l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 l_3 \sin(q_3)) \right] + \dot{q}_2^2 \left[m_3 l_2 l_3 \sin(q_3) \right] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left[2m_3 l_2 l_3 \sin(q_3) \right] + m_3 g l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) = \tau_3 \quad (3.142)
\end{aligned}$$

Teniendo las ecuaciones finales de torque generado para cada articulación (cadera, rodilla y tobillo), se realizará el análisis de dicho modelo con el de la plataforma, para esto se requiere el mismo sistema de la forma de la ecuación 3.143

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.143)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} A + 2(B + C + D) & E + B + C + 2D & F + C + 2D \\ E + B + C + 2D & E + 2D & F + D \\ F + C + D & F + D & F \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{q}_2[2G + H] + \dot{q}_3[2H + 2I] & \dot{q}_2[G + H] & \dot{q}_3[H + I] + \dot{q}_2[2H + 2I] \\ \dot{q}_1[G + H] + \dot{q}_3[2I] & \dot{q}_3[2I] & \dot{q}_3[I] \\ \dot{q}_1[-(H + I) + \dot{q}_2(-2I)] & \dot{q}_2[-I] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} J + K + L \\ K + L \\ L \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$A = m_1 l_1^2 + I_1 + I_2 + I_3 + m_2(l_1^2 + l_2^2) + m_3(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$$

$$B = (m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_2) \cos(q_2)$$

$$C = m_3 l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

$$D = m_3 l_2 l_3 \cos(q_3)$$

$$E = m_2 l_2^2 + I_2 + I_3 + m_3(l_2^2 + l_3^2)$$

$$F = I_3 + m_3 l_3^2$$

$$G = (-m_2 l_1 l_2 - m_3 l_1 l_2) \sin(q_2)$$

$$H = -m_3 l_1 l_3 \sin(q_2 + q_3)$$

$$I = -m_3 l_2 l_3 \sin(q_3)$$

$$J = (m_1 l_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) \sin(q_1)$$

$$K = (m_2 l_2 + m_3 l_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$L = m_3 l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

Del modelo dinámico de la plataforma Stewart se genera la posición, velocidad y aceleración (\ddot{q}_S , \dot{q}_S y q_S) las cuales serán vinculadas con el modelo de la pierna (3.149) de esta manera obtendremos el torque de cada articulación de la pierna con relación a los parámetros obtenidos de la plataforma Stewart.

$$M(q)\ddot{q}_S + C(q, \dot{q})\dot{q}_S + G(q) = \tau \quad (3.149)$$

Se programan las ecuaciones Dinámicas en Matlab Simulink para la generación de las variables de la pierna $q_{1p}, \dot{q}_{1p}, \ddot{q}_{1p}, q_{2p}, \dot{q}_{2p}, \ddot{q}_{2p}, q_{3p}, \dot{q}_{3p}$ y \ddot{q}_{3p} .

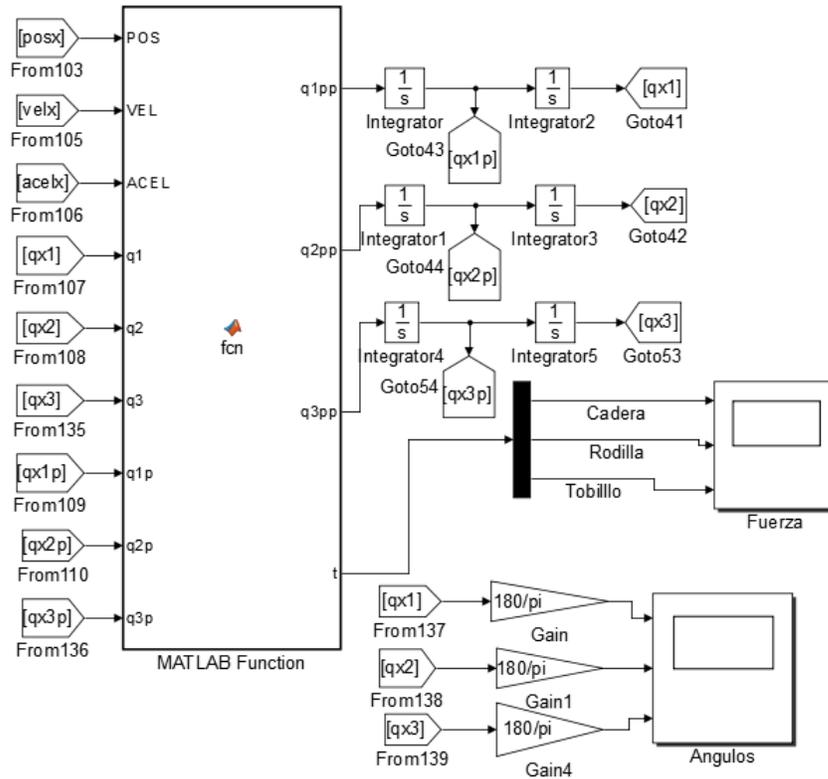


Figura 3.20: Diagrama a bloques en Simulink de la dinámica de la pierna.

Para la programación en diagramas a bloques del modelo de la pierna se tomaron en cuenta los parámetros antropométricos mostrados en el capítulo anterior en las tablas 2.3 y 2.4 de las cuales las variables m_1, l_1 corresponden a la pierna superior en peso y longitud respectivamente, de igual forma para m_2, l_2 son las variables de la pierna inferior y finalmente m_3, l_3 corresponde a la masa y longitud del pie, todas las variables equivalen al 95 % en percentiles masculinos, esto para tomar valores máximos para la simulación. En la figura 3.20 se muestra el esquema en diagramas a bloques de la pierna que se desarrollo en simulink.

Para finalizar la sección del análisis de la extremidad inferior retomamos el estudio de antropometría del capítulo anterior esto para conocer el porcentaje del peso que deberá soportar la plataforma móvil del robot Stewart. De acuerdo a un estimado del peso de los segmentos [72] del cuerpo humano podemos tomar los parámetros de la pierna, tomando en cuenta un 100 % al peso total de una persona. De esta forma tenemos la siguiente tabla.

Segmento	Peso teórico (Porcentaje)
Pierna superior	10.1 %
Pierna inferior	4.4 %
Pie	1.5 %
Pierna completa	16.0 %
Total	32 %

Tabla 3.2: Peso teórico. [72]

De acuerdo a la tabla 3.2 tenemos un total de 16.0 % del peso de una pierna con respecto al peso total del cuerpo humano, si tomamos un 95 % en percentiles masculinos como valor máximo tenemos un total de 15.5 Kg y un 5 % en percentiles femeninos como valor mínimo igual a 9.17 Kg, por lo tanto nuestra plataforma deberá soportar un rango en peso entre 9.17 a 15.5. Esto se propone para que la estructura sea de un material suficientemente capaz de soportar el 32 % del peso de una persona y de igual forma en la instrumentación de la misma se puedan emplear motores adecuados para la aplicación.

4

Estrategias de Control

En el control de movimiento de un manipulador paralelo, se calculan las fuerzas o pares requeridos del actuador para hacer que el movimiento del robot siga una posición deseada y trayectoria de orientación. Considerando la formulación dinámica general de forma cerrada de un robot paralelo representado por la Ecuación 4.1

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \mathcal{F} \quad (4.1)$$

Para esta formulación, $M(q)$ denota la matriz de masas que puede derivarse de la energía cinética del manipulador, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es la matriz centrífuga y Coriolis, $G(q)$ indica el vector de gravedad, \mathcal{F} denota las fuerzas generalizadas aplicadas al centro de masa de la plataforma móvil. Además, tenga en cuenta que si no se aplican fuerzas externas a la plataforma móvil y se considera que el robot tiene un movimiento libre, las fuerzas generalizadas pueden calcularse mediante la proyección de las fuerzas del actuador en la plataforma móvil mediante el mapeo de transposición de la matriz Jacobiana, $\mathcal{F} = J^T \tau$. Sin embargo, si existen fuerzas externas aplicadas a la plataforma móvil, como una perturbación \mathcal{F}_d , las fuerzas generalizadas se calculan a partir de las fuerzas resultantes en el espacio de tareas, $\mathcal{F} = J^T \tau + \mathcal{F}_d$.

La topología de control se refiere a la estructura del sistema de control utilizado para calcular las fuerzas/pares del actuador a partir de las mediciones, y el procesamiento previo y posterior requerido. Para el control de movimiento de un manipulador, el controlador debe calcular el actuador fuerzas/pares necesarios para provocar el movimiento de la plataforma móvil de acuerdo con el trayectoria deseada. En general, el movimiento deseado de la plataforma móvil puede representarse mediante la coordenada generalizada deseada del manipulador, indicada por q_d . Esta variable tiene la misma dimensión y estructura de la variable de movimiento del manipulador q .

En la Figura 4.1 se muestra la topología general de un controlador de movimiento que usa la medición directa de la variable de movimiento q , como retroalimentación en el sistema de circuito cerrado. En dicha estructura, la posición y orientación medidas del manipulador se compara con su valor deseado para generar el vector de error de movimiento e_x . El controlador usa esta información de error para generar comandos adecuados para los actuadores para minimizar el error de seguimiento. Aunque dicha estructura de controlador es muy típica en términos de control de retroalimentación, debe observarse que la medición de retroalimentación es una cantidad de vector de valor, y el controlador tiene una estructura MIMO. Se pueden sugerir otras alternativas para la topología de control de

movimiento basadas en otras técnicas desarrolladas para derivar la posición y orientación de la plataforma móvil. Considere un manipulador paralelo general que consiste en un número de extremidades con un número de articulaciones pasivas y activas. Por lo general, es mucho más fácil medir la variable de articulación activa en dicha estructura, en lugar de medir la posición final y la orientación de la plataforma móvil.

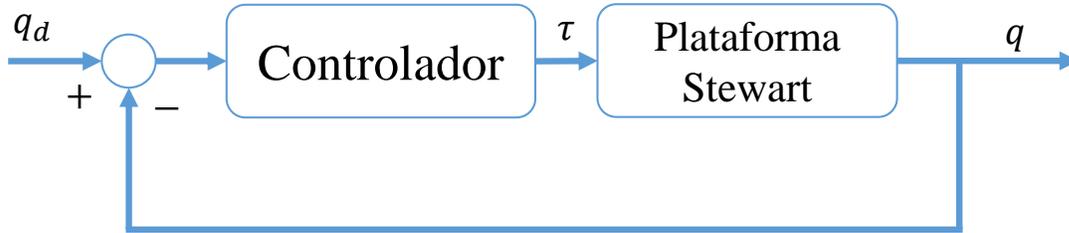


Figura 4.1: Topología del controlador

4.1. Control PD descentralizado

La primera estrategia de control introducida para robots paralelos consiste en la forma más simple de control de retroalimentación en tales manipuladores. En esta estructura de control, se utilizan varios controladores lineales disjuntos (PD) en una estructura de retroalimentación en cada componente de error. Denotemos el vector de error de seguimiento como ejemplo, en un robot general de seis grados de libertad, como la plataforma Stewart, este vector de error consta de seis componentes como $e_x = [e_x \ e_y \ e_z \ e_{\theta_x} \ e_{\theta_y} \ e_{\theta_z}]$. Por lo tanto, el controlador descentralizado consta de seis controladores lineales disjuntos, como el controlador de derivada proporcional (PD), que actúa sobre cada componente de error. El controlador PD se denota mediante la forma $K_d s + K_p$, en el que K_d y K_p son matrices diagonales 6×6 que denotan las derivadas derivadas y proporcionales del controlador, respectivamente. Los elementos diagonales de estas matrices componen las ganancias del controlador disjunto para cada término de error. Además, s denota la variable de Laplace y corresponde a la acción derivada en el dominio del tiempo. [57]

Por lo tanto, mediante esta estructura, cada componente de error de seguimiento se trata por separado a través de un controlador de PD. La salida del controlador se denota mediante F , que se define mediante una llave de escala completa en el espacio de la tarea. Por lo tanto, para el caso general del robot de seis grados de libertad tal como la plataforma Stewart-Gough, esta llave consiste en los siguientes seis componentes $F = [F_x \ F_y \ F_z \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]$.

Tenga en cuenta que dado que la salida del controlador se define en el espacio de tarea,

cada componente de llave manipula directamente el componente de error de seguimiento correspondiente, y por lo tanto, el rendimiento de seguimiento general del manipulador es adecuado si se seleccionan ganancias de controlador alto. Como se ha explicado anteriormente para un manipulador totalmente paralelo sin redundancia en el accionamiento, este mapeo se implementa mediante la inversa de la matriz jacobiana dada por $\tau = J^{-T}F$. Se pueden usar diferentes alternativas de controladores lineales en lugar del controlador PD utilizado en esta estructura; sin embargo, como se ve en las siguientes secciones, el controlador PD es la forma más simple que puede preservar la estabilidad del manipulador, al tiempo que proporciona un rendimiento de seguimiento adecuado, siguiendo la ecuación 4.2 de acuerdo al diagrama de la figura 4.2.

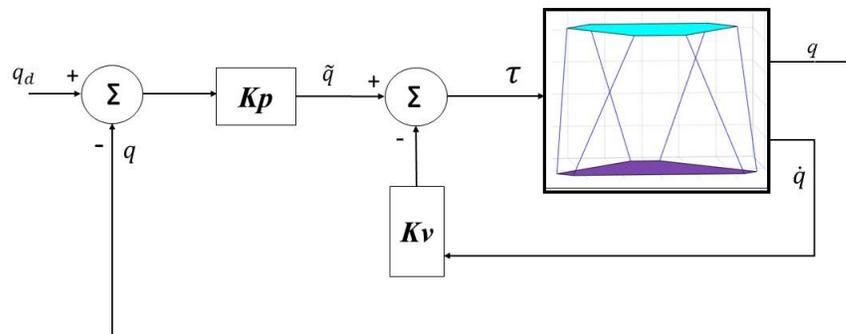


Figura 4.2: Diagrama de control

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} \quad (4.2)$$

El controlador PD descentralizado propuesto es muy simple en estructura y, por lo tanto, es fácilmente implementable. El diseño de dicho controlador no necesita información detallada sobre la formulación dinámica del manipulador, ni parámetros dinámicos (4.2) [73]. La complejidad de cómputo de su implementación también es muy baja, y se limita a realizar cálculos de distribución de fuerza adecuados en la práctica. Sin embargo, el rendimiento de seguimiento de dicho controlador es relativamente pobre, y los errores de seguimiento estáticos pueden ser inevitables. Por otro lado, debido al diseño del controlador de alta ganancia, la energía de actuación requerida es relativamente alta, mientras que el rendimiento del sistema de circuito cerrado depende de la configuración.

Las ganancias del controlador deben ajustarse experimentalmente en base a la realización física del controlador en la práctica por prueba y error. Por lo tanto, las ganancias finales del controlador se obtienen como una compensación entre la respuesta transitoria y los errores de estado estacionario en diferentes configuraciones. Como se vio anteriormente, la formulación dinámica del manipulador paralelo presenta un comportamiento no lineal, que depende de la configuración.

Por lo tanto, encontrar ganancias de controlador adecuadas para dar como resultado el rendimiento requerido en todas las configuraciones es una tarea difícil. Habitualmente, el diseñador elige las ganancias del controlador de manera que el error de seguimiento requerido del manipulador en sus condiciones de trabajo habituales es adecuado. Esto produce un error de rendimiento variable en otras configuraciones en las que no se aplica el proceso de ajuste. El rendimiento del controlador para atenuar el ruido de medición y la llave de perturbación externa aplicada al manipulador pueden ser pobres en la práctica. Para remediar estas deficiencias, se proponen algunas modificaciones para aplicar a esta estructura. Dos mejoras más importantes se dan en las dos secciones siguientes. Sin embargo, tenga en cuenta que el controlador descrito en esta sección puede recomendarse como la primera prueba en experimentos de circuito cerrado. El controlador PD requiere la medición de las posiciones q y las velocidades \dot{q} , así como la especificación de la posición articular deseada q_d , para esto no es necesario especificar la velocidad ni la aceleración deseada [74]. El comportamiento en malla cerrada de un robot de n grados de libertad bajo control PD se obtiene combinando el modelo de la ecuación 4.3.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p - K_v\dot{q} \quad (4.3)$$

De acuerdo a la teoría se procede a programar un controlador tomando como trayectoria la ecuación 4.4 para correr el programa de igual forma se necesitan ganancias para $K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y $K_v \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ cuyos elementos en la diagonal corresponden a las las ecuaciones 4.5 y 4.6 respectivamente. [73]

$$q_d = \begin{bmatrix} 0,1 * \sin(12 * \pi * t) \\ 0,2 * \sin(4 * \pi * t) \\ 0,5 * \sin(8 * \pi * t) \\ 0,4 * \sin(6 * \pi * t) \\ 0,5 * \sin(4 * \pi * t) \\ 0,6 * \sin(2 * \pi * t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

En la figura 4.3 podemos observar la posición, velocidad y aceleración de la plataforma Stewart en base al controlador y la trayectoria ingresada como parámetro inicial, el tiempo de simulación es de 2 segundos en cada una de las gráficas y obtenemos un comportamiento satisfactorio ya que las entradas sinusoidales se comportan de igual forma.

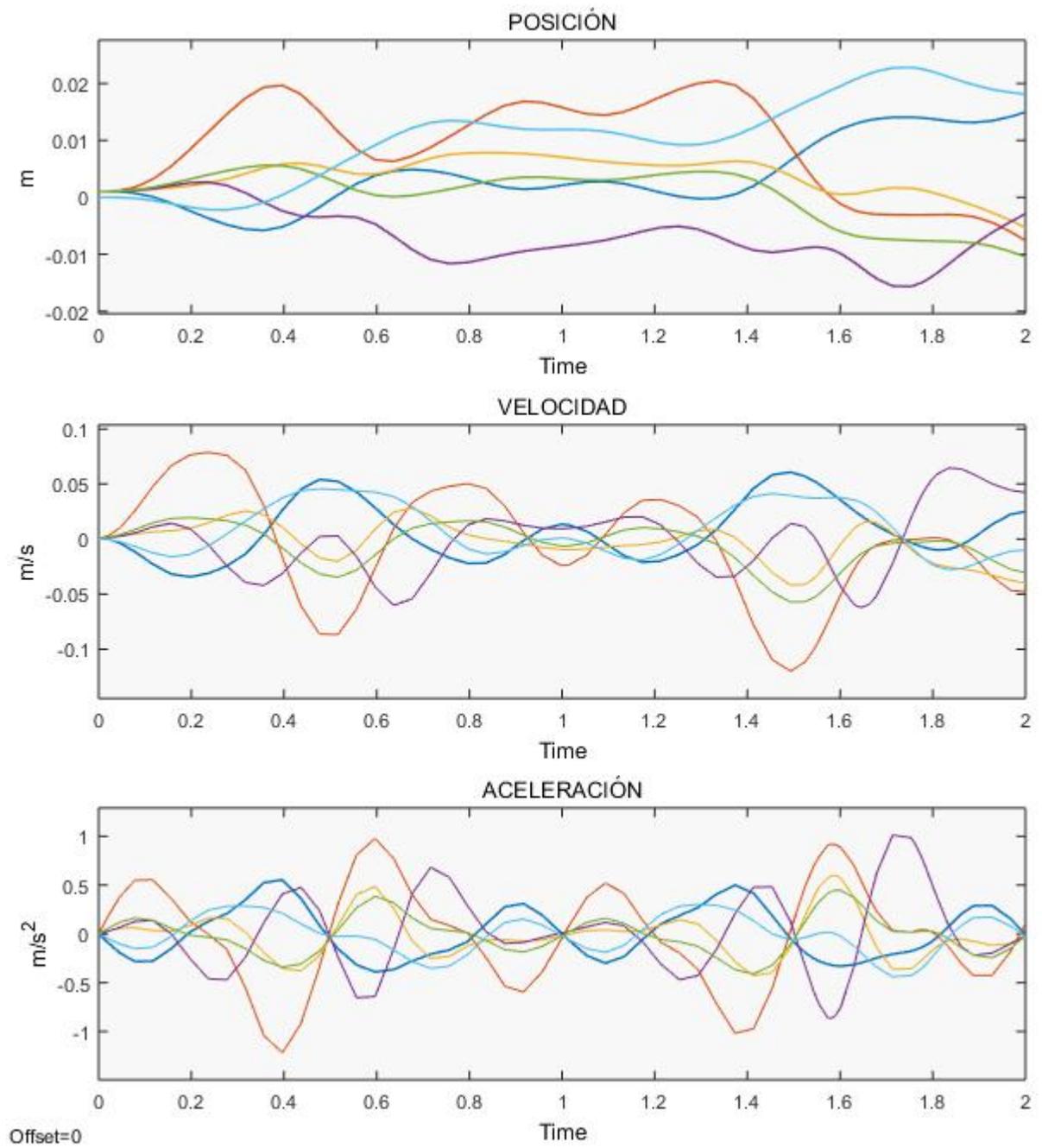


Figura 4.3: Respuesta de la plataforma Stewart

4.2. Control PD con compensación de la gravedad

el controlador PD cuya sencilla ley de control viene dada por la ecuación 4.2, garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición en forma global para robots cuyos modelos dinámicos no poseen el vector de pares gravitacionales $g(q)$. En este caso, la sintonía de este controlador es trivial ya que es suficiente con seleccionar las matrices de diseño K_p y K_v como simétricas y definidas positivas. No obstante, el control PD no garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición pura de manipuladores cuyos modelos dinámicos contienen el término de pares gravitacionales $g(q)$, a menos que la posición deseada q_d sea tal que $g(q_d) = O$. [74]

En la ley de control se requiere el conocimiento previo de una parte del modelo dinámico del robot a ser controlado, puesto que se usa el vector de pares gravitacionales $g(q)$ como en la ecuación 4.7 donde K_p y K_v son matrices simétricas. Este control se diferencia al PD en el termino aditivo de $g(q)$, en no requerir el conocimiento alguno sobre la estructura del modelo del robot, este control hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo del manipulador específicamente de $g(q)$. Es importante observar que para un robot dado el vector de pares gravitacionales puede obtenerse con relativa facilidad, el cual se obtiene de la expresión correspondiente a la energía potencial $U(q)$ que se obtuvo en el capítulo anterior denominado "Modelado y simulación".

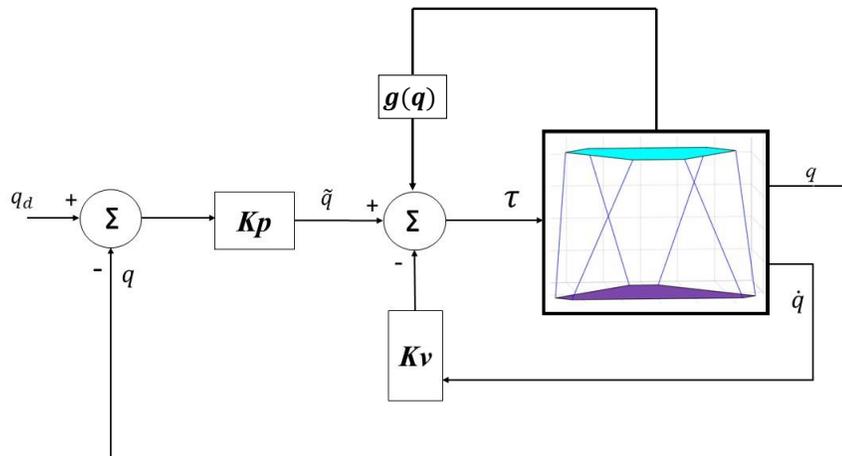


Figura 4.4: Diagrama PD+G

Este control está dado por el diagrama 4.4 el cual requiere información sobre la posición deseada $q_d(t)$ así como la medición de la posición $q(t)$ y la velocidad $\dot{q}(t)$ a cada instante. En la ecuación 4.8 se muestra en modelo dinámico en conjunto al control PD con compensación a la gravedad. [74]

Este modelo se emplea para compensar la gravedad en la estructura al momento de ser encendido, la plataforma se deberá mantener en una posición óptima de acuerdo a lo programado.

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{q} + g(q) \quad (4.7)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} + K_v \dot{q} + g(q) \quad (4.8)$$

Donde las ganancias para $K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y $K_v \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ cuyos elementos en la diagonal corresponden a las ecuaciones 4.10 y 4.11 respectivamente [74]. Las cuales se emplearon en el algoritmo de control presentado en la sección de control PD descentralizado, esto para analizar el comportamiento dentro de los dos tipos de control con las mismas ganancias.

$$q_d = \begin{bmatrix} 0,1 * \sin(12 * \pi * t) \\ 0,2 * \sin(4 * \pi * t) \\ 0,5 * \sin(8 * \pi * t) \\ 0,4 * \sin(6 * \pi * t) \\ 0,5 * \sin(4 * \pi * t) \\ 0,6 * \sin(2 * \pi * t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

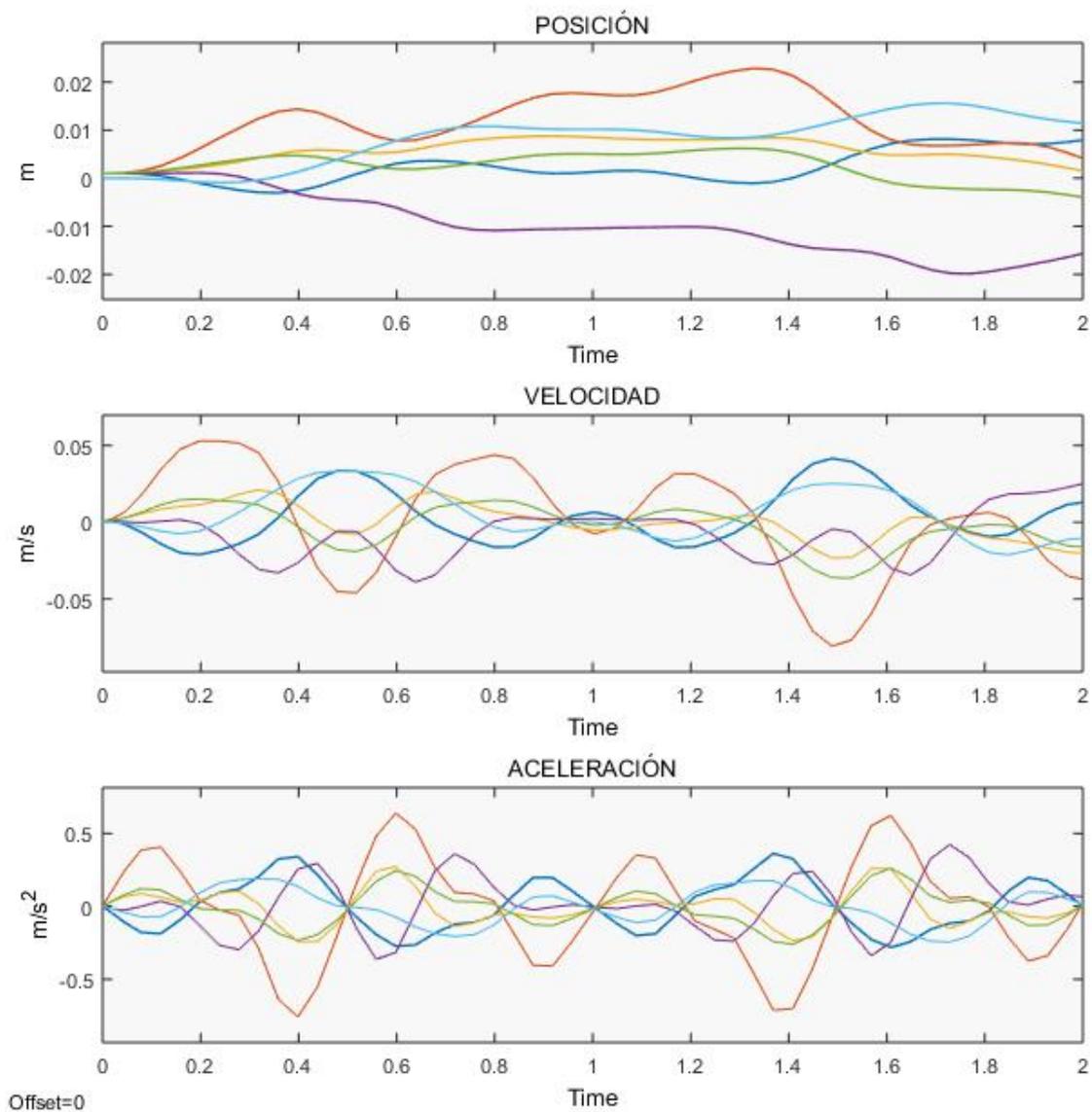


Figura 4.5: Respuesta del sistema PD con compensación a la gravedad

Se emplearon las mismas ganancias para el controlador y la misma trayectoria solo se agrego el par gravitacional que como respuesta nos da menos amplitud a las oscilaciones del sistema en posición, velocidad y aceleración.

4.3. Generación de trayectorias

Para mover el robot a lo largo de una línea recta, se desarrolla un algoritmo de planificación de trayectoria. Por lo tanto, se pueden determinar los tiempos de inicio y finalización del movimiento además de las entradas de posición y orientación deseadas. Además, los motores se sincronizan entre sí durante el movimiento. [75]

Para trayectorias en rehabilitación se debe considerar parámetros de entrada y de salida ya que deben de tener una respuesta en un determinado tiempo, dentro de estas trayectorias se emplean las de tipo sigmoide ya que permiten llevar el movimiento de una posición inicial a uno final en un determinado tiempo, esto satisface la rehabilitación ya que todos los movimientos que se requieren se basan en este principio. El polinomio de Kane [75] nos brinda una respuesta favorable tomando en cuenta parámetros dentro de nuestra simulación.

$$y(t) = y_0 + (y_f - y_0) \frac{t - t_0}{t_f - t_0} - \frac{y_f - y_0}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right) \quad (4.12)$$

Donde $y(t)$ es la función de posición, y_0 es la posición inicial, y_f posición final, t es el tiempo, t_0 tiempo inicial de la simulación, t_f es el tiempo final. En la figura 4.6 se observa el comportamiento en la plataforma Stewart dando un tiempo inicial igual a cero y final igual a 2 segundos de simulación formulando el polinomio en diagrama a bloques en simulink dando valores de 20 centímetros y ángulo de 34, en la cual se observa la salida en metros y radianes respectivamente.

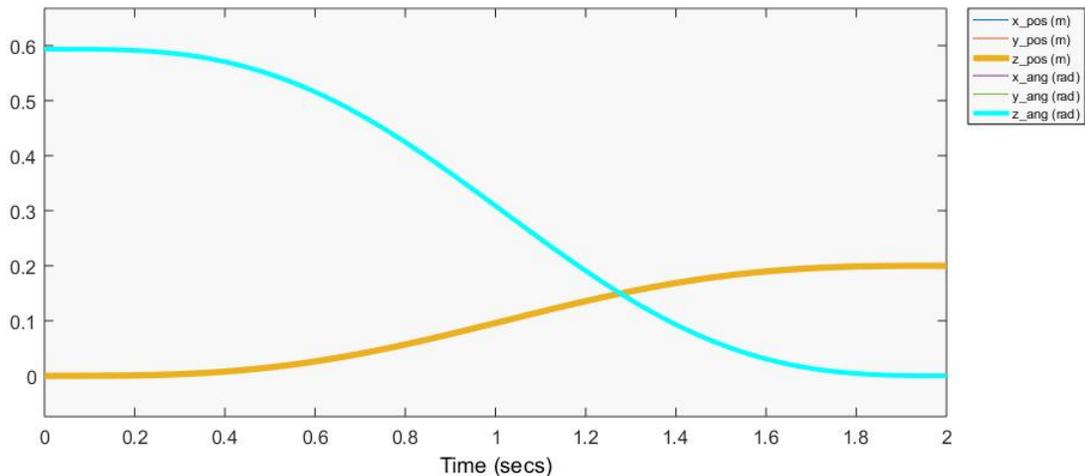


Figura 4.6: Respuesta de polinomio con valores iniciales iguales

Se realizó otra prueba (Figura 4.7) de la ecuación polinomial modificando los datos de entrada con valores de x_{pos} , y_{pos} , z_{pos} , x_{ang} , y_{ang} , y z_{pos} con valores de 10cm, 20cm, 30cm, 20°, 30° y 40° respectivamente.

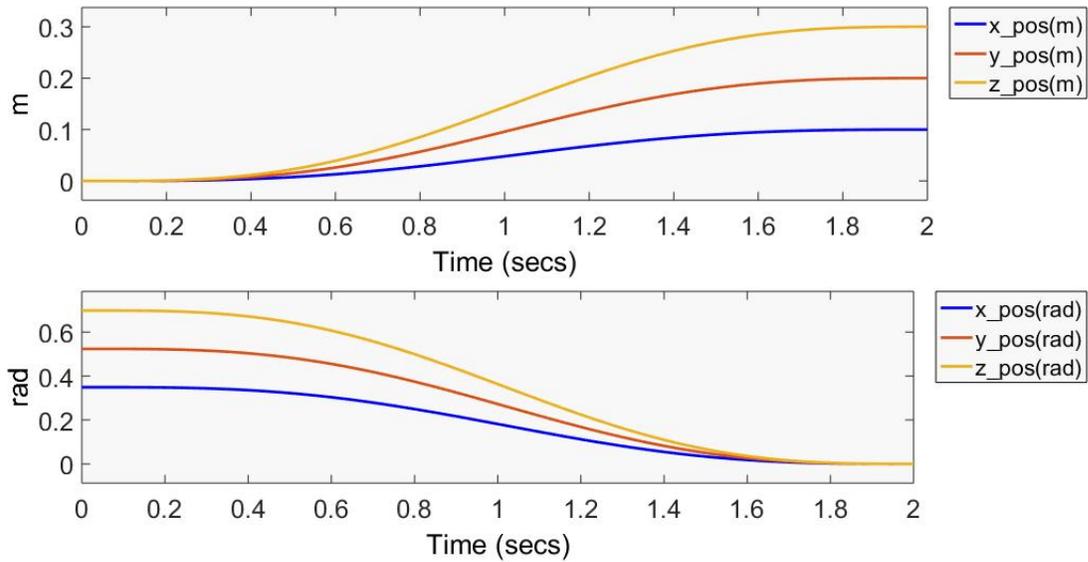


Figura 4.7: Respuesta de polinomio con valores iniciales distintos

En rehabilitación se requieren de trayectorias repetitivas ya que los movimientos del tobillo en todos los casos parten de un punto inicial a un punto final manteniendo unos segundos y regresar al punto inicial principal. El polinomio que se presenta en la ecuación 4.12 nos demuestra tales características que necesitamos para poder brindar una rehabilitación en el tobillo, en las pruebas siguientes se tomará en cuenta dicha trayectoria para ser empleada en las técnicas de control presentadas anteriormente.

5

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados de simulación de la implementación de los controladores propuestos en el capítulo 4, utilizando los modelos dinámicos y cinemáticos obtenidos en el capítulo 3.

5.1. Modelo Dinámico de la plataforma Stewart

El algoritmo programado en Matlab se encuentra en el bloque de la figura 3.16 llamado modelo, en el cual se realiza el cálculo de la matriz jacobiana, el toque para generar la fuerza en los actuadores rotacionales y condiciones iniciales para que el algoritmo dando como resultado gráficas de posición, velocidad y aceleración de la plataforma. A continuación se muestran algunas de las pruebas que se llevaron a cabo para la plataforma dando condiciones iniciales diferentes.

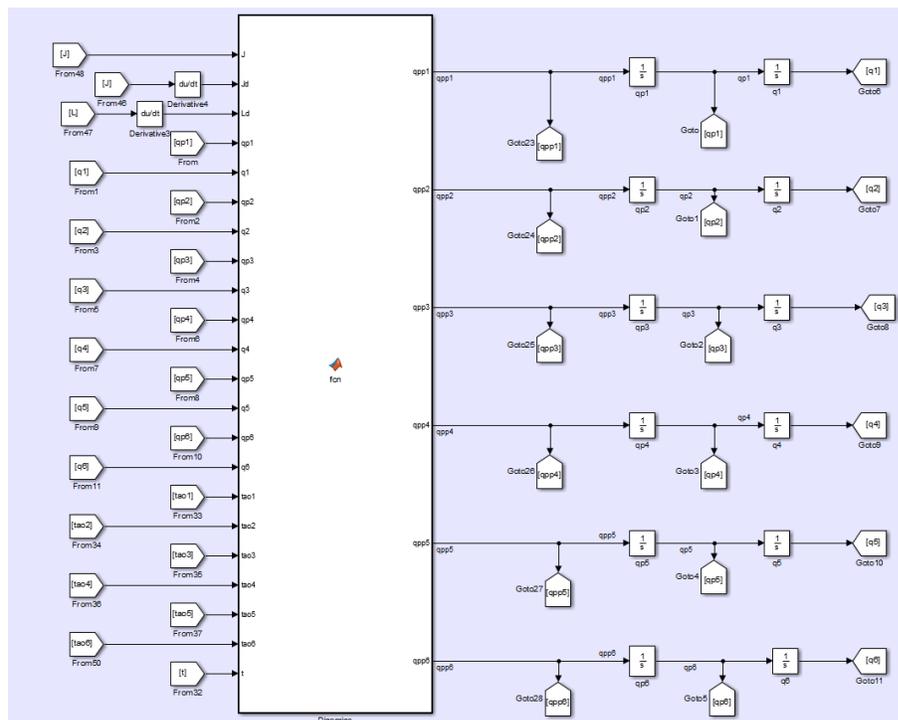


Figura 5.1: Diagrama en Simulink del modelo Dinámico de la plataforma Stewart.

5.1.1. Prueba 1

Se realizó la primera prueba en base al comportamiento del modelo dinámico de la plataforma Stewart así como el comportamiento de la longitud de cada actuador (L_n) obtenida de la matriz jacobiana, posición de cada actuador así como la velocidad y aceleración, con condiciones iniciales $C_i = [2; 2; 2; 2; 2; 2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1]$ en posición y velocidad respectivamente, ya que si son muy grandes dichas condiciones la matriz jacobiana presenta singularidades y no genera el algoritmo. En las figuras 5.2, 5.3 y 5.4 se muestra dicho comportamiento el cual en el eje x se representa el tiempo de trabajo y en el eje y la respuesta del sistema en unidades de medida equivalente a centímetros, por lo tanto la velocidad esta representada en cm/seg y la aceleración en cm/seg^2 .

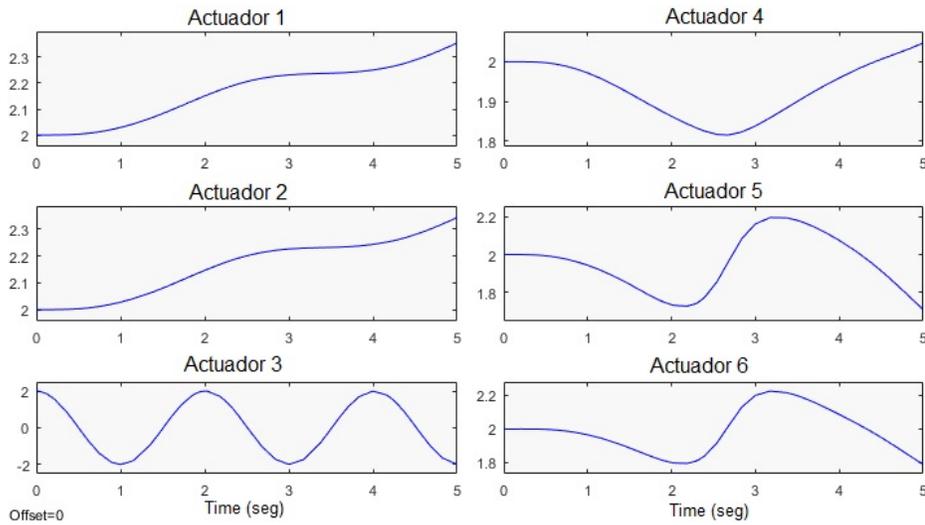


Figura 5.2: Posición relativa de cada actuador. (cm)

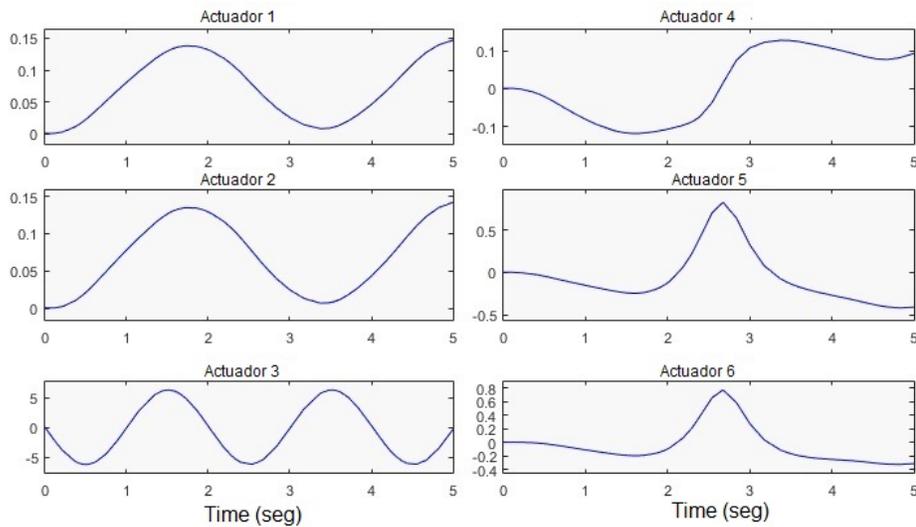


Figura 5.3: Velocidad relativa de cada actuador. (cm/seg)

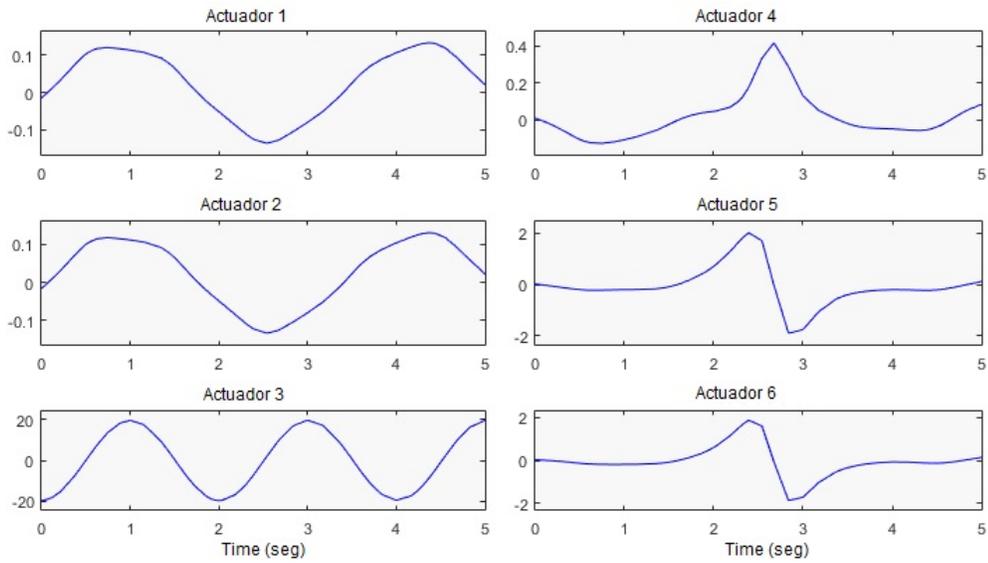
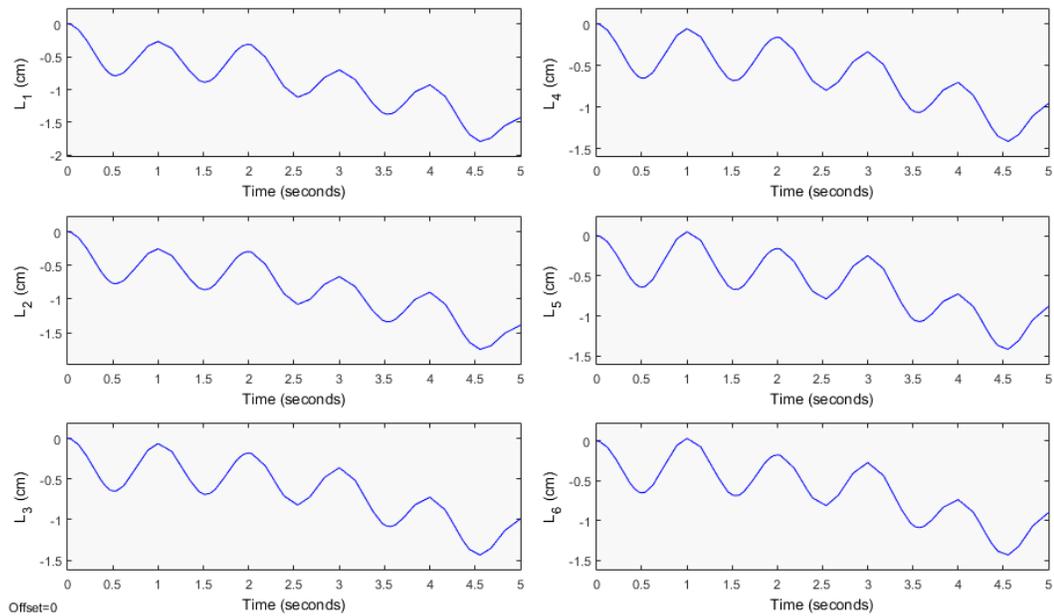
Figura 5.4: Aceleración relativa de cada actuador. (cm/seg^2)

Figura 5.5: Longitud de actuador lineal

A continuación se muestra otra prueba del modelo cambiando las condiciones iniciales en posición y velocidad $C_i = [10; 10; 10; 10; 10; 10; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1]$ respectivamente, tomando en cuenta las singularidades que pueda presentar la plataforma Stewart de acuerdo a lo presentado en capítulos anteriores. En las figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestra dicho comportamiento el cual en el eje x se representa el tiempo de trabajo y en el eje y la respuesta del sistema en unidades de medida equivalente a centímetros, por lo tanto la velocidad esta representada en cm/seg y la aceleración en cm/seg^2 .

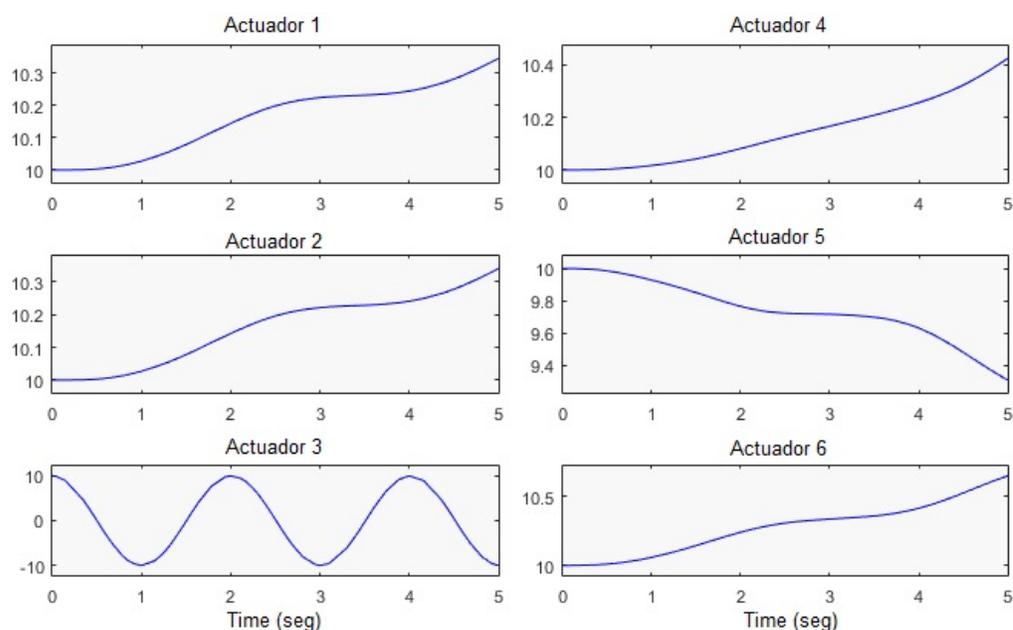


Figura 5.6: Posición de los 6 actuadores. (cm)

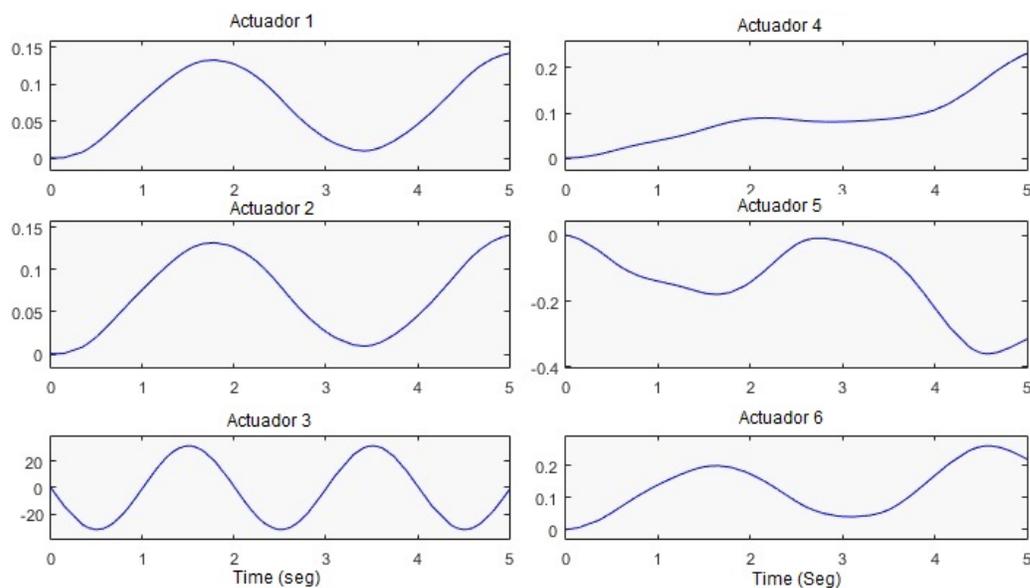


Figura 5.7: Velocidad de los 6 actuadores. (cm/seg)

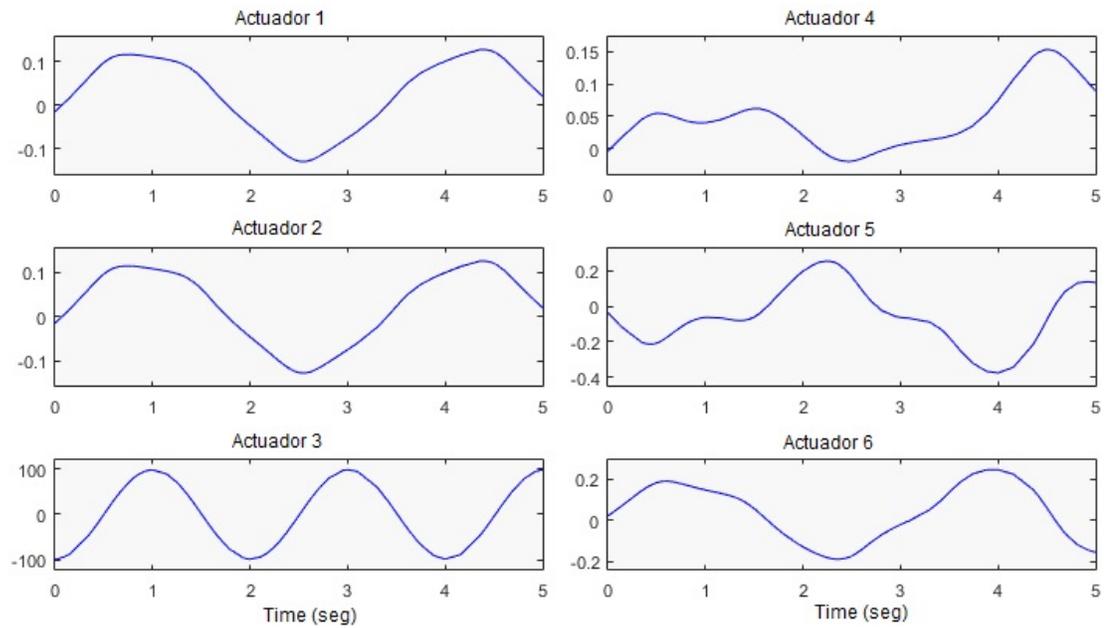


Figura 5.8: Aceleración de los 6 actuadores. (cm/seg^2)

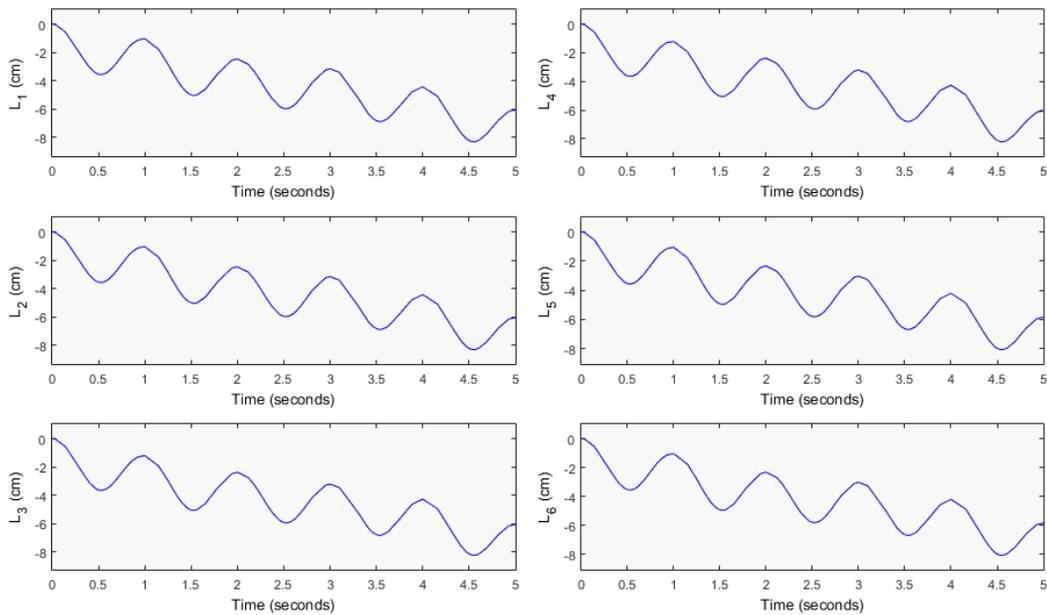


Figura 5.9: Longitud L de los 6 actuadores

Las gráficas anteriores son parte de la simulación del modelo dinámico de la plataforma Stewart, enfocando esto a la aplicación de la rehabilitación de tobillo se debe analizar como afecta la posición generada del modelo dinámico en la pierna.

5.2. Modelo Dinámico de extremidad inferior

Para la simulación se tomaron los parámetros antropométricos del capítulo 2 y de acuerdo a el plano a trabajar en cada articulación de acuerdo a los planos del cuerpo humano, en este caso el pie se analiza en los tres planos ya que este proporciona movilidad en ellos como se presento en el capítulo 2 sin embargo la pierna en general solo realiza movimientos de flexión y extinción de esta forma se obtienen los valores de la tabla 5.1 y los datos de la tabla 5.2 son los parámetros para la simulación del modelo obtenido en el capítulo 4, diferenciando variables máximas como datos masculinos y datos mínimos los femeninos, para la programación en matlab se realizaron algunas pruebas del modelo dándole los parámetros de posición inicial los datos finales de la simulación de la plataforma Stewart.

Articulación	Movimiento	Alcance
Cadera	Extensión/Flexión	-15° a 140°
Rodilla	Extensión/Flexión	0° a 140°
Tobillo	Plantarflexión/Dorsiflexión	-55° a 20°

Tabla 5.1: Parámetros de pierna. [76]

Parámetros	Min	Max	Unidades
	F	M	
m_1	2.24	4.14	Kg
m_2	6.22	10.13	Kg
m_3	0.71	1.23	Kg
l_1	0.461	0.599	m
l_2	0.531	0.660	m
l_3	0.217	0.280	m
I_1	0.25		$Kg * mm^2$
I_2	0.69		$Kg * mm^2$
I_3	0.00235		$Kg * mm^2$

Tabla 5.2: Parámetros de Simulación. [77]

Para realizar esta simulación se toman en cuenta el análisis de la plataforma Stewart y el modelo de la pierna dando una respuesta en conjunto, esto se llevo a cabo dándole un torque inicial a la plataforma Stewart los parámetros empleados son los de la ecuación 5.1 con esto el diagrama a bloques del modelo de la plataforma genera una posición, velocidad y aceleración de la misma, en esta parte se toman los parámetros de la posición final de la plataforma como parámetros iniciales del modelo de la pierna, de esta forma se visualice el comportamiento de acuerdo a las posición de la plataforma, con los modelos en conjunto se puede realizar un análisis del comportamiento de la extremidad inferior en los movimientos de extensión y flexión de dicha articulación, tomando como referencia los

datos de la tabla 5.1 esto para asegurar que los movimientos de la plataforma no excedan los rangos de alcance de la articulación.

En la figura 5.12 se usaron los datos mínimos, de esta manera el algoritmo de matlab genera el toque de cada articulación dando como resultado $Fuerza_1$ que corresponde a la articulación de la cadera, $Fuerza_2$ para la rodilla y $Fuerza_3$ para el tobillo.

$$\tau = \left[0,1\sin(12t\pi) \quad 0,2\sin(4t\pi) \quad 0,5\sin(8t\pi) \quad 0,4\sin(6t\pi) \quad 0,5\sin(4t\pi) \quad 0,6\sin(2t\pi) \right]^T \quad (5.1)$$

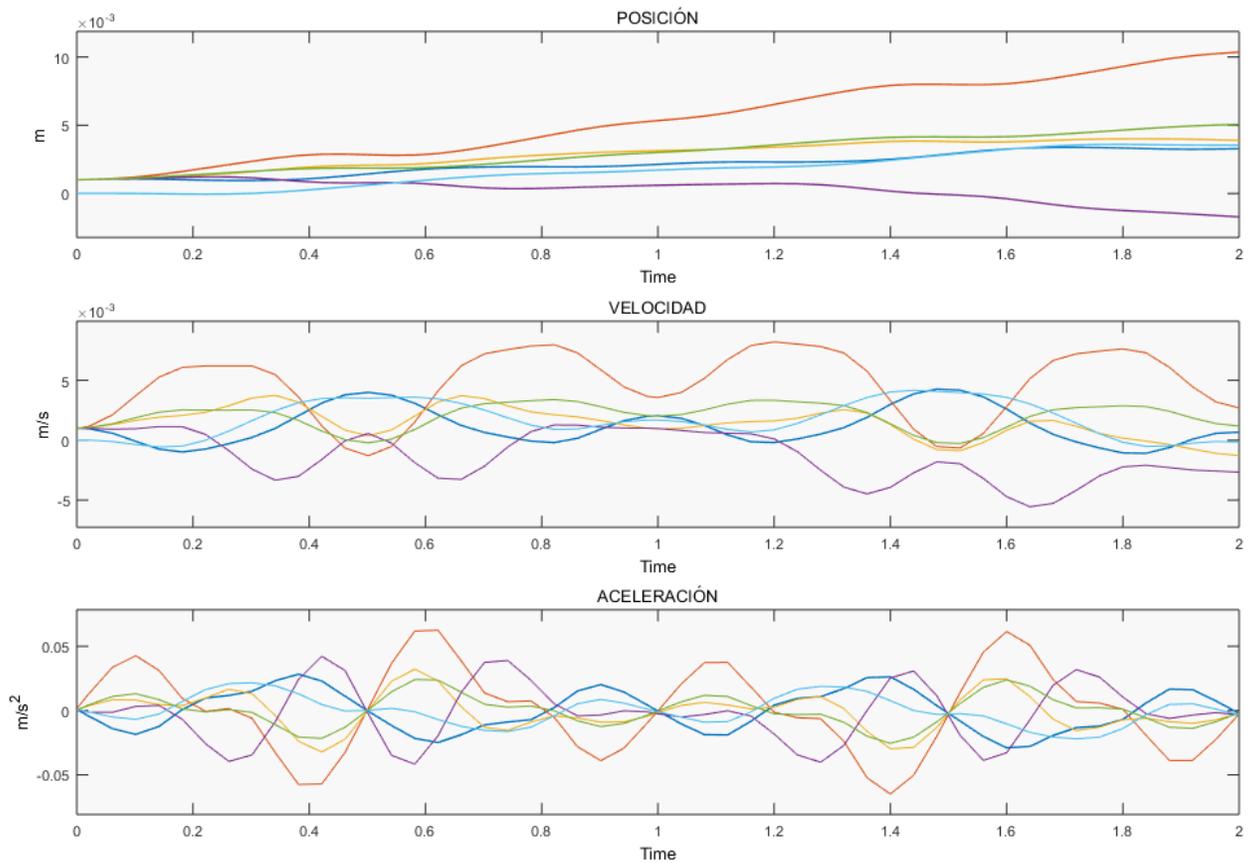


Figura 5.10: Respuesta del modelo dinámico en posición, velocidad y aceleración.

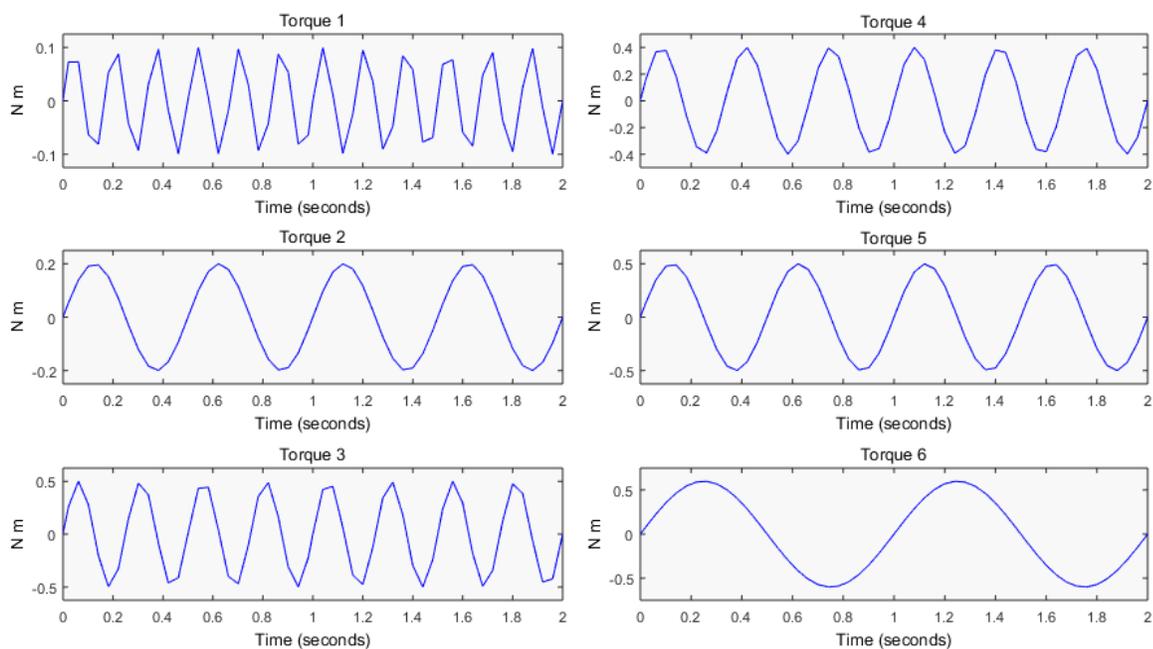


Figura 5.11: Señales de control para cada actuador.

Para el análisis de la extremidad inferior observamos el comportamiento de los ángulos de la cadera, rodilla y tobillo manejamos un alcance para ciertas articulaciones.

En la figura 5.12 se puede visualizar del lado izquierdo los torques generados para la cadera, rodilla y tobillo de igual forma del lado derecho se muestran los ángulos de alcance respectivamente.

De acuerdo a la tabla 5.1 observamos que los datos arrojados de la simulación están dentro de los parámetros de la tabla, por lo tanto concluimos que el modelo empleado es adecuado para una persona sin sobrepasar los alcances de cada articulación.

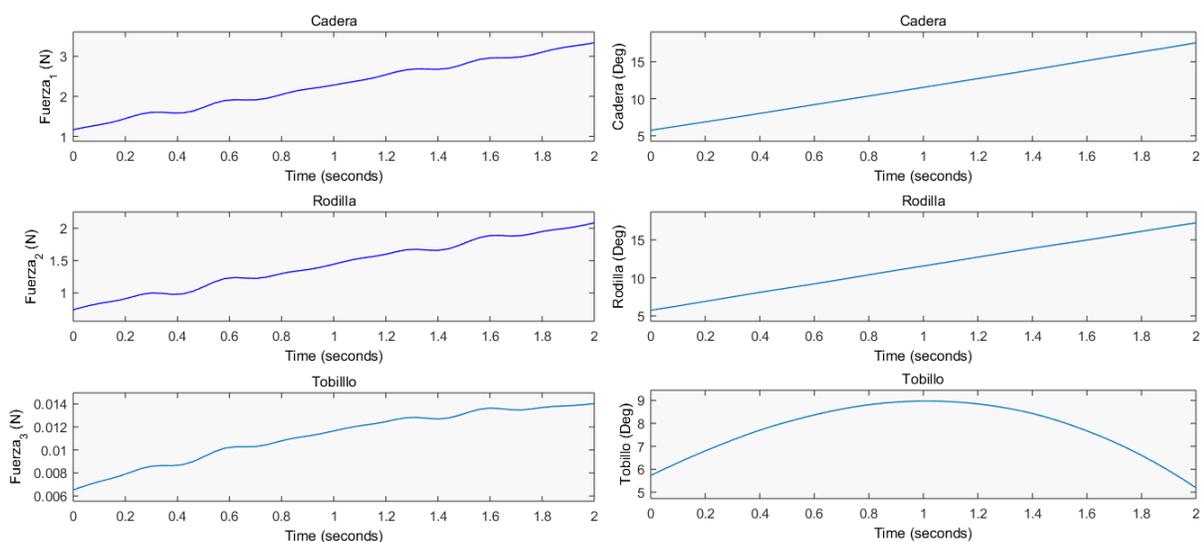


Figura 5.12: Torques y ángulos de cada articulación de la pierna

5.2.1. Prueba 2.

En esta prueba se realiza una simulación de la trayectoria analizada anteriormente con la plataforma Stewart en conjunto al modelo de la pierna y agregando un controlador proporcional-derivativo. En la figura 4.6 se muestra el comportamiento del polinomio a emplear, se optó por este polinomio ya que brinda parámetros que encontramos dentro de la simulación, como lo es un tiempo final e inicial los cuales son los mismo que se emplean en el diagrama a bloques de simulink, se da un tiempo inicial igual a 0 y tiempo final igual a 2, así como las ganancias para en control PD, donde las ganancias para $K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y $K_v \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ cuyos elementos en la diagonal corresponden a $K_p = \begin{bmatrix} 8 & 15 & 15 & 20 & 15 & 15 \end{bmatrix}$ y $K_v = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,0001 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

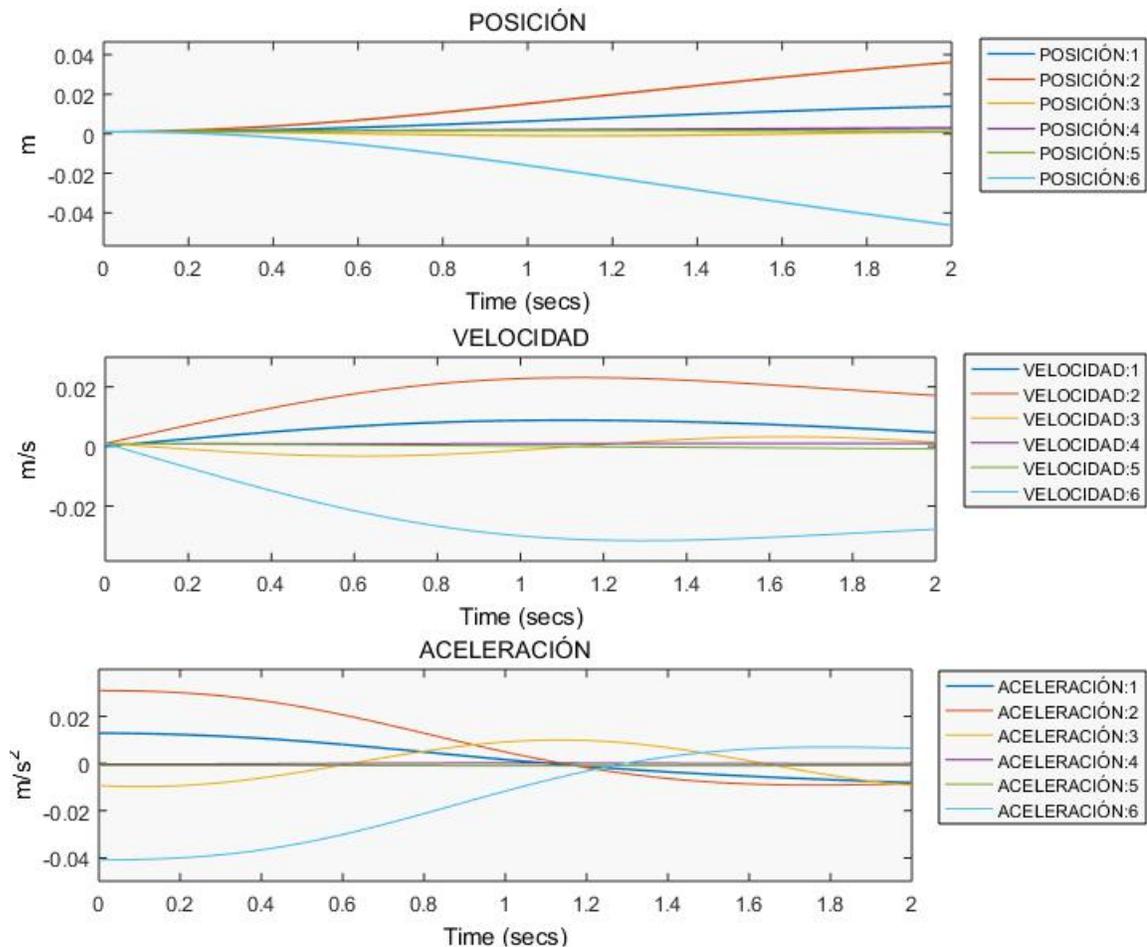


Figura 5.13: Respuesta del polinomio de Kane en el modelo Stewart.

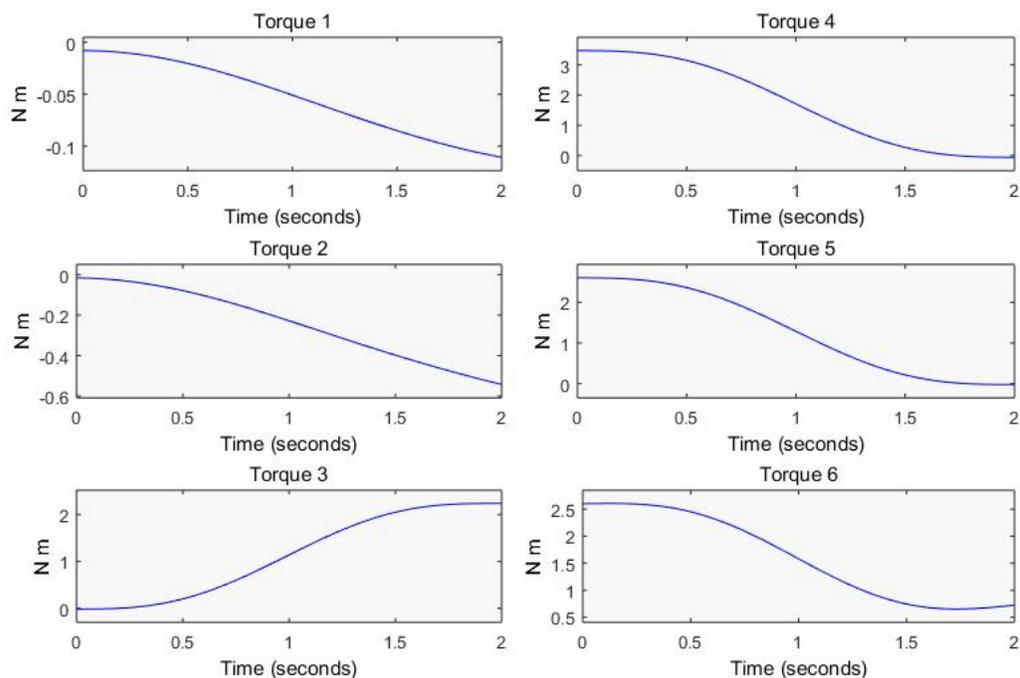


Figura 5.14: Torques en la plataforma Stewart.

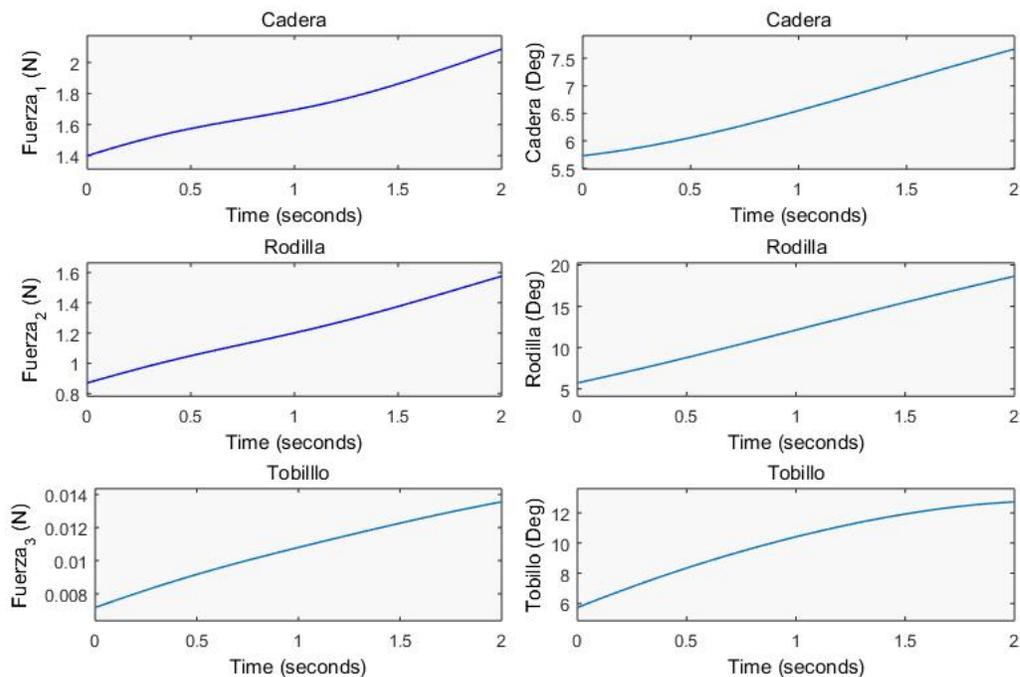


Figura 5.15: Torques y ángulos en articulaciones de la pierna.

De acuerdo al comportamiento de las figuras 5.13 y 5.14 como resultado de la plataforma Stewart, ingresamos al modelo de la pierna para observar el comportamiento de la misma en cada articulación.

En la figura 5.15 podemos ver del lado izquierdo de la gráfica los torques de cadera, rodilla y tobillo son adecuados para el movimiento esperado, así como del lado derecho se muestran los ángulos de igual manera de cada articulación, tomando como guía la tabla 5.1 corroboramos que los ángulos obtenidos están dentro del alcance en cada articulación.

5.2.2. Prueba 3.

Finalmente se realiza un análisis completo de acuerdo a lo presentado al capítulo 4. Para esta prueba se realizó el análisis similar a la prueba 2 presentada anteriormente sin embargo en esta prueba solo se modifica el tipo de control a emplear, un controlador PD con compensación a la gravedad en conjunto al polinomio que se formula en la ecuación de Kane como se muestra en el apartado "Generación de trayectoria" con los mismos parámetros de inicialización de algoritmo para la respuesta en posición, velocidad y aceleración. Figura 5.16.

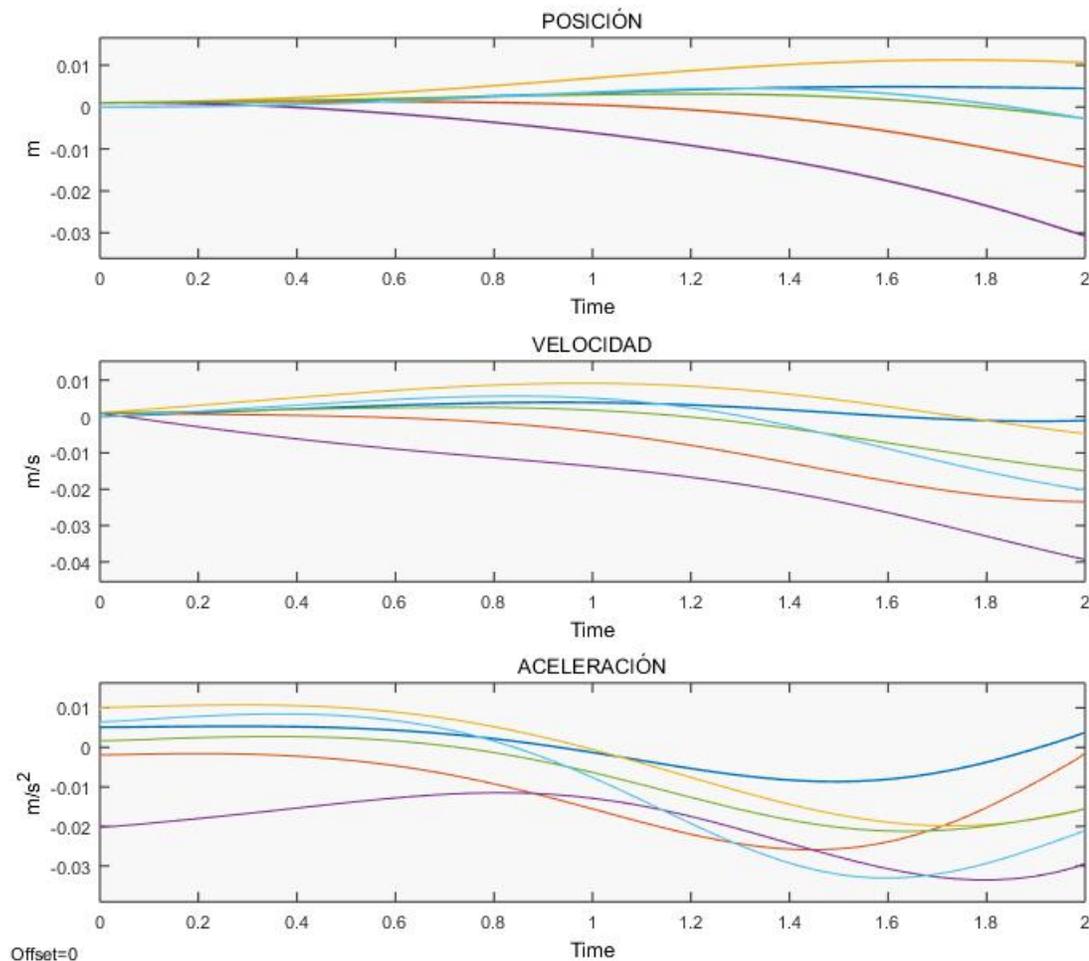


Figura 5.16: Respuesta de la plataforma Stewart

Tomando en cuenta el modelo dinámico de la pierna analizado anteriormente, y los resultados obtenidos de la plataforma Stewart se obtiene la gráfica de la figura 5.17 se

observa un comportamiento adecuado dentro de los parámetros analizados. De igual forma en la gráfica se observan los toques de la pierna así como los grados en cada articulación. Por lo tanto se puede concluir que los resultados numéricos obtenidos dentro del análisis y el modelo de la plataforma así como los de la pierna humana son adecuados para llevar a cabo una trayectoria de rehabilitación.

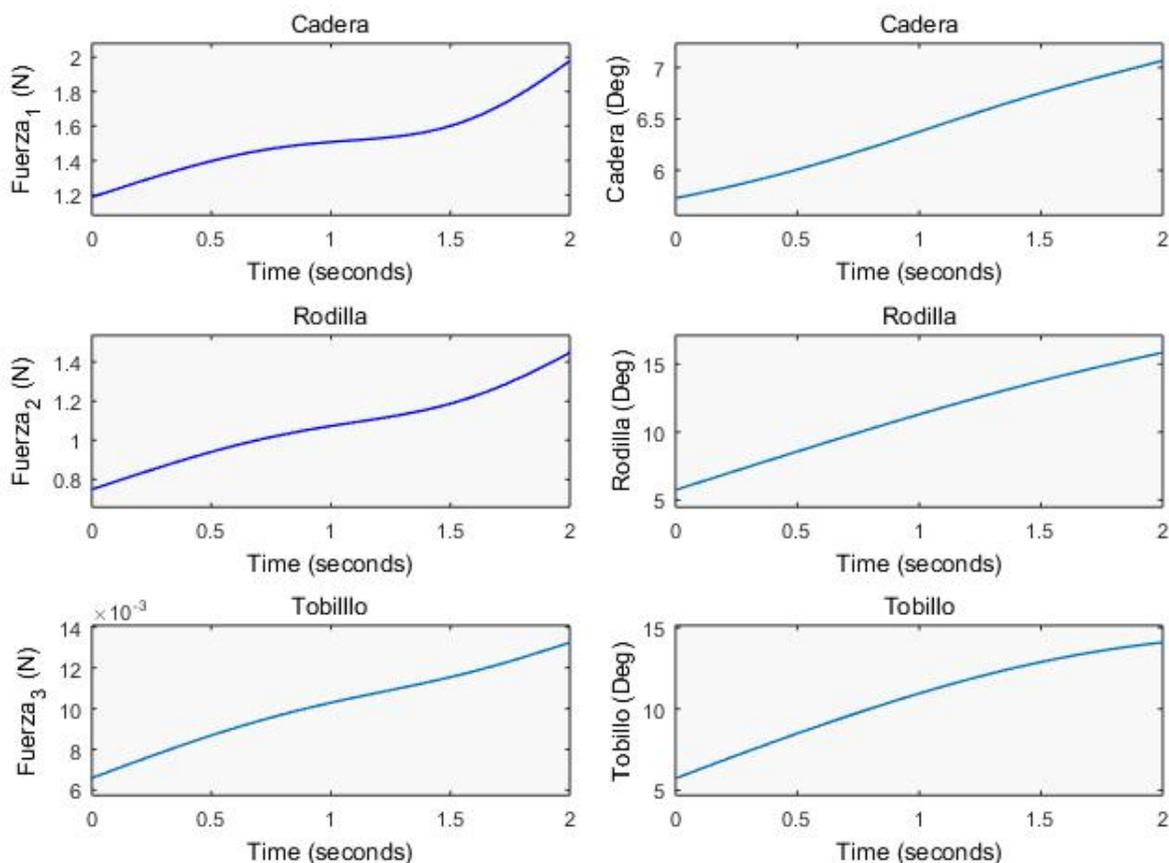


Figura 5.17: Torques generados y posición angular.

De acuerdo a las figuras 5.12 y 5.14 podemos observar que el toque mínimo generado es de 0.1 N/m y un valor máximo de 3.47 N/m, estos valores nos sirven de referencia para proponer un motor que tenga la capacidad suficiente para soportar. Cabe señalar que los motores que buscamos tengan un 70% de su capacidad con este valor aproximado para no sobrecargar los motores o en caso contrario sean excedidos.

Como conclusión de esta prueba presentamos la figura 5.17 la cual representa la fuerza ejercida en cada articulación así como la posición angular de las mismas la cual es obtenida del modelo de la pierna analizada como un brazo de tres grados de libertad tomando como referencia que estará sobre la plataforma de esta forma el movimiento de la plataforma Stewart afectará el comportamiento de la pierna, esto se propuso ya que el modelo completo de la pierna con la plataforma resulta mas complejo y los objetivos no se cumplirían en tiempo y forma.

5.3. Diseño de plataforma

En esta sección se abordan todos los detalles técnicos considerados para el diseño del prototipo de robot paralelo tipo Stewart con actuadores rotacionales. Con respecto a las tablas de valores antropométricos en masa y longitud de cada articulación mostrado en el capítulo 2, podemos obtener las dimensiones adecuadas para el diseño de la plataforma móvil tomando en cuenta el 95 % en percentiles masculinos esto es para tener una capacidad máxima en peso y longitud de cada extremidad, para el análisis se toman en cuenta los datos de pierna superior equivalente a 10.13 kg, pierna inferior a 4.14 kg, pie con valor de 1.23 kg y longitud de igual forma tomamos los datos equivalentes al 95 % en percentiles masculinos los cuales corresponden a la pierna superior a 0.6660 m, pierna inferior a 0.599m, pie a 0.218 m, suponiendo que la persona dentro de este grupo pesa 96.41 kg, en base a los valores del porcentaje de la tabla 3.2 podemos concluir que el peso total que la plataforma deberá soportar como máximo un valor de 30.8512 Kg tomando en cuenta que la persona deberá estar sentada de tal forma que solo el peso de la pierna estará sobre la plataforma móvil, en base a esto cualquier persona con peso y tamaño podrá hacer uso de la plataforma Stewart.

5.3.1. Componentes principales

Como ya se describió en la parte de modelado dinámico y cinemático del robot, este cuenta con dos plataformas; una móvil y una fija, las cuales se pueden apreciar en la figura 5.18 (a) y (b) respectivamente. Ambas piezas fueron diseñadas considerando que serian fabricadas a través de la impresión 3D, con los requisitos que fueran lo suficientemente rígidas para no flexionarse, pero a la vez lo más ligera posibles, sobre todo la plataforma móvil. De acuerdo a lo presentado en la sección de antropometría, los pesos de una persona varían de acuerdo a ciertas características, en este trabajo se toman en cuenta los valores máximos y mínimos que podrá soportar la plataforma móvil así como las dimensiones para que un pie de cualquier sexo pueda ser colocado dentro de la plataforma.

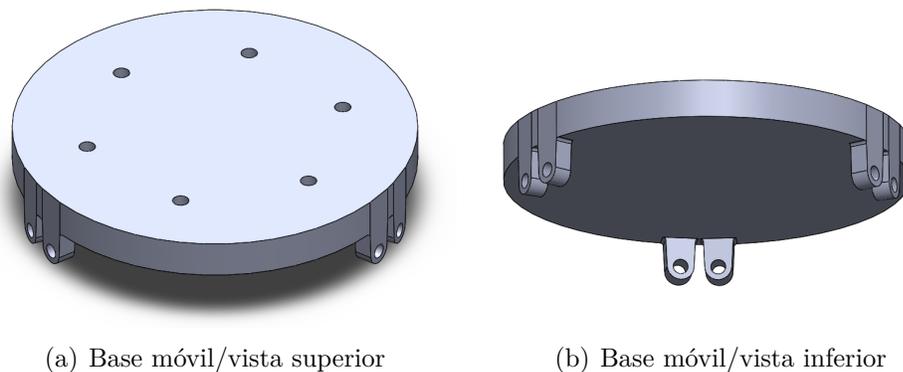


Figura 5.18: Estructura de la plataforma móvil

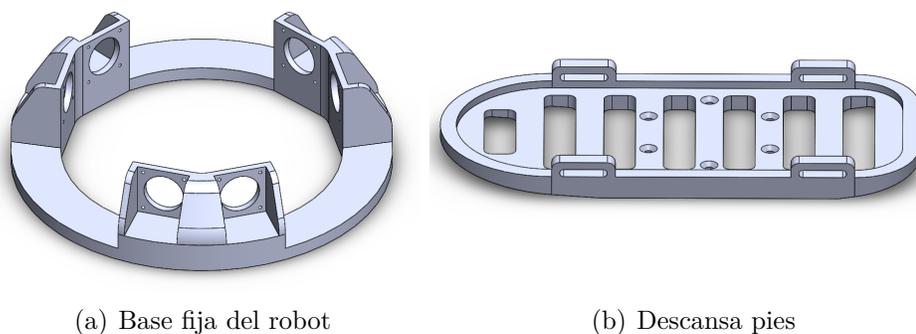


Figura 5.19: Componentes de la plataforma Stewart

Enfocándonos a la aplicación de rehabilitación se diseñó una plantilla (descansa pie) como se muestra en la figura 5.19 (a) la cual tiene como finalidad sujetar el pie a la misma plataforma, cuenta con 4 aberturas para 2 broches para máxima seguridad y mejor respuesta de acuerdo a lo simulado, ya que si el pie no está bien sujeto a la plataforma o se encuentra en una posición inadecuada los resultados serán distintos a lo estudiado.

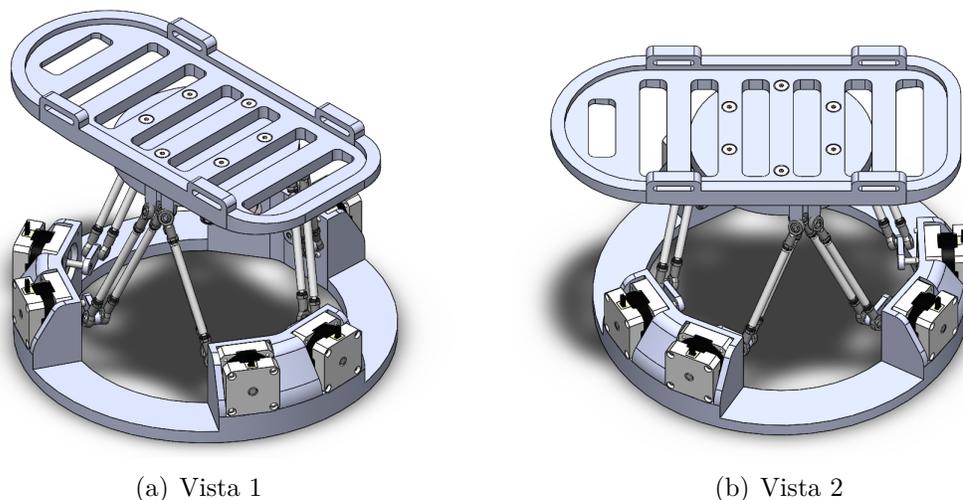


Figura 5.20: Propuesta y diseño 3D de plataforma Stewart

Finalmente se muestra en la figura 5.20 el diseño completo de la plataforma Stewart tomando en cuenta los parámetros antropométricos de 95 % en percentiles masculinos, esto para tener dimensiones adecuadas máximas tanto en el tamaño de la estructura y el tipo de material para soportar el peso de la extremidad inferior humana. Para la rehabilitación de tobillo se pretende que el paciente se encuentre sentado, de esta manera el peso que la plataforma deberá soportar es solo de la extremidad inferior. Este prototipo se presenta como un apoyo para el fisioterapeuta, ya que requiere de la manipulación del mismo, de acuerdo al tipo de lesión que el paciente presente.

6

Conclusiones

Este trabajo de tesis amplia la línea de investigación en robots paralelos basados en la plataforma Stewart destinados a realizar tareas de rehabilitación en extremidades inferiores. Se presentó un estudio de los movimientos de las extremidades inferiores, así como de los factores antropométricos, los huesos y los músculos que intervienen para realizar movimientos y a partir de los cual se obtuvieron los parámetros del ser humano promedio, para realizar simulaciones numéricas de su comportamiento dinámico durante la tarea de rehabilitación. Se presentó un polinomio que se empleo como trayectoria para el trabajo, fue propuesta por sus características que nos brinda en la simulación, ya que para una rehabilitación se requiere respuestas persistentes y en este caso el polinomio se enfoca en brindar una respuesta tipo sigmoide alcanzando los parámetros de inicio como lo son 6 variables de posición deseada (centímetros y grados), tiempos de simulación (inicial y final).

Por otra parte, en la aplicación de las técnicas de control se optó por emplear el tipo PD descentralizado y PD más compensación de la gravedad, ya que estos se basan en el modelo dinámico y no se requiere algún parámetro de la planta, finalmente permitieron dar un primer paso en el proceso de validación y verificación en la cual concluimos que la plataforma del tipo Stewart es más apta para las tareas de rehabilitación donde no es necesario alcanzar altas velocidades, como su contra parte los robots tipo Delta, ya que aquí es más importante seguir la trayectoria aunque sea a velocidades relativamente muy bajas.

Se llevo a cabo un diseño en SolidWorks tomando en cuenta los parámetros antropométricos analizados en un 95 % percentil como valor máximo tanto en peso de extremidades como el longitudes respectivamente, para que el tamaño de la plataforma sea el adecuado en la rehabilitación para hombres y mujeres.

Publicaciones

Aureles-Cabrera, A. I., Aguilar-Sierra, H. (2018, October). Diseño y Modelado de un Robot Paralelo Tipo Stewart para Diagnostico y Rehabilitación de Tobillo. In Memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica (Vol. 5, No. 1, pp. 386-389).

Trabajos futuros

Como continuación de este trabajo de tesis se proponen algunos temas que durante el desarrollo de esta tesis han surgido y por cuestiones ajenas a la tesis no se han completado las cuales se esperan atacar en un futuro, los temas están directamente relacionadas con el trabajo de tesis presentado. A continuación se mencionan algunas de las actividades a realizar a futuro:

- Construcción del prototipo presentado en la sección de diseño de plataforma, el cual se desarrollo en base a las características de la aplicación. Para esto se requiere de material para la contracción así como la adecuada instrumentación de la misma plataforma.
- Implementar las líneas de control presentadas en el análisis de la plataforma Stewart y corroborar los resultados obtenidos.
- Implementar otros controladores mas robustos para llevar a cabo la tarea de rehabilitación con mas precisión ya que el trabajar en áreas biomédicas lo requiere.

Referencias

- [1] Félix Vélez, Epílogo Reflexiones y Recomendaciones del Secretario General de Población. «ENCUESTA NACIONAL DE LA DINÁMICA DEMOGRÁFICA 2014». En: ().
- [2] James E Gwinnett. *Amusement device*. US Patent 1,789,680. 1931.
- [3] WLG Pollard. «Spray painting machine: USA». En: *US2213108* (1940).
- [4] Isidro Zabalza y Javier Ros. «Aplicaciones actuales de los robots paralelos». En: *8th Latin American Congress of Mechanical Engineering. Cusco, Perú*. Vol. 3. 9. 2007.
- [5] VE Gough y SG Whitehall. «Universal tyre test machine». En: *Proc. FISITA 9th Int. Technical Congress*. 1962, págs. 117-137.
- [6] Doug Stewart. «A platform with six degrees of freedom». En: *Proceedings of the institution of mechanical engineers* 180.1 (1965), págs. 371-386.
- [7] KL Cappel. *Motion simulator*. US Patent RE27,051. 1971.
- [8] Lung-Wen Tsai. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- [9] Juan Antonio Bridones León. «Diseño, análisis y construcción de un robot paralelo traslacional». Tesis doct. Instituto Politécnico Nacional, 2009.
- [10] Anchante Guimaraes y Cromwell Steven. «Modelación y simulación dinámica del mecanismo paralelo tipo plataforma de Stewart-Gough usado en un simulador de marcha». En: (2014).
- [11] Jean-Pierre Merlet. *Parallel robots*. Vol. 128. Springer Science & Business Media, 2006.
- [12] Magazine online inc. *THE NATIONAL ADVANCED DRIVING SIMULATOR (NADS)*. [Web; accedido el 06-04-2018]. 2012. URL: [URL{http://www.tlc-mag.com/archive/pre_2013_site/NADS_NHTSA_shell_july12.html}](http://www.tlc-mag.com/archive/pre_2013_site/NADS_NHTSA_shell_july12.html).
- [13] Dong-Soo Kwon y col. «KAIST interactive bicycle simulator». En: *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*. Vol. 3. IEEE. 2001, págs. 2313-2318.
- [14] Miguel Diaz Rodriguez. *Aplicación de los robot paralelos*. 2018.
- [15] JONATAN MARTÍN ESCORCIA HERNÁNDEZ. «ANÁLISIS, DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y CONTROL DE UN ROBOT PARALELO TIPO DELTA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD». Tesis doct. Universidad Politécnica de Tulancingo, 2016.

-
- [16] Iñaki Díaz, Jorge Juan Gil y Emilio Sánchez. «Lower-limb robotic rehabilitation: literature review and challenges». En: *Journal of Robotics* 2011 (2011).
- [17] Pengju Sui y col. «Analysis and synthesis of ankle motion and rehabilitation robots». En: *Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2009 IEEE International Conference on*. IEEE. 2009, págs. 2533-2538.
- [18] Gery Colombo y col. «Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis». En: *Journal of rehabilitation research and development* 37.6 (2000), págs. 693-700.
- [19] Susanna Freivogel y col. «Gait training with the newly developed ‘LokoHelp’-system is feasible for non-ambulatory patients after stroke, spinal cord and brain injury. A feasibility study». En: *Brain Injury* 22.7-8 (2008), págs. 625-632.
- [20] D Reinkensmeyer, JH Wynne y SJ Harkema. «A robotic tool for studying locomotor adaptation and rehabilitation». En: *Engineering in Medicine and Biology, 2002. 24th Annual Conference and the Annual Fall Meeting of the Biomedical Engineering Society EMBS/BMES Conference, 2002. Proceedings of the Second Joint*. Vol. 3. IEEE. 2002, págs. 2353-2354.
- [21] David J Reinkensmeyer y col. «Tools for understanding and optimizing robotic gait training.» En: (2014).
- [22] Jan F Veneman y col. «Design and evaluation of the LOPES exoskeleton robot for interactive gait rehabilitation». En: *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering* 15.3 (2007), págs. 379-386.
- [23] Dragoljub Surdilovic y Rolf Bernhardt. «STRING-MAN: a new wire robot for gait rehabilitation». En: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 2. IEEE. 2004, págs. 2031-2036.
- [24] C Schmitt y P Métrailler. «The Motion Maker™: a rehabilitation system combining an orthosis with closed-loop electrical muscle stimulation». En: *8th Vienna international workshop on functional electrical stimulation*. LSRO2-CONF-2006-011. 2004, págs. 117-120.
- [25] Mohamed Bouri, Berangère Le Gall y Reymond Clavel. «A new concept of parallel robot for rehabilitation and fitness: The Lambda.» En: *ROBIO*. 2009, págs. 2503-2508.
- [26] Taisuke Sakaki. «TEM: therapeutic exercise machine for recovering walking functions of stroke patients». En: *Industrial Robot: An International Journal* 26.6 (1999), págs. 446-450.
- [27] Erhan Akdoğan y Mehmet Arif Adli. «The design and control of a therapeutic exercise robot for lower limb rehabilitation: Physiotherabot». En: *Mechatronics* 21.3 (2011), págs. 509-522.
- [28] Yves Stauffer y col. «The WalkTrainer—a new generation of walking reeducation device combining orthoses and muscle stimulation». En: *IEEE Transactions on neural systems and rehabilitation engineering* 17.1 (2009), págs. 38-45.
- [29] Andrzej Michnik y col. «Control system of the lower limb rehabilitation robot». En: *Information Technologies in Biomedicine*. Springer, 2012, págs. 478-488.
-

- [30] CH Guzmán Valdivia y col. «Análisis cinemático de un robot terapéutico para la rehabilitación de miembros inferiores». En: *Revista de la Ingeniería Industrial* 7.1 (2013), págs. 21-30.
- [31] Weiqun Wang y col. «A novel leg orthosis for lower limb rehabilitation robots of the sitting/lying type». En: *Mechanism and Machine Theory* 74 (2014), págs. 337-353.
- [32] R López-Gutiérrez y col. «Adaptive Control in Passive rehabilitation routines using ELLTIO». En: *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica* 38.2 (2017).
- [33] Antonio Viladot Pericé. *Quince lecciones sobre patología del pie*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [34] Elsa Viridiana Sánchez Hernández y col. «Functional biomechanics of the foot and ankle: understanding athlete injuries». En: *Ortho-tips* 12.1 (2016), págs. 6-11.
- [35] A Viladot. «Anatomía funcional y biomecánica del tobillo y el pie». En: *Revista Española de Reumatología* 30.9 (2003), págs. 469-477.
- [36] A Blanco Ortega y col. «Robot paralelo para rehabilitación asistida de tobillo». En: *X Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico (CIIN-DET'13)*. 2013.
- [37] Oscar Gonzalez. *Luxaciones y esguinces, tipo @ONLINE*. 2013. URL: <https://es.slideshare.net/ojgonzalez04/luxaciones-y-esguinces-17289685>.
- [38] Diego Fernando Rincón Cardozo, Natalia Sauza Rodriguez, Paula Andrea Rincón Cardozo y col. «Abordaje del esguince de tobillo para el médico general». En: *Revista Salud UIS* 47.1 (2015).
- [39] Sociedad europea de medicina de Rehabilitación. «Libro blanco de medicina fisia y rehabilitación en Europa». En: ().
- [40] Yves Xhardez. *Vademécum de kinesioterapia y de reeducación funcional*. 2000.
- [41] Arturo Enrique Gil García y col. «Rehabilitador para tobillo por movimiento pasivo (automatizado)». Tesis doct.
- [42] RIMEC SRL. *fisiotek*. 2013. URL: <http://fisiotek3000.blogspot.com/2013/10/fisiotek-3000-series-new-models-for.html>.
- [43] Carl G Mattacola y Maureen K Dwyer. «Rehabilitation of the ankle after acute sprain or chronic instability». En: *Journal of athletic training* 37.4 (2002), pág. 413.
- [44] Company Optiflex. *OptiFlex*. 2018. URL: http://www.ormed.djoglobal.eu/en_US/ArtromotK3.html.
- [45] Jake A. Hickory. *OptiFlex*. 2010. URL: <http://optiflex3kneecpm.blogspot.com/2010/06/optiflex-3-knee-cpm-components.html>.
- [46] M Girone, G Burdea y Mourad Bouzit. «The Rutgers ankle orthopedic rehabilitation interface». En: *Proceedings of the ASME Haptics Symposium*. Vol. 67. DSC. 1999, págs. 305-312.
- [47] S Méndez-Elizondo, MO Mendoza-Gutiérrez e I Bonilla-Gutiérrez. «Desarrollo de un Sistema Robótico para Rehabilitación de Lesiones de Tobillo». En: *Memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica*. Vol. 4. 1. 2017, págs. 385-388.
-

-
- [48] Rosalío Ávila Chaurand, Lilia R Prado León y Elvia L González Muñoz. *Dimensiones antropométricas de población latinoamericana*. Universidad de Guadalajara, CUAAD, 2007.
- [49] Varios Autores. *Percentiles, tipo @ONLINE*. 2013. URL: <https://curiosoando.com/que-son-los-percentiles>.
- [50] Youlian Hong y Roger Bartlett. *Routledge handbook of biomechanics and human movement science*. Routledge, 2008.
- [51] Ronald L Huston. *Fundamentals of Biomechanics*. CRC Press, 2013.
- [52] Vetter F.J. *Human Anthropometric Data. BME 207 Introduction to Biometrics, Notes from lecture and supplemental materials. University of Rhode Island*. 2015. URL: <http://www.ele.uri.edu/faculty/vetter/BME207/anthropometric-data.pdf>.
- [53] Serdar Kucuk. *Serial and parallel robot manipulators*. InTech, 2012.
- [54] Asiely Scarlet Boche Lucio. «Cinemática Diferencial de un Robot Paralelo con una Cadena Virtual». Tesis doct. Universidad Nacional autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2017.
- [55] Hamidreza Hajimirzaalian, Hasan Moosavi y Mehdi Massah. «Dynamics analysis and simulation of parallel robot Stewart platform». En: *Computer and Automation Engineering (ICCAE), 2010 The 2nd International Conference on*. Vol. 5. IEEE. 2010, págs. 472-477.
- [56] Kai Liu y col. «The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator». En: *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 8.3 (1993), págs. 287-308.
- [57] Hamid D Taghirad. *Parallel robots: mechanics and control*. CRC press, 2013, págs. 17, 232-245.
- [58] Bhaskar Dasgupta y TS Mruthyunjaya. «Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton–Euler approach». En: *Mechanism and machine theory* 33.7 (1998), págs. 993-1012.
- [59] Wisama Khalil. «Unified Dynamic Modeling of Robots Using Newton-Euler Techniques». En: () .
- [60] K Harib y K Srinivasan. «Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures». En: *Robotica* 21.5 (2003), pág. 541.
- [61] WQD Do y DCH Yang. «Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot». En: *Journal of Robotic Systems* 5.3 (1988), págs. 209-227.
- [62] Claude Reboulet y Thierry Berthomieu. «Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators». En: *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on*. IEEE. 1991, págs. 1153-1157.
- [63] HB Guo y HR Li. «Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator». En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 220.1 (2006), págs. 61-72.
-

- [64] João Carlos Mendes Carvalho y Marco Ceccarelli. «A closed-form formulation for the inverse dynamics of a Cassino parallel manipulator». En: *Multibody System Dynamics* 5.2 (2001), págs. 185-210.
- [65] Housseem Abdellatif y Bodo Heimann. «Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism». En: *Mechanism and Machine Theory* 44.1 (2009), págs. 192-207.
- [66] K-M Lee y Dharman K Shah. «Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator». En: *IEEE Journal on Robotics and Automation* 4.3 (1988), págs. 361-367.
- [67] Zhouchen Lin, Minming Chen y Yi Ma. «The augmented lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices». En: *arXiv preprint arXiv:1009.5055* (2010).
- [68] Mohammad M Aref, Hamid D Taghirad y Sasan Barissi. «Optimal design of dexterous cable driven parallel manipulators». En: (2009).
- [69] Charles A Klein y Bruce E Blaho. «Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators». En: *The International Journal of Robotics Research* 6.2 (1987), págs. 72-83.
- [70] Clement Gosselin y Jorge Angeles. «A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators». En: *Journal of Mechanical Design* 113.3 (1991), págs. 220-226.
- [71] Ronald Huston. *Principles of biomechanics*. CRC press, 2008.
- [72] Pamela Charney y Ainsley Malone. *ADA pocket guide to nutrition assessment*. American Dietetic Associati, 2009.
- [73] Fernando Reyes Cortés. *Matlab aplicado a robótica y mecatrónica*. 681.51 670.4272. 2012.
- [74] Rafael Kelly y Víctor Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.
- [75] Keith Jerome Reckdahl. «Dynamics and control of mechanical systems containing closed kinematic chains». Tesis doct. Stanford University, 1996.
- [76] Santillán I Sandoval J Gómez J. Marizcal A. «Modelado y Simulación de un exoesqueleto con fines de rehabilitación en extremidades inferiores». En: *Nuevas Perspectivas en Robótica y Computación, CIRC 2017* (2017), págs. 27-34.
- [77] Ricardo López y col. «Modelado y Control de un Exoesqueleto para la Rehabilitación de Extremidad Inferior con dos grados de libertad». En: *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* 11.3 (2014), págs. 304-314.
-

A

Cinemática

A.1. Ángulos Euler

La representación de orientación con matriz de rotación requiere nueve parámetros y la la representación del eje del tornillo requiere cuatro. Dado que la rotación en el espacio es un movimiento con tres grados de libertad, un conjunto de tres parámetros independientes son suficientes para representar el orientación. Quizás la forma más sencilla para que un operador humano asigne la orientación de un robot efector final en el espacio es mediante el uso de solo tres parámetros independientes, sin considerar las restricciones ortonormales inherentes en las columnas de una matriz de rotación, o unitarias restricciones de la representación del eje del tornillo. Varios conjuntos de representaciones de tres parámetros han sido reportados en la literatura a través de los años, originando por la forma en que la orientación en el espacio se puede medir. Los conjuntos más comúnmente utilizados se llaman Euler anglos. En las siguientes secciones, se introducen varias de tales representaciones. En una representación de ángulo de Euler, tres rotaciones sucesivas sobre el sistema de coordenadas de marco fijo o móvil se utilizan para describir la orientación del cuerpo rígido. En lo que sigue, un tipo de ángulo de Euler en el que las rotaciones se consideran con respecto a la fija el marco está descrito. Esta representación se conoce como pitch-roll-yaw o ángulos de Euler X-Y-Z fijos. Otros tres tipos de ángulos de Euler, en los que las rotaciones se consideran con respecto a un marco móvil, viene después. Esas representaciones se denotan por w-v-u, w-v-w, y w-u-w ángulos de Euler. (Ver figura A.2).

Pitch-Roll-Yaw

Los ángulos de pitch, roll y yaw se definen para un objeto en movimiento en el espacio a medida que las rotaciones a lo largo de los ejes laterales, longitudinales y verticales unidos al objeto en movimiento, respectivamente. Estos ángulos se muestran en un avión en la Figura A.1, en la que el ángulo de inclinación representa la orientación del avión sobre el eje lateral, el ángulo de balanceo representa la rotación sobre el eje longitudinal, y el ángulo de guiñada es la rotación sobre el eje vertical. Para encontrar la relación entre estos ángulos y la matriz de rotación, tres las rotaciones sucesivas sobre los ejes x, y y z se definen de la siguiente manera:

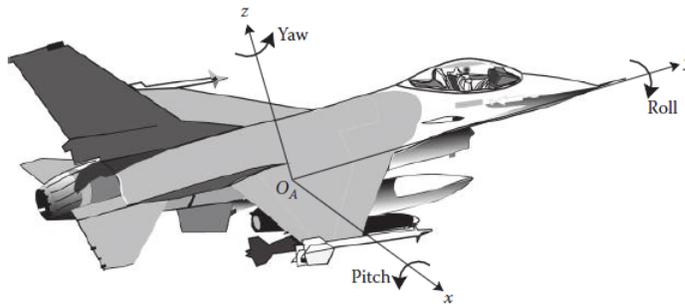


Figura A.1: Ángulos de Euler.

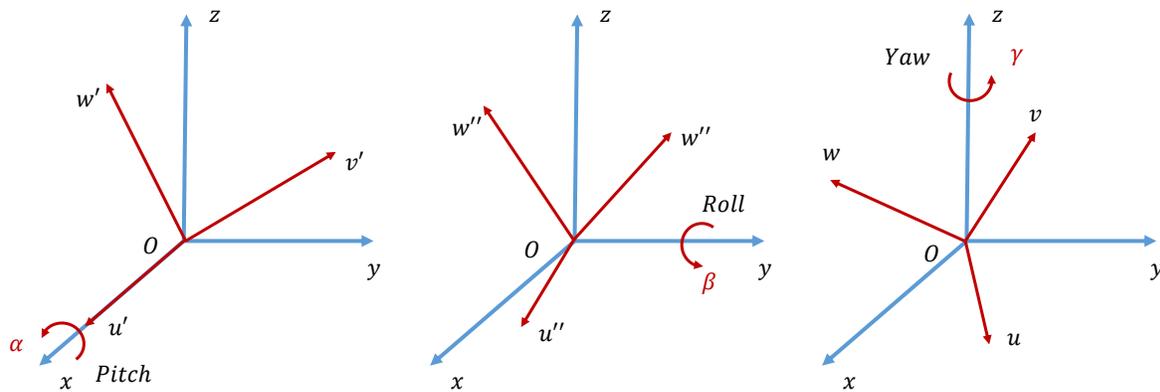


Figura A.2: Rotación en cada eje.

A.1.1. Código para cinemática inversa

```

1 function [Li, DELTA, DELRadian]=Stewart(tx,ty,tz,al,bet,gam)
2 syms al bet gam Px Py Pz t eta DELTA D1 D2 D3 D4 D5 D6 t
3 T=[tx ty tz]';
4 DELTA=[D1 D2 D3 D4 D5 D6];
5 eta_b=[1.43 1.70 3.53 3.79 5.62 5.89]; %rad
6 eta_p=[0.74 1.34 2.89 3.44 4.93 5.53]; %rad
7 Rp=0.1175;
8 Rb=0.1340;
9 Rm=0.01423;
10 D=0.247;
11 for i=1:6
12 bi(:,i)=[Rb*cos(eta_b(1,i)) Rb*sin(eta_b(1,i)) 0]';
13 Pi(:,i)=[Rp*cos(eta_p(1,i)) Rp*sin(eta_p(1,i)) 0]';
14     if i==1 || i==3 || i==5
15         %impares

```

```

16     x_mi(1,i)=-cos(DELTA(1,i))*sin(eta_b(1,i))+bi(1,i);
17     y_mi(2,i)= cos(DELTA(1,i))*cos(eta_b(1,i))+bi(2,i);
18     z_mi(3,i)=sin(DELTA(1,i))+bi(3,i);
19     else
20         %pares
21         x_mi(1,i)= cos(DELTA(1,i))*sin(eta_b(1,i))+bi(1,i);
22         y_mi(2,i)=-cos(DELTA(1,i))*cos(eta_b(1,i))+bi(2,i);
23         z_mi(3,i)=sin(DELTA(1,i))+bi(3,i);
24     end
25     Co_mi(:,i)=Rm*[x_mi(1,i) y_mi(2,i) z_mi(3,i)]'; %sistema de ...
        cooreenadas de x_mi y_mi z_mi
26 end
27
28 bRp=[cos(bet)*cos(gam)   cos(gam)*sin(al)*sin(bet)-cos(al)*sin(gam)   ...
        sin(al)*sin(gam)+cos(al)*cos(gam)*sin(bet) ;
29     cos(bet)*sin(gam)   cos(al)*cos(gam)+sin(al)*sin(bet)*sin(gam)   ...
        cos(al)*sin(bet)*sin(gam)-cos(gam)*sin(al);
30     -sin(bet)           cos(bet)*sin(al)   ...
                        cos(al)*cos(bet) ];
31 for i=1:6
32     Li(:,i)=T+bRp*Pi(:,i)-bi(:,i);
33 end
34 %
35 Li;
36 for i=1:6
37     Lill(:,i)=Pi(:,i)-bi(:,i) ;
38     Lil(:,i)=norm(Li(:,i),2);
39 end
40 Li=Lil(1,:);
41 Mi=Co_mi;
42 for i=1:6
43     Ppi(:,i)=[Rp*cos(eta_p(1,i)) Rp*sin(eta_p(1,i)) Li(1,i)]';
44     A_i(:,i)=2*Rm*(Ppi(3,i)-bi(3,i));
45     B_i(:,i)=2*Rm*(sin(eta_b(1,i))*(Ppi(1,i)-bi(1,i))...
46     -cos(eta_b(1,i))*(Ppi(2,i)-bi(2,i)));
47     C_i(:,i)=Li(1,i)^2-D^2+Rm^2;
48     a=A_i(:,i);b=B_i(:,i);c=C_i(:,i);
49     if i==1 || i==3 || i==5 %impares
50         DE(:,i)=angle(asin(-c/(sqrt(a^2+b^2)))-atan(b/a));
51
52     else %pares
53         DE(:,i)=angle(asin(c/(sqrt(a^2+b^2)))-atan(b/a));
54     end
55
56 end
57
58 DELRadian=DE;
59 D1=(180/pi)*DE(1,1);
60 D2=(180/pi)*DE(1,2);
61 D3=(180/pi)*DE(1,3);
62 D4=(180/pi)*DE(1,4);
63 D5=(180/pi)*DE(1,5);
64 D6=(180/pi)*DE(1,6);
65 DELTA=eval(DELTA);

```

A.2. Aclaraciones matemáticas

Se hace mención en la ecuación 3.28

A.3. Método de Newton-Raphson

El procedimiento que se conoce como método de Newton también se llama iteración de Newton-Raphson. Tiene una forma más general que la que aquí veremos, la cual se puede usar una para encontrar raíces de sistemas de ecuaciones. Verdaderamente, este es uno de los procedimientos más importantes en el análisis numérico y su campo de aplicación se extiende a las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Aquí se aplica a una sola ecuación de la forma $f(x) = 0$. Como antes, buscamos uno o más puntos en los que el valor de la función f es cero.

Interpretación del método de Newton En el método de Newton, se supone desde el principio que la función f es derivable. Esto implica que la gráfica de f tiene una pendiente definida en cada punto y , por tanto, una recta tangente única. Ahora permítanos estudiar la siguiente idea simple. En un punto dado $(x_0, f(x_0))$ en la gráfica de f , hay una tangente, que es una bastante buena aproximación a la curva en la vecindad del punto. Analíticamente, esto significa que la función lineal

$$l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

está cerca de la función dada f cerca de x_0 . En x_0 , las dos funciones l y f concuerdan. Tomamos el cero de f como una aproximación del cero de l . El cero de l se encuentra fácilmente:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Por esto, empezando con el punto x_0 (al que podemos interpretar como una aproximación a la raíz buscada), pasemos a un nuevo punto x_1 obtenido de la fórmula anterior. Naturalmente, el proceso se puede repetir (iterando) para producir una sucesión de puntos:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad \text{etc.}$$

En condiciones favorables, la sucesión de puntos tenderá a un cero de f . En la figura A.3 se muestra la geometría del método de Newton. La recta $y = l(x)$ es tangente a la curva $y = f(x)$. Ésta interseca el eje x en un punto x_1 . La pendiente de $l(x)$ es $f'(x_0)$.

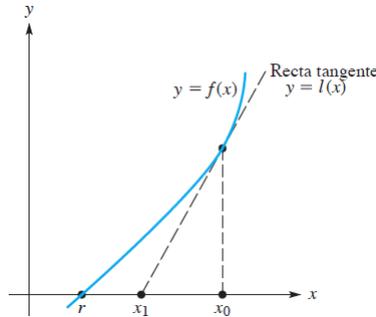


Figura A.3: Método de Newton

Hay otras maneras de interpretar el método de Newton. Suponga de nuevo que x_0 es una aproximación inicial a una raíz de f .

$$f(x_0 + h) = 0$$

Si f es una función suficientemente bien comportada, se tendrá una serie de Taylor en x_0 . Así, podríamos escribir

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \dots = 0$$

Por supuesto, no es fácil determinar h a partir de esta ecuación. Por tanto, nos rendimos a la expectativa de llegar a la raíz verdadera en un solo paso y buscamos sólo una aproximación para h . Ésta se puede obtener al desprestigiar los dos primeros términos en la serie:

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

La h que resuelve esta no es la h que resuelve $f(x_0 + h) = 0$, pero es el número que se calcula más fácilmente

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

nuestra nueva aproximación es entonces

$$x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y el proceso se puede repetir. En retrospectiva, vemos que después de todo no era necesaria la serie de Taylor, ya que sólo usamos los primeros dos términos. En el análisis que después haremos, se ha supuesto que f es continua en una vecindad de la raíz. Esta suposición nos permite calcular los errores del proceso. Si el método de Newton se describe en términos de una sucesión x_0, x_1, \dots , entonces se aplica la siguiente definición recursiva o inductiva:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Naturalmente, la pregunta interesante es si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = r$$

Donde r es la raíz deseada.

A.3.1. Código para cinemática directa

```

1 function [xef,yef,zef,al,bet,gam]=cineDirecta(L1,L2,L3,L4,L5,L6)
2 syms q1 q2 q3 q4 q5 q6
3 Li=[L1 L2 L3 L4 L5 L6];
4 eta_b=[1.43 1.70 3.53 3.79 5.62 5.89]; %rad
5 eta_p=[0.74 1.34 2.89 3.44 4.93 5.53]; %rad
6 Rp=0.125; %0.1175;
7 Rb=0.200; %0.1340;
8 Rm=0.01423; %->metros %14.23; % ---mm % 1.42; %-->cm
9 D=0.247; %->m
10 bi=zeros(3,6);
11 Pi=zeros(3,6);
12 for i=1:6
13     bi(:,i)=[Rb*cos(eta_b(1,i)) Rb*sin(eta_b(1,i)) 0]';
14     Pi(:,i)=[Rp*cos(eta_p(1,i)) Rp*sin(eta_p(1,i)) 0]';
15 end
16 bRp=[cos(q5)*cos(q6) cos(q6)*sin(q4)*sin(q5)-cos(q4)*sin(q6) ...
17       sin(q4)*sin(q6)+cos(q4)*cos(q6)*sin(q5) ;
18       cos(q5)*sin(q6) cos(q4)*cos(q6)+sin(q4)*sin(q5)*sin(q6) ...
19       cos(q4)*sin(q5)*sin(q6)-cos(q6)*sin(q4) ;
20       -sin(q5) cos(q5)*sin(q4) ...
21       cos(q4)*cos(q5) ] ;
19 F = zeros(1,6,'sym');
20 for i=1:6
21     F(:,i)=q1.^2+q2.^2+q3.^2+Rb.^2+Rp.^2+2.*(Pi(1,i).*bRp(1,1)+ ...
22     Pi(2,i).*bRp(1,2)).*(q1-bi(1,i))+2.*(Pi(1,i).*bRp(2,1)+ ...
23     Pi(2,i).*bRp(2,2)).*(q2-bi(2,i))+2.*(Pi(1,i).*bRp(3,1)+ ...
24     Pi(2,i).*bRp(3,2)).*q3-2.*(q1.*bi(1,i)+q2.*bi(2,i))-Li(1,i).^2;
25
26     end
27
28 fname=F;
29 xo=[1;1;1;1;1;1] ;
30 fprima=jacobian(fname);
31 epsilon=0.0001;
32 maxiter = 30000000;
33 iter = 1;
34 f=inline(fname);
35 jf=inline(fprima);
36 error=norm(f(xo(1),xo(2),xo(3),xo(4),xo(5),xo(6)),2);
37 % fprintf('error=%12.8f\n', error);
38 while error >= epsilon
39     fxo=f(xo(1),xo(2),xo(3),xo(4),xo(5),xo(6));
40     fpxo=jf(xo(1),xo(2),xo(3),xo(4),xo(5),xo(6));
41     finv=inv(fpxo);
42     x1=xo-finv*fxo';
43     fx1=f(xo(1),xo(2),xo(3),xo(4),xo(5),xo(6));
44     error =norm((fx1),2); %abs(x1-xo);
45     %fprintf(' Iter %2d raiz ...
46         x=(%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f) ...
47         f(x)=(%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f,%14.9f)\n',....

```

```
46         % iter,x1(1),x1(2),x1(3),x1(4),x1(5),x1(6),fx1(1),
47         %fx1(2),fx1(3),fx1(4),fx1(5),fx1(6));
48     if iter > maxiter
49         % fprintf(' Numero maximo de iteraciones excedido \n');
50     return;
51     end
52     xo=x1;
53     iter=iter+1;
54     for i=1:maxiter;
55
56     end
57
58     end
59     xef=xo(1);
60     yef=xo(2);
61     zef=xo(3);
62     al=xo(4);
63     bet=xo(5);
64     gam =xo(6);
65     ref=[xef yef zef al bet gam]
```


B

Dinámica

B.1. Plataforma Stewart

Código empleado en la programación de simulink para la generación del modelo dinámico de la plataforma Stewart.

```
1 function [qpp1, qpp2, qpp3, qpp4, qpp5, qpp6] = ...
    fcn (J, Jd, Ld, qp1, q1, qp2, q2, qp3, q3, qp4, q4, qp5, q5, qp6, q6, ...
2 tao1, tao2, tao3, tao4, tao5, tao6, t)
3
4
5
6 q=[q1;q2;q3;q4;q5;q6]; %vector de posicion
7 qp=[qp1;qp2;qp3;qp4;qp5;qp6]; %velocidad articular
8 m=300; %
9 g=9.81;
10
11
12 Ix=25;
13 Iy=25;
14 Iz=50;
15
16 a=0.2; %cm
17 b=0.4; %cm
18 d=0.1; %cm
19 %matriz M
20 M=[m 0 0 0 0 0;
21 0 m 0 0 0 0;
22 0 0 m 0 0 0;
23 0 0 0 Ix*(1+cos(2*q6)/2)+Iy*((1-cos(2*q6))/2) ...
    (Ix-Iy)*cos(q6)*cos(q4)*sin(q6) 0;
24 0 0 0 (Ix-Iy)*cos(q6)*cos(q4)*sin(q6) ...
    ((1+cos(2*q4))/2)*(Ix*((1-cos(2*q6))/2)+Iy*((1+cos(2*q6))/2))+Iz*((1-cos(2*q4))/2) -Iz*sin(q4);
25 /2))+Iz*((1-cos(2*q4))/2) -Iz*sin(q4);
26 0 0 0 0 -Iz*sin(q4) Iz];
27
28 %matriz de coriolis
29 v44=-(1/2)*(Iy-Ix)*qp6*sin(2*q6);
30 v45=(1/2)*(Ix-Iy)*qp6*cos(q4)*cos(2*q6)+(1/2)*(Iz*qp6*sin(2*q4))-...
31 (1/2)*(Iz-Ix*((1-cos(2*q6))/2)-Iy*((1+cos(2*q6))/2))*qp5*sin(2*q4);
```

```

32 v46=(1/2)*(Iy-Ix)*qp4*sin(2*q6)-(1/2)*(Iy-Ix)*qp5*cos(q4)*cos(2*q6)+...
33 (1/2)*Iz*qp5*sin(2*q4);
34 v54=(1/2)*(Iy-Ix)*qp4*sin(q4)*sin(2*q6)-(1/2)*Iz*qp6*sin(2*q6)+...
35 (1/2)*(Ix-Iy)*qp6*cos(q6)*cos(2*q6)+(1/2)*(Iz-Ix)*((1-cos(2*q6))/...
36 2)-Iy*((1+cos(2*q6))/2)+Iy*((1+cos(2*q6))/2));
37 v55=(1/2)*qp4*sin(2*q4)*(Iz-Iz*((1-cos(2*q6))/2))-Iy*((1+cos(2*q6))/...
38 2)+(1/2)*(Ix-Iy)*((1+cos(2*q4))/2)*sin(2*q6)*qp6;
39 v56=-(1/2)*Iz*sin(2*q4)*qp4+(1/2)*(Ix-Iy)*cos(q4)*cos(2*q6)*qp4+...
40 (1/2)*(Ix-Iy)*((1+cos(2*q4))/2)*sin(2*q6)*qp5;
41 v64=-(1/2)*(Ix*((1-cos(2*q6))/2)+Iy*((1+cos(2*q6))/2))*sin(2*q4)*...
42 qp5+(1/2)*(Ix-Iy)*sin(2*q6)*qp4+(1/2)*(Iy-Ix)*cos(q4)*cos(2*q6)*qp5;
43 v65=-(1/2)*Iz*sin(2*q4)*qp4-(1/2)*(Ix-Iy)*cos(q4)*cos(2*q6)*qp4-...
44 (1/2)*(Ix-Iy)*cos(q4)^2*sin(2*q6)*qp5;
45
46 C=[0 0 0 0 0 0;
47     0 0 0 0 0 0;
48     0 0 0 0 0 0;
49     0 0 0 v44 v45 v46;
50     0 0 0 v54 v55 v56;
51     0 0 0 v64 v65 0];
52 %par gravitacional
53 G=[0 ;0 ;m*g; 0;0 ;0];
54
55 tau=[tao1; tao2 ;tao3; tao4 ;tao5; tao6];
56 Mq=inv(J)'*M*inv(J);
57 Cq=inv(J)'+(C-M*inv(J)*Jd)*inv(J);
58 Gq=inv(J)'+G;
59 qpp=inv(Mq)*(tau-Cq*qp-Gq);
60 % qpp=inv(M)*(J'*tau-C*qp-G);
61
62 qpp1=qpp(1);
63 qpp2=qpp(2);
64 qpp3=qpp(3);
65 qpp4=qpp(4);
66 qpp5=qpp(5);
67 qpp6=qpp(6);
68 end

```

B.2. Modelo Dinamico de Pierna

```

1 function [q1pp, q2pp, q3pp, t] = fcn(POS, VEL, ACEL, q1, q2, q3, q1p, q2p, q3p)
2 qp=[q1p;q2p;q3p];
3 m1=2.24;m2=6.22;m3=0.6595;
4 l1=0.461;l2=0.531;l3=0.03329;
5 g=9.81;
6 I1=0.25;I2=0.69;I3=0.00055;
7 A=m1*l1+I1+I2+I3+m2*(l1^2+l2^2)+m3*(l1^2+l2^2+l3^2);
8 B=(m2*l1*l2+m3*l1*l2)*cos(q2);
9 C=m3*l1*l3*cos(q2+q3);
10 D=m3*l2*l3*cos(q3);

```

```

11 E=m2*l2^2+I2+I3+m3*(l2^2+l3^2);
12 F=I3+m3*l3^2;
13 G=(-m2*l1*l2-m3*l1*l2)*sin(q2);
14 H=-m3*l1*l3*sin(q2+q3);
15 I=-m3*l2*l3*sin(q2+q3);
16 J=(m1*l1+m2*l1+m3*l1)*sin(q1);
17 K=(m2*l2+m3*l2)*sin(q1+q2);
18 L=m3*l3*sin(q1+q2+q3);
19
20 Me=[A+2*(B+C+D)   E+B+C+2*D   F+C+2*D;
21       E+B+C+2*D   E+2*D         F+D;
22       F+C+D       F+D           F];
23
24 Ce=[q2p*(2*G+H)+q3p*(2*H+2*I)   q2p*(G+H)   q3p*(H+I)+q2p*(2*H+2*I);
25       q1p*(G+H)+q3p*2*I           q3p*(2*I)           q3p*I           ;
26       q1p*(-(H+I)+q2p*(-2*I))   q2p*-I           0           ];
27
28 Ge=[J+K+L;
29       K+L;
30       L   ];
31 t=Me*ACEL+Ce*VEL+Ge;
32 qpp=inv(Me)*(t-Ce*qp-Ge);
33 q1pp=qpp(1);
34 q2pp=qpp(2);
35 q3pp=qpp(3);
36
37 end

```


C

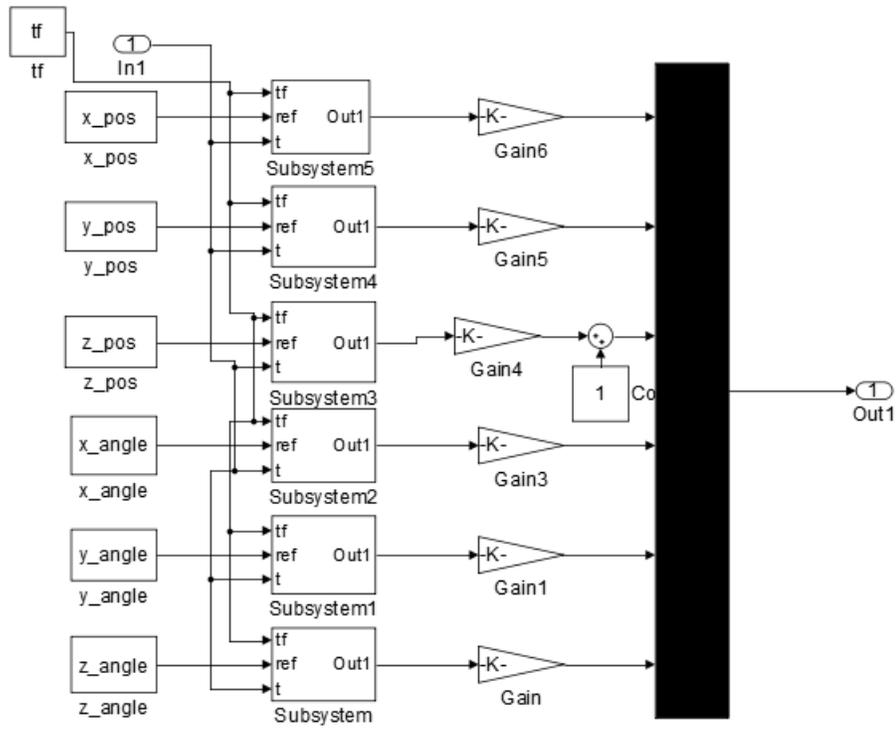
Control

Parte de la programación del control PD más compensación a la gravedad se muestra a continuación.

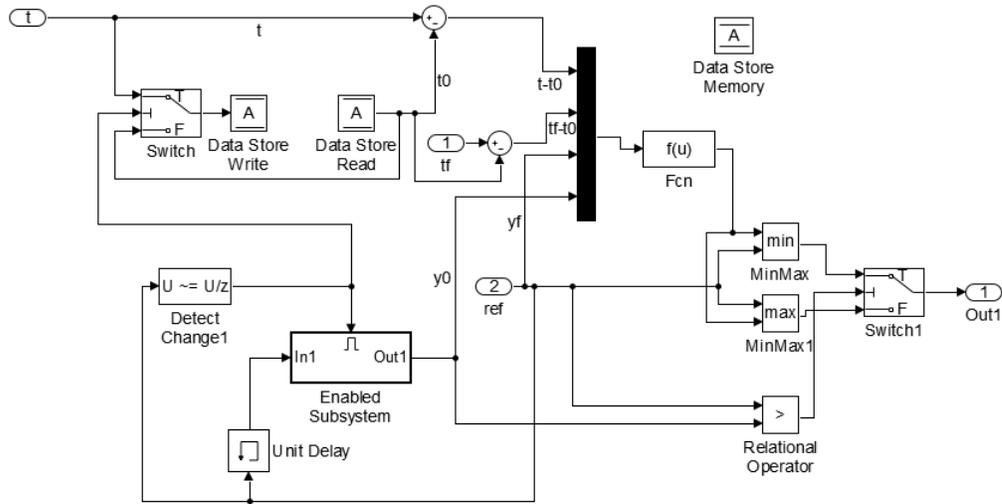
```
1 function [tao1,tao2,tao3,tao4,tao5,tao6, ...
   qtilde,qd]=controlPD(L1,L2,L3,L4,L5,L6,qd,qp1,q1,qp2,q2,qp3,...
2 q3,qp4,q4,qp5,q5,qp6,q6,t)
3
4 q=[q1;q2;q3;q4;q5;q6]; %posiciones
5 qp=[qp1;qp2;qp3;qp4;qp5;qp6]; %velocidades
6 m=300;
7 g=9.81;
8 G=[0;0;m*g;0;0;0];
9 qtilde=qd-q;
10
11 Kp=[8 15 15 20 15 15]; %%para la qd con sin en todos
12 Kp=diag(Kp);
13 %derivativa
14 Kv=[0.001 0.0001 1 1 1 1];
15 Kv=diag(Kv);
16
17 tau=Kp*qtilde-Kv*qp+g; %radianes
18 tau=double(tau);
19 tao1=tau(1);
20 tao2=tau(2);
21 tao3=tau(3);
22 tao4=tau(4);
23 tao5=tau(5);
24 tao6=tau(6);
```

C.1. Generación de Trayectoria

Como parte del control necesitamos una trayectoria la cual se adapte o siga según sea el caso, para ello mostramos la ecuación de Kane programada en Simulink.



(a) Ecuación de Kane



(b) Subsystem

Figura C.1: Trayectoria

Diseño y Modelado de un Robot Paralelo Tipo Stewart para Diagnostico y Rehabilitación de Tobillo

Ana. I. Aureles-Cabrera^{1,*}, Hipólito Aguilar-Sierra¹

¹ Investigación y Posgrado, Universidad Politécnica de Tulancingo, Tulancingo, Hidalgo, México
{*1631005, hipolito.aguilar}@upt.edu.mx

Resumen— En este trabajo se presenta el proceso de diseño mecánico y desarrollo del modelado matemático para un robot paralelo del tipo Stewart instrumentado con actuadores del tipo rotacionales. El dispositivo se plantea para ser utilizado como una herramienta de diagnóstico y rehabilitación pasiva y activa de la articulación de tobillo por parte del fisioterapeuta. Además, se presentan los resultados de simulación numérica de la cinemática y dinámica directa e inversa del robot utilizando un control PD implementado en Matlab, considerando como referencia de posicionamiento algunos movimientos que se deben realizar durante un ejercicio típico de rehabilitación de tobillo.

Palabras clave— Modelado, Rehabilitación Tobillo, Simulación, Stewart.

I. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con los resultados de la Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica (ENADID), en 2014 en nuestro país habían 7.1 millones de habitantes que padecen algún tipo de discapacidad, siendo la limitación de la movilidad la de mayor frecuencia entre este sector de la población con 64.1%. Es importante señalar que el estado de Hidalgo se encuentra entre las primeras siete entidades con mayor número de personas con discapacidad motriz mayores de 30 años [1].

La articulación del tobillo es una de las estructuras de mayor soporte de peso del cuerpo humano, está se compone de la unión de dos articulaciones: la primera es la que está formada por la tibia, peroné y el astrágalo en el pie, y la segunda la conforman el astrágalo del pie con el hueso calcáneo y el escafoides. En la Fig. 1 se muestra la articulación del tobillo y su equivalente mecánico, es decir, una articulación del tipo elipsoidal. Como resultado de su función y estructura, el tobillo es la articulación más comúnmente lesionada [2]. Los problemas más comunes del tobillo son las torceduras y las fracturas. Una torcedura o esguince es una lesión en los ligamentos. Los esguinces pueden tardar algunas semanas o hasta varios meses en sanar completamente. La gravedad de un esguince de tobillo depende de qué tanto se estiraron o desgarraron los ligamentos. Por otro lado, una fractura es una ruptura de un hueso. Las fracturas de tobillo son el tipo más frecuente de fractura tratado por los cirujanos ortopédicos. Se producen por movimientos forzados del pie en aducción, abducción,

pronación, supinación, combinados, torsión, choque vertical, etc. Una adecuada terapia de rehabilitación [3] empieza con ejercicios sin resistencia (rehabilitación pasiva), progresando a ejercicios de resistencia y luego a actividades contra resistencia (rehabilitación activa). Por esta razón, surge la necesidad de plantear el desarrollo de un prototipo de robot paralelo basado en la plataforma Stewart con actuadores rotacionales, que facilite la tarea de rehabilitación de pacientes con lesiones motoras en las extremidades inferiores y más en específico de la articulación de tobillo.

Dentro de la literatura nos encontramos con diferentes dispositivos para asistir en la tarea de rehabilitación de articulación de tobillo, en [4] se describe un mecanismo con un grado de libertad (GDL) para tobillo instrumentado con actuadores seriales elásticos (SEA) para rehabilitación pasiva y activa de flexión/extensión a través de un control por impedancia, en [5] una órtesis flexible y ligera de 2 GDL donde utiliza músculos neumáticos para asistir a la dorsi/plantar flexión, así como para inversión/eversión y por último está el dispositivo robótico con interface tipo videojuego para mejorar el proceso de rehabilitación presentado en [6].

Por otra parte, los manipuladores cinemáticos paralelos tienen mejor rendimiento que los manipuladores en serie, en términos de un alto grado de precisión, altas velocidades o aceleraciones y alta rigidez. Por lo tanto, parecen perfectamente adecuados para la tarea de rehabilitación, por ejemplo, para ejercicios de rehabilitación activa y pasiva de dorsi/plantar flexión, encontramos un robot paralelo tipo delta que también puede ser utilizado para el diagnóstico de lesiones de tobillo [7], en [8] se presenta una modificación al robot paralelo tipo Stewart de 2 GDL, pero haciendo uso de solo 3 actuadores lineales en vez de los 6 que utilizan la mayoría de este tipo de robot. Por último, en [9] y [10] se presentan estructuras basadas en robots paralelos; la primera con músculos neumáticos y la segunda con actuadores lineales ambas con un grado de libertad.

II. METODOLOGÍA

El objetivo del presente trabajo es el diseño de un prototipo de un robot paralelo basado en la plataforma Stewart, así como el análisis cinemático y dinámico del mismo. La cinemática inversa permite encontrar los valores

de las coordenadas articulares del robot en base a la posición y orientación la plataforma móvil en coordenadas cartesianas mientras que la dinámica inversa permite calcular el par necesario que deben proporcionar los actuadores para alcanzar la posición deseada.



Fig. 1 Articulación de tobillo y su equivalente mecánico

A. Diseño mecánico.

Utilizando como referencia el alcance de movimiento de la articulación de tobillo y las dimensiones antropométricas del tamaño del pie de una persona entre 18 y 30 años, se realizó el diseño de un robot paralelo tipo Stewart con 6 actuadores rotacionales. La propuesta consta de 3 elementos principales como se muestra en la Fig. 2. El primero de estos es la base fija, donde se montan los motores y que a su vez sirve como estructura principal de soporte del robot, la segunda de estas es la base móvil la cual se conecta a la base fija a través de 6 parejas de eslabones con el propósito de mejorar la rigidez del robot y por ultimo esta la plantilla donde el usuario apoyara su pie y que se atara a esta como si se tratara de un zapato grande. Los movimientos que se buscan realizar con el robot son la dorsi/plantar flexión, eversion-inversión y abducción-adiucción.

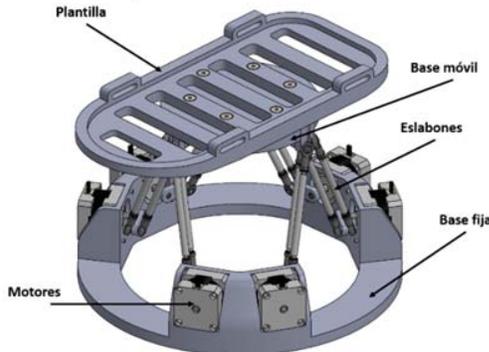


Fig. 2 Robot paralelo para rehabilitación de tobillo

B. Análisis cinemático.

La plataforma Stewart está compuesta por seis cadenas cinemáticas cerradas paralelas. El análisis cinemático resuelve el problema de la cinemática inversa y cinemática directa.

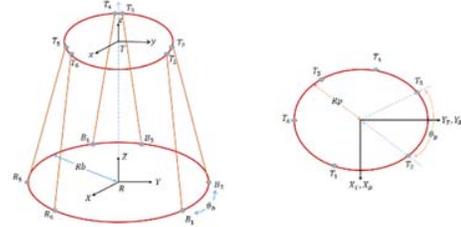


Fig. 3 Geometría de la plataforma Stewart (SP).

De la Fig. 3 se obtienen los parámetros que se requieren para encontrar la longitud de cada actuador, se formulan las ecuaciones para un actuador lineal para posteriormente hacer una conversión trigonométrica para obtener el ángulo necesario para cada actuador rotacional. Para la obtención de la longitud tomamos en cuenta los ángulos de Euler para formar la matriz de rotación (r_{3x3}) así como las variables B_i y GT_i los cuales representan los puntos de conexión entre la base y la plataforma móvil, incluyendo el vector de posición inicial ($[P_x \ P_y \ P_z]$) de esta manera se aplica la norma euclidiana para obtener la ecuación “(1)”

$$L_i^2 = (P_x - B_{xi} + GT_{xi}r_{11} + GT_{yi}r_{12})^2 + (P_y - B_{yi} + GT_{xi}r_{21} + GT_{yi}r_{22})^2 + (P_z + GT_{xi}r_{31} + GT_{yi}r_{32})^2 \quad (1)$$

Aplicando el método geométrico en le Fig. 4. Se obtiene el ángulo con identidades trigonométricas, para ello obtenemos las longitudes de las variables siguientes: $a = [x_a \ y_a \ z_a]$, $b = [x_b \ y_b \ z_b]$ y $P_i = [x_p \ y_p \ z_p]$. Posteriormente se realiza una simplificación y cambio de variable para reducir la ecuación final y despejar el ángulo α de la ecuación “(2)” donde $L = l^2 - (s^2 - a^2)$, $M = 2a(z_p - z_b)$, $N = 2a[\cos \beta(x_p - x_b) + \sin \beta(y_p - y_b)]$.

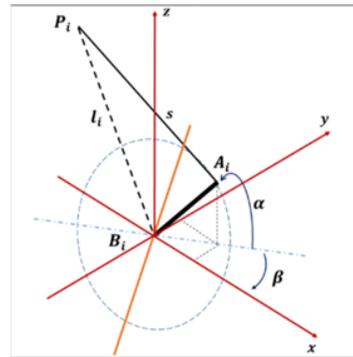


Fig. 4 Eje del motor en el plano x-y-z.

$$\Delta_i = \arcsin\left(\frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2}}\right) - \arctan\left(\frac{N}{M}\right) \quad (2)$$

Dicha plataforma no presenta soluciones únicas ya que consta de una ecuación no lineal de 6 variables. Se programó

el método de Newton-Raphson para la solución de la ecuación “(3)” con condiciones iniciales de 0.3 en cada parámetro.

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = x^2 + y^2 + z^2 + r_b^2 + r_a^2 + 2(a_{xi}r_{11} + a_{yi}r_{12})(x - b_{xi}) + 2(a_{xi}r_{21} + a_{yi}r_{22})(y - b_{yi}) + 2(a_{xi}r_{31} + a_{yi}r_{32})z - 2(xb_{xi} + yb_{yi}) - L_i^2 = 0 \quad (3)$$

B. Análisis dinámico.

El análisis dinámico del manipulador de la plataforma Stewart se lleva a cabo por la formulación de Lagrange ya que proporciona una estructura analítica y ordenan para su análisis.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = J^T(q)\tau \quad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación dinámica para robots manipuladores; para robots paralelos se iguala a $J^T(q)\tau$. Esto se debe al tipo de actuadores de la plataforma, al ser rotacionales exigen generar fuerza a partir del torque generado por estos. De igual forma dicha ecuación se conforma de la matriz $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, que a su vez es la matriz de inercias y sus elementos están dados como sigue: $m_{1,1} = m_{2,2} = m_{3,3} = m$, $m_{4,4} = M_{4,4}$, $m_{4,5} = M_{4,5}$, $m_{5,4} = M_{5,4}$, $m_{5,5} = M_{5,5}$, $m_{5,6} = M_{5,6}$, $m_{6,5} = M_{6,5}$, $m_{6,6} = I_z$ y cero en cualquier otro caso. $C \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de Coriolis, con $c_{4,4} = C_{4,4}$, $c_{4,5} = C_{4,5}$, $c_{4,6} = C_{4,6}$, $c_{5,4} = C_{5,4}$, $c_{5,5} = C_{5,5}$, $c_{5,6} = C_{5,6}$, $c_{6,4} = C_{6,4}$, $c_{6,5} = C_{6,5}$ y cero en cualquier otro caso y finalmente $g \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ es el vector de pares gravitacionales, con $g_{3,1} = mG$ y cero en cualquier otro caso.

C. Generación de Trayectorias.

La trayectoria deseada para los movimientos de rehabilitación necesita de una transición suave entre distintos valores (ejercicio repetitivo) y que además pueda mantenerse en una posición dada (ejercicios de resistencia), dichas trayectorias se pueden generar por medio del polinomio de Bézier, función sigmoideal o polinomios de quinto orden, las cuales tienen las siguientes deficiencias:

- i) Se necesitan muchos valores iniciales y finales para encontrar los coeficientes polinomiales.
- ii) Los valores de aceleración, especialmente al inicio, requieren niveles altos
- iii) Los coeficientes deben recalcularse cada vez que cambien las condiciones.

La función de transición de Kane se usa para resolver estas deficiencias a través de la siguiente ecuación [11].

$$y(t) = y_0 + (y_f - y_0) \frac{t-t_0}{t_f-t_0} - \frac{y_f-y_0}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t-t_0}{t_f-t_0}\right) \quad (5)$$

Donde $y(t)$ es la posición final de la función, y_0 es la posición inicial, y_f es la posición final, t es el tiempo de simulación, t_0 es el tiempo inicial y t_f es el tiempo final.

D. Control PD

Se implementó un controlador del tipo Proporcional – Derivativo, cuya estructura general es la siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + K_v \dot{e}(t) \quad (6)$$

donde K_p y K_v son las ganancias proporcional y derivativa respectivamente y $e(t) = q_d(t) - q(t)$ representa en error de seguimiento de trayectoria.

III. RESULTADOS

A. Cinemática

Para cada prueba se requieren parámetros iniciales, para la cinemática inversa es la orientación y posición deseada. La plantarflexión consta de un rango de 25° a 35° en el eje x , de esta manera se realizaron diversas pruebas para comprobar el análisis empleado.

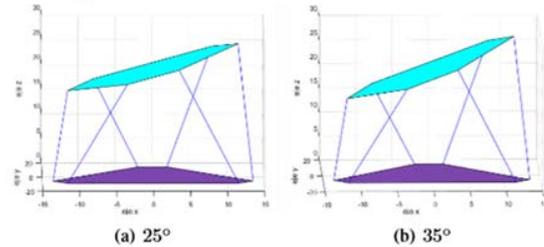


Fig. 5 a) inclinación de 25° b) inclinación de 35°

Se programó la trayectoria de un círculo para la solución del método donde el vector x está dado por:

$$x = \left[0.3 \cos(\pi t) \quad 0.3 \sin(\pi t) \quad 0.55 + 0.22 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (7)$$

B. Dinámica

Las ecuaciones (4) y (5) se programaron en la misma interfaz de Simulink, dando parámetros de inicio para la función Kane los siguientes:

$$x = 0; y = 0; z = -100\text{mm}; \alpha = 30^\circ; \beta = 20^\circ; \gamma = 10^\circ$$

En la Fig. 6 se muestra el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración del sistema dado que las escalas en los vectores 4, 5 y 6 eran diferentes se multiplico por un factor de 10 con el fin de una mejor comparación. Por otra parte, en la Fig. 7. Se presentan los torques necesarios en cada actuador para que el robot siga la trayectoria deseada, resaltando que durante el seguimiento solo dos actuadores deben cambiar rápidamente el par aplicado mientras que los demás lo hacen lentamente.

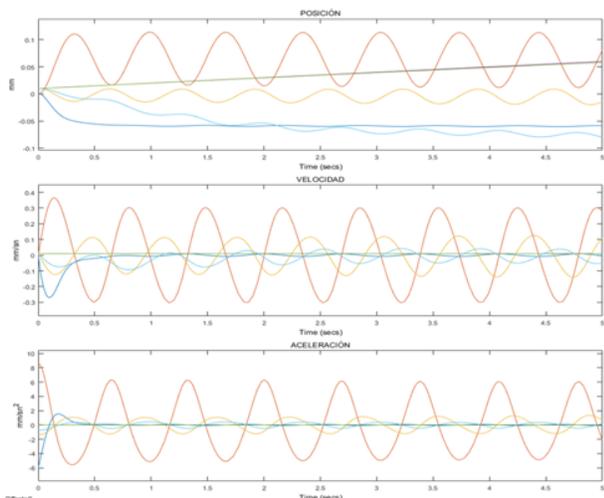


Fig. 6 Comportamiento dinámico de cada actuador

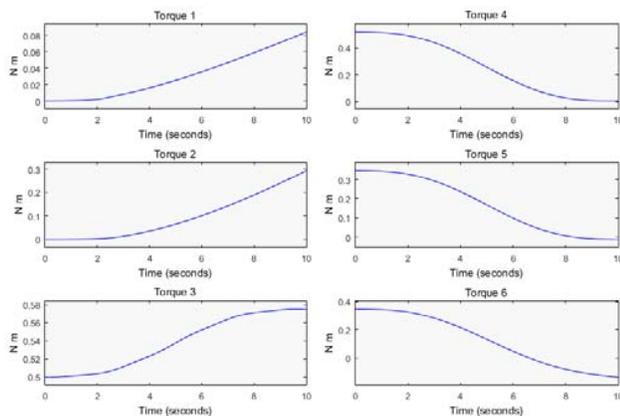


Fig. 7 Torque generado en cada actuador [N m].

IV. DISCUSIÓN

Se consideró durante el modelado de la dinámica y cinemática del robot el uso de actuadores rotacionales en vez de actuadores lineales, esto con el fin de que las simulaciones numéricas reflejen lo más parecido posible a la realidad el seguimiento de trayectorias con esta clase de robot y como se puede observar en las Fig. 6 y 7, dependiendo del tipo de movimiento a realizar, siempre dos parejas de actuadores tendrán mayor participación que el resto, permitiendo corroborar que es factible realizar los distintos movimientos de la articulación de tobillo utilizando el robot paralelo.

V. CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO

Se presentó el diseño y modelado de cinemática y dinámica de un robot paralelo tipo Stewart con actuadores rotacionales, para corroborar la factibilidad de aplicar rehabilitación física a la articulación de tobillo. Este tipo de robot puede generar movimientos de dorsi/plantar flexión, eversión-inversión y abducción-aducción con un solo

dispositivo a diferencia de otras alternativas reportadas en la literatura. Como trabajo futuro se continuará trabajando en el diseño del robot para optimizar la estructura mecánica y se procederá a la construcción del prototipo para realizar pruebas, bajo la supervisión de personal capacitado en el área de la rehabilitación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Vélez, F., Reflexiones, E., & de Población, R. D. S. G. Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica (ENAD), 2014. http://www.inegi.org.mx/saladeprensa/boletines/2015/especiales/especiales2015_07_1.pdf
- [2] Ramírez, Z., Angel, M., González Ojeda, S., & Solís González, J. (1997). Lesión de articulación tibioperoneo astragalina. *Rev. mex. ortop. traumatol*, 11(2), 94-8.
- [3] Zöch, C., Fialka-Moser, V., & Quittan, M. (2003). Rehabilitation of ligamentous ankle injuries: a review of recent studies. *British Journal of Sports Medicine*, 37(4), 291-295. DOI: 10.1136/bjism.37.4.291
- [4] J. C. Pérez-Ibarra, A. L. J. Alarcón, J. C. Jaimes, F. M. E. Ortega, M. H. Terra and A. A. G. Siqueira, "Design and analysis of force control of a series elastic actuator for impedance control of an ankle rehabilitation robotic platform," 2017 American Control Conference (ACC), Seattle, WA, 2017, pp. 2423-2428. DOI: 10.23919/ACC.2017.
- [5] Jamwal, P. K., Xie, S. Q., Hussain, S., & Parsons, J. G. (2014). An adaptive wearable parallel robot for the treatment of ankle injuries. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 19(1), 64-75.
- [6] Méndez-Elizondo, S., Mendoza-Gutiérrez, M. O., & Bonilla-Gutiérrez, I. (2017, September). Desarrollo de un Sistema Robótico para Rehabilitación de Lesiones de Tobillo. In *Memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica* (Vol. 4, No. 1, pp. 385-388).
- [7] Vallés, M., Cazalilla, J., Valera, Á., Mata, V., Page, Á., & Díaz-Rodríguez, M. (2017). A 3-PRS parallel manipulator for ankle rehabilitation: towards a low-cost robotic rehabilitation. *Robotica*, 35(10), 1939-1957.
- [8] J. A. Saglia, N. G. Tzagarakis, J. S. Dai and D. G. Caldwell, "A high performance 2-dof over-actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation," 2009 *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Kobe, 2009, pp. 2180-2186.
- [9] Jamwal, P. K., Xie, S. Q., Hussain, S., & Parsons, J. G. (2014). An adaptive wearable parallel robot for the treatment of ankle injuries. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 19(1), 64-75.
- [10] Rosado, W. M. A., Valdes, L. G. V., Ortega, A. B., Ascencio, J. R., & Beltran, C. D. G. (2017). Passive rehabilitation exercises with an ankle rehabilitation prototype based in a robot parallel structure. *IEEE Latin America Transactions*, 15(1), 48-56.
- [11] Küçük S. (Ed.). (2012). *Serial and Parallel Robot Manipulators-Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*. InTech.179-202.
- [12] Miao, Q., Zhang, M., Wang, C., & Li, H. (2018). Towards Optimal Platform-Based Robot Design for Ankle Rehabilitation: The State of the Art and Future Prospects. *Journal of healthcare engineering*, 2018.
- [13] Rastegarpanah, A., Rakhodaei, H., Saadat, M., Rastegarpanah, M., Marturi, N., Borboni, A., & Loureiro, R. C. (2018). Path-planning of a hybrid parallel robot using stiffness and workspace for foot rehabilitation. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(1), 1687814017754159.