

U

P

T

**Cálculo de la Función de  
Transferencia Óptica usando el  
método de momentos**

por

**Alma Delia López Hernández**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**MAESTRO EN COMPUTACIÓN ÓPTICA**

en la

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE  
TULANCINGO**

Abril 2011

Tulancingo de Bravo, Hidalgo.

Supervisada por:

**Dr. Alfonso Padilla Vivanco**

**Dra. Carina Toxqui Quitl**

©UPT

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y  
distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
TULANCINGO



## **Dedicatoria**

*A mis padres*



## Agradecimientos



Al proyecto FOMIX CONACyT - ESTADO DE HIDALGO 96792 bajo el título “*Clasificación mediante la técnica de momentos circulares para el control de calidad de piezas usando sistemas óptico digitales para la adquisición de imágenes multidistorsionadas*” de donde fui apoyada con la beca - Tesis con Oficio Número FEOO/0556/10. Se agradece también por los recursos otorgados para la realización de esta Tesis.



Al laboratorio de Óptica y Visión por Computadora de la Universidad Politécnica de Tulancingo por las facilidades otorgadas para llevar a cabo esta Tesis.

A mis asesores los Drs. Alfonso Padilla Vivanco y Carina Toxqui Quitl por la dirección de esta Tesis y por permitirme colaborar en su grupo de trabajo dentro de la UPT.

A mis sinodales los Drs. José Humberto Arroyo Núñez y César Santiago Tepantlán por sus valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar el presente trabajo.

## Prefacio

Esta tesis se encuentra ubicada en el área de visión por computadora y análisis de la calidad en sistemas ópticos, para la formación de imágenes. Concretamente, se estudia el problema del cálculo de la Función de Transferencia en Modulación en una y en dos dimensiones para sistemas de visión, que siguen a objetos en movimiento. Las condiciones analizadas son la adquisición de una secuencia de  $N$  imágenes de objetos bajo movimiento lineal, circular y vibratorio.

En el capítulo 1 se dan los antecedentes del tema, en el capítulo 2, se hace un análisis de las funciones de movimiento y algunas de las diferentes trayectorias que podría seguir un objeto. En el capítulo 3 se hace el estudio de la Función de Transferencia Óptica (OTF) en una dimensión, se analizan teóricamente los movimientos lineal y vibratorio. El capítulo 4 se extiende el tratamiento de la Función de Transferencia Óptica a dos dimensiones. En el capítulo 5, se presentan los experimentos en una y dos dimensiones, se muestran los resultados y una aplicación del método en el ámbito industrial. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo realizado.





## Resumen

Se presenta el cálculo de la Función de Transferencia en Modulación para sistemas ópticos que capturan imágenes de objetos que se mueven en diferentes trayectorias tanto en una como en dos dimensiones. Se simulan los resultados obtenidos y se lleva a cabo su comprobación en el laboratorio. Las trayectorias se pueden dividir de acuerdo con su simetría respecto de los ejes  $X - Y$ , y en función de esto se comparan los resultados para las diferentes Funciones de Transferencia en Modulación. El tratamiento es aplicado a la caracterización de sistemas ópticos que realizan el seguimiento de defectos en botellas de PET.



## **Abstract**

A Modulation Transfer Function computation for optical systems is presented. The motion of the objects is analyzed in one and in two dimensions. The results are simulated by a computer program and they are tested by experimental proofs in the Laboratory. According with the trajectories they can be divided in two kinds of symmetries. With this in mind, it is done a comparison of the results for the different Modulation Transfer Functions. Finally, the MTF mathematical treatment is applied into the optical system characterization for the tracking of defects in PET bottles.



# ÍNDICE GENERAL

<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes.....	2
1.2 Objetivos.....	6
1.3 Estado del arte.....	6
1.4 Aportaciones.....	7
<b>2. FUNCIONES DE TRAYECTORIA.....</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción.....	9
2.2 Parametrización de una trayectoria.....	13
2.3 Ejemplos de trayectoria.....	14
2.3.1 Movimiento circular. Rotación.....	15
2.3.2 Cicloide.....	16
2.3.3 Movimiento vibratorio en una dimensión.....	17
2.3.4 Movimiento vibratorio en dos dimensiones.....	18
2.3.5 Diferentes trayectorias, casos particulares.....	19
<b>3. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA ÓPTICA PARA TRAYECTORIAS EN UNA DIMENSION.....</b>	<b>25</b>
3.1 Introducción.....	25
3.2 OTF y MTF en un sistema óptico incoherente. Breve Revisión.....	26
3.2.1 Imagen de una distribución sinusoidal.....	26
3.3 Momentos geométricos.....	30
3.3.1 Momentos geométricos centrales.....	31
3.3.2 Ejemplos.....	32

3.4 Momentos de una trayectoria en una dimensión y la OTF a partir de los momentos calculados.....	34
3.4.1 Ejemplo: movimiento lineal en una dimensión.....	38
3.4.2 Ejemplo: movimiento vibratorio en una dimensión. Caso de alta frecuencia.....	40
<b>4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA ÓPTICA PARA TRAYECTORIAS EN DOS DIMENSIONES.....</b>	<b>43</b>
4.1 Introducción.....	43
4.2 Momentos de una trayectoria en dos dimensiones.....	43
4.3 OTF a partir de los momentos de una trayectoria.....	47
4.4 Simulación para algunos casos.....	55
4.4.1 Simulación del movimiento rectilíneo en dos dimensiones.....	56
4.4.2 Simulación del movimiento circular.....	62
4.4.3 Simulación del movimiento elíptico.....	66
<b>5. EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>	<b>71</b>
5.1 Introducción.....	71
5.2 Sistema de adquisición.....	71
5.3 Sistema de simulación de movimiento.....	73
5.3.1 Movimiento lineal en una dimensión.....	73
5.3.2 Movimiento vibratorio en una dimensión.....	75
5.3.3 Movimiento lineal, circular y elíptico en dos dimensiones.....	77
5.3.3.1 Movimiento lineal en un plano. Caso dos dimensiones.....	80
5.3.3.2 Movimiento circular.....	82
5.3.3.3 Movimiento elíptico.....	85
5.4 Aplicaciones.....	88

5.5 Análisis de los resultados.....	94
<b>6. CONCLUSIONES.....</b>	<b>97</b>
<b>7. REFERENCIAS.....</b>	<b>99</b>
<b>8. APENDICES.....</b>	<b>103</b>
A. Ceros de las funciones de Bessel y Sinc.....	105
B. Mapas de intensidad de funciones Bessel y Sinc.....	106
C. Códigos de programas en Mathcad 14.....	107





## Índice de Figuras

2.1	Movimiento rectilíneo, $\frac{dx}{dt} = v$ , donde $v$ es la pendiente de la recta .....	12
2.2	Movimiento parabólico, $\frac{d\vec{r}}{dt} = v_{0x}\hat{i} + (-gv_{0y}\hat{j})$ , donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula.....	12
2.3	Movimiento circular, $\vec{r} = (r\cos\theta)\hat{i} + (r\sin\theta)\hat{j}$ , donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula .....	12
2.4	Movimiento vibratorio en dos dimensiones.....	13
2.5	Movimiento de una partícula que sigue una trayectoria circular.....	16
2.6	Cicloide ideal.....	17
2.7	Movimiento lineal con $v > 0$ .....	20
2.8	Movimiento lineal con $v < 0$ .....	20
2.9	Movimiento elíptico con amplitudes, $A = 4$ y $B = 2$ .....	21
2.10	Movimiento circular en sentido horario.....	21
2.11	Movimiento circular en sentido antihorario.....	22
3.1	Distribución de un objeto sinusoidal.....	26
3.2	Disco de Airy.....	27
3.3	La visibilidad de la rejilla en el plano imagen cambia respecto al plano objeto, debido a $OTF(u)$ .....	29
3.4	Imagen binaria de prueba del fractal de Julia de $256 \times 256$ pixeles.....	32
3.5	Imagen en niveles de gris de $256 \times 256$ pixeles.....	33
3.6	Proceso de obtención de la MTF utilizando como entrada una Función Paso	35
3.7	Función de movimiento del centro de masa del objeto en el tiempo, cuya trayectoria es lineal.....	38
3.8	MTF teórica, para la función de movimiento lineal.....	39

3.9	Función de movimiento del centro de masa del objeto en el tiempo, cuya trayectoria corresponde a un movimiento vibratorio en una dimensión.....	40
3.10	MTF teórica, para la función de movimiento vibratorio de alta frecuencia en una dimensión.....	42
4.1	Función de pupila radialmente simétrica y plano de observación.....	44
4.2	Función de Punto Extendido, para una fuente puntual.....	44
4.3	OTF teórica con $\sigma^2 = 0.2$ .....	47
4.4	Trayectoria genérica de una partícula que se mueve a lo largo de una curva $\vec{d}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ .....	48
4.5	Esquema del sensado de una cámara CCD.....	55
4.6	Rejilla Multiresolución USAF.....	55
4.7	Objeto visto axialmente que presenta movimiento rectilíneo en un plano. Para: $x(t) = 10\cos(t), y(t) = 10\cos(t)$ .....	55
4.8	MTF para la función de movimiento rectilíneo con parámetros: $p + q = 160$ .....	56
4.9	MTF, vista superior, escalada en niveles de gris.....	56
4.10	Perfil en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con parámetros: $p + q = 160$ .....	57
4.11	Objeto de prueba degradado por movimiento rectilíneo en dos dimensiones para: a) $x(t) = 10\cos(t), y(t) = 10\cos(t)$ , b) $x(t) = 20\cos(t), y(t) = 20\cos(t)$ , c) $x(t) = 10\cos(2t), y(t) = 10\cos(2t)$ y d) $x(t) = 20\cos(2t), y(t) = 20\cos(2t)$ .....	58
4.12	Movimiento rectilíneo en un plano. Esta trayectoria es antisimétrica con respecto a los ejes $X$ e $Y$ . Con parámetros: $x(t) = 10\cos(t), y(t) = 20\cos(t)$ .....	59
4.13	MTF para la función de movimiento rectilíneo con parámetros: $p + q = 240$ .....	59
4.14	MTF, vista superior, escalada en niveles de gris.....	59

4.15	Perfil $X$ en una dimensión para el movimiento rectilíneo con parámetros: $p + q = 240$ .....	60
4.16	Perfil $Y$ en una dimensión para el movimiento rectilíneo con parámetros: $p + q = 240$ .....	60
4.17	Objeto de prueba degradado por movimiento rectilíneo en dos dimensiones para: a) $x(t) = 10\cos(t)$ , $y(t) = 20\cos(t)$ , b) $x(t) = 20\cos(2t)$ , $y(t) = 20\cos(2t)$ , c) $x(t) = 15\cos(t)$ , $y(t) = 30\cos(t)$ y d) $x(t) = 20\cos(2t)$ , $y(t) = 20\cos(2t)$ .....	62
4.18	Movimiento circular para $x(t) = 3\cos(5t)$ , $y(t) = 3\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ .....	63
4.19	MTF para la función de movimiento circular con parámetros: $p + q = 240$ .....	63
4.20	MTF del movimiento circular, vista superior, escalada en niveles de gris.....	64
4.21	Perfil en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con parámetros: $p + q = 240$ .....	64
4.22	Objeto de prueba degradado por movimiento circular para a) $x(t) = 3\cos(5t)$ , $y(t) = 3\cos(5t)$ , b) $x(t) = 6\cos(5t)$ , $y(t) = 6\cos(5t)$ , c) $x(t) = 3\cos(10t)$ , $y(t) = 3\cos(10t)$ y d) $x(t) = 6\cos(10t)$ , $y(t) = 6\cos(10t)$ .....	65
4.23	Movimiento elíptico $\omega_1 = \omega_2 = 10$ , $D_1 = 3$ $D_2 = 2$ , $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .....	66
4.24	MTF para la función de movimiento elíptico con parámetros: $p = q = 80$ .....	66
4.25	MTF del movimiento elíptico, vista superior, escalada en niveles de gris.....	67
4.26	Perfil $X$ en una dimensión de la MTF para el movimiento elíptico, con parámetros: $p = q = 80$ .....	67
4.27	Perfil $Y$ en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con parámetros: $p = q = 80$ .....	68
4.28	Objeto de prueba degradado por movimiento elíptico para a) $x(t) = 3\cos(10t)$ , $y(t) = 2\cos(10t)$ , b) $x(t) = 6\cos(10t)$ , $y(t) = 2\cos(10t)$ , c) $x(t) = 3\cos(10t)$ , $y(t) = 4\cos(10t)$ y d) $x(t) = 6\cos(15t)$ , $y(t) = 2\cos(15t)$ .....	69

5.1	Esquema de una secuencia formada por N imágenes.....	72
5.2	Diagrama del sistema óptico – digital y del sistema de simulación de movimiento lineal, utilizado para la realización del experimento.....	74
5.3	Función de movimiento lineal experimental. Cada punto de la gráfica corresponde a la posición $x(t)$ del centroide del objeto que se mueve sobre el riel a velocidad constante.....	74
5.4	Sistema de movimiento vibratorio.....	75
5.5	Sistema vibratorio. Bocina, amplificador, generador de señales, anillo de LEDs, lente zoom, cámara de CCD y computadora con frame grabber.....	76
5.6	Movimiento vibratorio experimental de alta frecuencia en una dimensión. Cada punto es la posición del centroide del objeto.....	76
5.7	Esquema del sistema montado para la simulación del movimiento en dos dimensiones. Computadora, controlador universal y bases mecánicas.....	77
5.8	Imagen capturada durante la simulación del movimiento en dos dimensiones. Bases mecánicas para rotación y desplazamiento.....	78
5.9	Interfaz gráfica del programa utilizado para la manipulación y captura de los movimientos.....	79
5.10	Secuencia de imágenes para obtener la función de movimiento. Al rotar la base, el objeto puntual se mueve en forma circular.....	79
5.11	Movimiento rectilíneo experimental en un plano. Los ejes son funciones paramétricas del tiempo, con las posiciones resultantes del centroide del objeto.....	80
5.12	MTF experimental, para la función de movimiento rectilíneo graficada en la Figura 5.10 con orden $p + q = 224$ .....	81
5.13	Mapa de intensidades de la MTF para el movimiento rectilíneo experimental.....	81

5.14	Perfil $X$ para el movimiento rectilíneo experimental con orden $p + q = 224$ .....	82
5.15	Centroide de un objeto con movimiento circular. Datos obtenidos experimentalmente.....	83
5.16	MTF experimental para la función de movimiento circular con orden $p + q = 226$ .....	83
5.17	MTF experimental, mapa de intensidades para el movimiento circular.....	84
5.18	Perfil $X$ de la MTF obtenida para el movimiento circular experimental con orden $p + q = 226$ .....	84
5.19	Movimiento elíptico experimental.....	85
5.20	MTF para el movimiento elíptico experimental.....	86
5.21	MTF experimental, mapa de intensidades del movimiento elíptico.....	86
5.22	Perfil $X$ en una dimensión de la MTF obtenida para el movimiento elíptico experimental.....	87
5.23	Perfil $Y$ en una dimensión de la MTF obtenida para el movimiento elíptico experimental.....	87
5.24	Imagen del sello de la botella con defectos.....	88
5.25	Fotografía del sistema óptico y de movimiento circular.....	89
5.26	Vista superior del sistema.....	89
5.27	Vista lateral y vista superior de una botella que presenta una grieta.....	90
5.28	Trayectorias circulares obtenidas a 3 velocidades radiales diferentes.....	90
5.29	Resultados para $\omega_1$ . a) MTF en dos dimensiones, b) Mapa de intensidades, c) Perfil en $X$ de la MTF y d) Perfil en $Y$ de la MTF.....	91
5.30	Resultados para $\omega_2$ . a) MTF en dos dimensiones, b) Mapa de intensidades, c) Perfil en $X$ de la MTF y d) Perfil en $Y$ de la MTF.....	92

5.31	Resultados para $\omega_3$ . a) MTF en dos dimensiones, b) Mapa de intensidades, c) Perfil en $X$ de la MTF y d) Perfil en $Y$ de la MTF.....	93
5.32	Perfil en $X$ de la MTF para las 3 velocidades radiales diferentes.....	96
5.33	Perfil en $Y$ de la MTF para las 3 velocidades radiales diferentes.....	96

## Índice de Tablas

Tabla I.	Figuras de Lissajous, generadas por dos movimientos vibratorios .....	24
Tabla II.	Funciones de Transferencia en Modulación para distintas trayectorias	69
Tabla III.	Especificaciones de la Cámara CCD.....	72
Tabla IV.	Comparación entre los resultados obtenidos para los movimientos simulados y los movimientos experimentales.....	94





# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Desde el inicio en el empleo de lentes en las diferentes actividades del ser humano y sin importar la complejidad del diseño, se ha buscado un método para evaluar la calidad de un sistema óptico, esto con la finalidad de obtener la mayor calidad posible en las imágenes formadas por el sistema. Con este fin, se han desarrollado diferentes técnicas tanto cualitativas como cuantitativas para medir características como el contraste, la distorsión y la resolución de un sistema óptico, en esta última característica se consideran dos enfoques principales ó métodos de estudio, el primero que abarca las aberraciones de las ópticas y que a través de la corrección de estas mejora la calidad del sistema. Un segundo enfoque se hace analizado el sistema óptico como un todo sin importar sí el sistema esta aberrado o no, este enfoque se basa en el estudio de la Función de Transferencia Óptica, que a su vez brinda información de la Función de Transferencia en Modulación la cual es una medida cuantitativa de la capacidad de resolución del sistema.

En las distintas áreas en que se utilizan los sistemas ópticos se presenta la necesidad de calcular la función de transferencia con el fin de medir, comparar y determinar el uso o la utilidad de los diversos instrumentos ópticos bajo diferentes condiciones y aplicaciones.

Aunado a las características del sistema óptico, hay otros factores que influyen en la calidad de la imagen obtenida, tales como la iluminación, la geometría de los objetos capturados, la temperatura de los sensores, la turbulencia atmosférica, ó la existencia de algún tipo de movimiento ya sea en el sensor o en el objeto. Siendo esta última una de las principales causas de distorsión en las imágenes sobre todo en áreas como la industrial, donde el movimiento mecánico se presenta frecuentemente. La naturaleza del movimiento puede generar funciones de movimiento unidimensionales, como el movimiento lineal ó el vibratorio, o bien movimientos bidimensionales, tales como el movimiento circular ó elíptico.

A través de una secuencia de imágenes es posible obtener la función de movimiento existente entre el objeto y el sensor. Un método para lograrlo es calcular el centroide de cada una de las imágenes de la secuencia y graficar esta información. En la presente tesis se utiliza el método de momentos para obtener la Función de Transferencia Óptica a través de la función de movimiento de un objeto de prueba. Esto con el fin de medir la resolución de los sistemas ópticos utilizados para la captura de objetos en movimiento.

## **1.1 Antecedentes**

La Función de Transferencia Óptica (OTF) se ha convertido en la herramienta más importante para evaluar la calidad de un sistema óptico, esta contiene información de la amplitud y la fase en la imagen relativa a la amplitud y fase del objeto, aunque el concepto se desarrollo lentamente, hoy en día es aceptada como un criterio general para caracterizar la calidad de un sistema óptico.

Históricamente, las primeras aportaciones datan de 1835, cuando Airy, desarrolló la fórmula para el patrón de difracción de un punto, a través de un lente sin aberraciones conocida hasta ahora como el disco de Airy [1]. Aunque desde 1818, Fresnel había desarrollado la teoría de difracción de ondas escalares, los diseñadores ópticos fueron reacios a la utilización de la aplicación de la teoría ondulatoria, hecho que retrasó la aparición de las técnicas de la OTF. Actualmente la OTF es una herramienta muy útil para refinar resultados durante la etapa de optimización del diseño, ya que su potencial es mayor que otros métodos como el trazado de rayos o las cartas de barras (como el USAF 1951), utilizados en óptica geométrica.

De 1850 a 1940, se establecieron los conceptos básicos que dieron lugar a la OTF. Foucault propuso que un objeto extenso periódico sería mejor que un solo punto para probar un sistema óptico. Abbe introdujo el concepto de frecuencia espacial y fueron desarrolladas las teorías de aberraciones geométricas y difracción. Rayleigh formuló el criterio de un cuarto de longitud de onda para la evaluación del límite difraccional [2], Strehl realizó estudios acerca de las modificaciones que generan las aberraciones al disco de Airy [6] y Maréchal, sobre el frente de onda, mostró que la pérdida de intensidad en el foco difraccional tiene una relación con la varianza del frente de ondas respecto a una forma esférica [8].

Para los años treinta Wright y Frieser [3], sugieren por primera vez el uso de la Función de Transferencia Óptica. Sumado a este hecho, la aparición de importantes teorías matemáticas como las teorías de las transformadas. Principalmente el método de la Transformada de Fourier, se comienzan a utilizar en la óptica, aprovechando sus propiedades sobre todo en el teorema de convolución, simplificando con esto muchísimos tratamientos matemáticos. La transformada de Fourier fue extendida a dos dimensiones y aplicada sobre "frecuencias espaciales".

Se introduce ahora el concepto de respuesta al impulso, que se refiere a la capacidad de un sistema para distinguir dos objetos que están muy juntos, resulta que la función imagen en términos de sus coordenadas espaciales es la convolución de la función objeto y la función de respuesta al impulso [4]. Se puede entonces

definir de una manera sencilla a la OTF, como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema óptico [5].

Para los años cuarenta se dan las primeras aplicaciones de la OTF, durante la segunda guerra mundial, para la caracterización de lentes y películas fotográficas. Para los cincuentas se amplía su uso para evaluar la calidad de la imagen en las primeras televisiones. Se dan los primeros estudios teóricos relacionando los efectos de la difracción en la aberración del frente de onda. Más tarde, Hopkins desarrolla estudios sobre las aberraciones y comienzan estudios específicos relacionando la transformada de Fourier con la OTF [4].

Después de la segunda mitad de la década de los cincuentas se da un importante avance en el estudio de la OTF, tanto en publicaciones como en instrumentación. Llegando a importantes conclusiones como [6]:

- La aproximación mediante la OTF, requiere de objetos extensos.
- Las medidas en tiempo real son posibles.
- Es viable medir un amplio rango de sistemas, desde limitados por difracción hasta muy aberrados.
- Durante el diseño se puede estimar la OTF del sistema.
- Dado un objeto, mediante análisis de Fourier se puede estimar la OTF necesaria para obtener una imagen de calidad aceptable.
- La naturaleza cuantitativa de la OTF, sumada a la capacidad de ser medida en tiempo real, la convierte en una importante herramienta para el diseño, especificación y fabricación de sistemas ópticos.

Pero también se presentan algunas dificultades como:

- Existen ciertas limitantes con respecto al rango de frecuencias espaciales a medir.
- Cuando la señal en el detector es muy baja a veces se confunde con la luz del ambiente.

- La iluminación debe ser completamente incoherente, cualquier grado de coherencia da lugar a resultados falseados.

El equipo necesario resultó en ese entonces ser mucho más elaborado de lo que al inicio se suponía. Pero para los años sesenta se introduce el concepto de Función de Transferencia en Modulación (MTF), es decir el modulo de la OTF, función que mide el contraste de la imagen en un objeto periódico, este concepto resulto tan familiar para los ingenieros eléctricos como para los Físicos ópticos que rápidamente hubo una importante aplicación de la MTF. Desafortunadamente, el uso de equipos inadecuados por parte de los Físicos Ópticos dio como resultado que se concluyera que el grado de exactitud de la MTF, no permitía que se usara para especificaciones o normas.

Sin embargo, la necesidad urgente de una medida confiable, reproducible y de un alto grado de exactitud para evaluar los sistemas ópticos asociados a televisión, microfilms y microcircuitos, propicio que se desarrollara tecnología para llevar a la MTF hasta un nivel suficiente. Para los setentas gracias al desarrollo de los ordenadores y de algoritmos para el cálculo de la transformada de Fourier y de las integrales de correlación, la MTF fue generalmente aceptada. Esto facilitó el estudio de nuevas técnicas y el mejoramiento de las ya existentes. El problema ahora que se tenía una medida clara de la calidad de un sistema óptico, era definir las causas.

Para la década de los ochentas el uso de la MTF se amplía a otros sistemas ópticos, la aceptación como medida de la calidad del sistema, hace que aparezca una gran cantidad de software de diseño óptico que incluye ya el cálculo de la OTF. En el ámbito teórico se utilizan herramientas como los polinomios de Zernike y nuevos algoritmos para el cálculo de la transformada de Fourier y se mejora el diseño de los equipos de medida de la OTF [6].

El conjunto de técnicas, cálculo e interpretación ha convertido a la MTF como la mejor forma de evaluar la calidad de un sistema óptico, ya que aporta una mayor

exactitud y una mejor comprensión de la calidad del sistema óptico. La MTF es perfectamente conocida y aceptada, y actualmente sigue el proceso para encontrar nuevas técnicas y métodos de cálculo para seguir ampliando su aplicación para caracterizar los sistemas ópticos considerando ahora no sólo al sistema óptico, *sí no incluyendo los factores que afectan el sensado y captura de los objetos.*

## **1.2 Objetivos**

El objetivo principal de ésta tesis es caracterizar un sistema óptico a través de la MTF, que resulta de una función de movimiento en dos dimensiones, utilizando el método de momentos. Teniendo como objetivos particulares los siguientes:

- Determinar los momentos geométricos para una función en una y dos dimensiones.
- Reproducir movimientos en el laboratorio en dos dimensiones, para adquirir imágenes que sigan estas trayectorias.
- Determinar la Función de Transferencia Óptica teórica y experimental de funciones de movimiento en una y dos dimensiones.
- Determinar la Función de Transferencia en Modulación que mide la resolución del sistema óptico a partir de las funciones de movimiento en una y dos dimensiones.

## **1.3 Estado del arte**

La aplicación de sistemas ópticos en diferentes áreas como optometría, astronomía, medicina, metrología, microscopía y fotografía, entre otras, requieren de sistemas de alta calidad tanto a nivel científico como industrial. Los avances tecnológicos y

matemáticos, han permitido que nuevos métodos y teorías sean aplicadas en la obtención de la OTF y de la MTF. Al unisonó otros métodos para medir la calidad de un sistema óptico, sobre todo durante la etapa de diseño han persistido como lo es la óptica geométrica en el área de aberraciones. Actualmente, son las dos vertientes más fuertes en cuanto a la evaluación de la calidad de un sistema óptico.

Sin embargo, a diferencia del estudio de las aberraciones que se limita a medir y corregir estas imperfecciones en las lentes, la MTF permite considerar y medir otras condiciones que afectan directamente la calidad de la imagen obtenida, tales como el ruido aportado por el sensor. En esta última área se han realizado estudios a través de diversas pruebas que en su mayoría utilizan rejillas sinusoidales, sin embargo los estudios sobre la obtención de la MTF han continuado con otros métodos para poder medir la distorsión provocada por el movimiento, en ésta área importantes aportaciones se ha realizado gracias al uso de métodos que usan los momentos de una imagen para caracterizar el movimiento.

## **1.4 Aportaciones**

En la presente tesis se amplía el uso del método de momentos al análisis de la distorsión por movimiento en dos dimensiones. Se analiza el movimiento como el resultado de dos movimientos vibratorios de tipo sinusoidal perpendiculares entre sí, que en sus diferentes combinaciones permiten generar movimientos como el lineal en un plano, el movimiento circular y elíptico, así como la familia de figuras de Lissajous, esto variando las amplitudes, frecuencias y diferencias de fase entre los dos movimientos vibratorios.

Se lleva a cabo el cálculo de la MTF en dos dimensiones para los casos de movimiento circular y elíptico, así como el lineal en un plano.

Dentro del campo de aplicación del método se realiza el seguimiento de defectos en el sello de botellas de PET, fabricadas con un método de inyección y soplado. Obteniendo la MTF experimental a partir de las imágenes capturadas.



# CAPÍTULO 2

## FUNCIONES DE TRAYECTORIA

### 2.1 Introducción

Suponga un proyectil que se dispara a una velocidad inicial  $\vec{v}_0$  con un ángulo  $\theta$  determinado, la curva que describe el movimiento en el espacio de este proyectil es conocida como trayectoria, la función matemática que la representa es dependiente del tiempo, de la velocidad y de la aceleración del proyectil [7].

Sí se supone un sistema coordenado con tres ejes perpendiculares entre sí,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; y una partícula en movimiento, que durante el tiempo  $t$ , describe una trayectoria en el espacio. Considere que se conoce una ecuación de movimiento que al resolverse proporcionara información en todo momento  $t$  acerca de la posición ( $x$ ), la velocidad ( $\vec{v}$ ) y la aceleración ( $\vec{a}$ ) de la partícula. Por ahora solo se consideran los aspectos geométricos del movimiento.

Inicialmente, suponga que la partícula en estudio está limitada a moverse sólo a lo largo del eje  $x$ , entonces es posible conocer su posición en todo instante  $t$ , a través de la distancia  $x$  entre el origen y la partícula, y al existir un valor definido para  $x$ , en cada instante  $t$ , se puede decir que  $x$ , es una variable dependiente de  $t$ , esto permite obtener una representación gráfica del movimiento.

La velocidad media  $\vec{v}_x$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  puede obtenerse determinando la distancia  $\Delta x$  que recorre la partícula en ese intervalo, y observando que

$$\vec{v}_x = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{int.de tiempo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

de donde se obtiene la rapidez instantánea  $v_x$  asociada a un instante  $t$ , y se define como sigue:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.2)$$

Del mismo modo es posible obtener el valor de la aceleración,  $\vec{a}_x$  definiéndola como la razón de cambio de la velocidad instantánea en un instante de tiempo  $\Delta t$ . Considerando ahora que  $\Delta t$  tiende a cero, se obtiene la ecuación,

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.3)$$

En el tiempo  $t$ , la partícula estará en algún punto P, cuyas coordenadas espaciales son  $(x, y, z)$  las cuales describen un desplazamiento con respecto al origen, mediante un vector de posición  $\vec{r}$ , cuyas componentes son  $x, y, z$  y esta denotado por,

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.4)$$

en el tiempo  $(t + \Delta t)$ , la partícula se habrá desplazado a lo largo de su trayectoria hasta un punto Q, con coordenadas  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . El vector de posición  $(\vec{r} + \Delta\vec{r})$  asociado a Q es,

$$\vec{r} + \overline{\Delta\vec{r}} = (x + \Delta x)\hat{i} + (y + \Delta y)\hat{j} + (z + \Delta z)\hat{k}. \quad (2.5)$$

De la misma forma, la velocidad media se puede expresar como el vector  $\vec{v} = \overline{\Delta\vec{r}}/\Delta t$ , y puede ser escrita como,

$$\vec{v} = \frac{\overline{\Delta\vec{r}}}{\Delta t} = \frac{(\vec{r} + \overline{\Delta\vec{r}}) - \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{j} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\hat{k}, \quad (2.6)$$

de la cual se obtiene la velocidad instantánea  $\vec{v}$ , como el vector que expresa el valor del límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, que es la definición de la derivada, considerando esto, es sabido entonces que la velocidad instantánea puede ser expresada como un vector cuyas componentes en  $x, y, z$  son,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad (2.7a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad (2.7b)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.7c)$$

La dirección de este vector es la dirección de la partícula que se mueve desde Q hacia P, que a su vez es la misma dirección de la tangente a la trayectoria en el punto P.

Aplicando el mismo tratamiento a la aceleración, se define que la aceleración instantánea es un vector con componentes,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.8a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (2.8a)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.8a)$$

La dirección del vector aceleración es la del vector  $d\vec{v}$ , que representa el cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo infinitesimal, cuya dirección no es necesariamente igual que la del vector velocidad  $\vec{v}$ , generalmente no es igual.

Al estudiar diferentes funciones de movimiento, se obtienen diferentes geometrías de sus trayectorias, en las Figuras 2.1 a 2.4 se ejemplifican algunas:

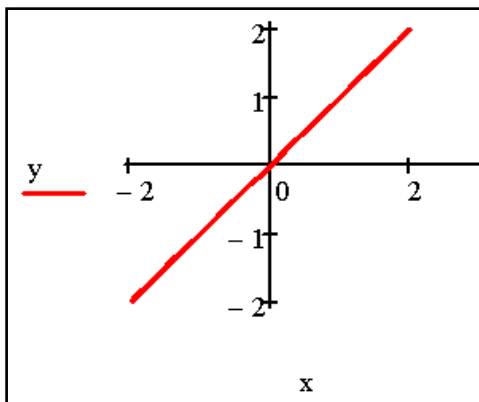


Figura 2.1 Movimiento rectilíneo,  $\frac{dx}{dt} = v$ , donde  $v$  es la pendiente de la recta.

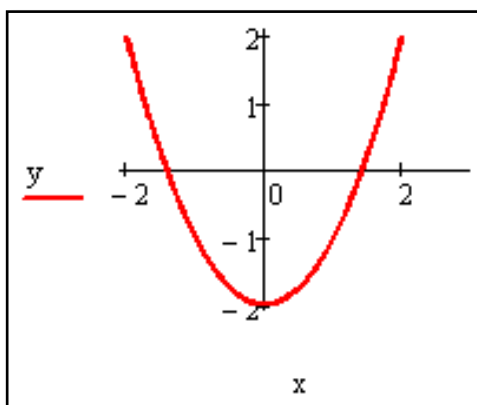


Figura 2.2 Movimiento parabólico,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = v_{0x}\hat{i} + (-gv_{0y})\hat{j}$ , donde  $\vec{r}$  es el vector de posición de la partícula.

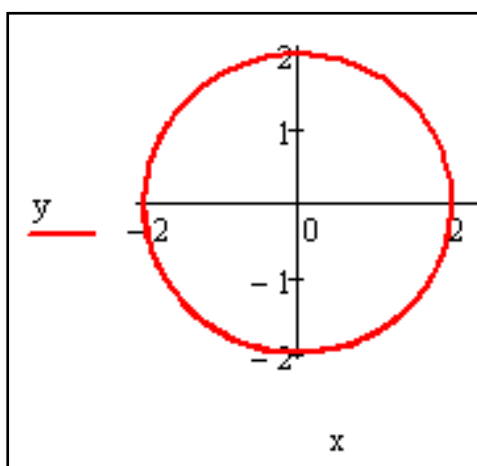


Figura 2.3 Movimiento circular,  $\vec{r} = [R \cos(\theta), R \sin(\theta)]$ , donde  $\vec{r} = (r \cos \theta)\hat{i} + (r \sin \theta)\hat{j}$  es el vector de posición de la partícula.

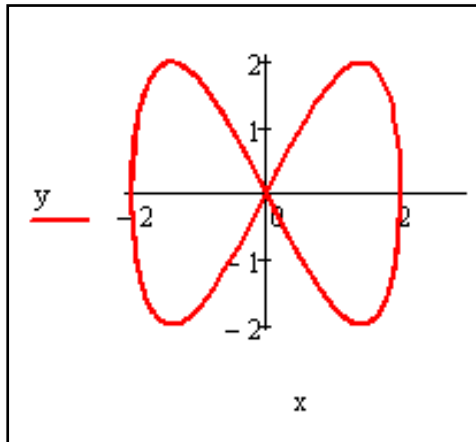


Figura 2.4 Movimiento vibratorio en dos dimensiones para  $x = \text{sen}(t)$  e  $y = \text{sen}(2t)$

Para poder graficar estas trayectorias es necesario colocar parámetros a las funciones, mismos que serán independientes y permitirán obtener la posición de la partícula en el tiempo  $t$ .

## 2.2 Parametrización de una trayectoria

La geometría que presenta la trayectoria de una partícula es independiente de la velocidad con que se recorre. Sin embargo, para poder representar la superficie o curva en el plano o en el espacio es necesario identificar los puntos que componen la trayectoria, esto se consigue a través de la asignación de parámetros independientes de cuyos valores se desprende la variable dependiente, mismas como la posición, velocidad o la ubicación de la partícula en un tiempo  $t$  determinado.

Es conveniente dejar la parametrización en términos de una sola variable, por ejemplo para parametrizar una trayectoria circular, el parámetro más conveniente es el ángulo  $\theta$ , formado entre el vector de posición y el eje cartesiano. Sin ser necesario que esta sea función del tiempo. Esto último es conveniente cuando se tiene el caso en que dos o más trayectorias presentan geometrías iguales en sus trayectorias.

Pero sí son recorridas con diferentes velocidades, es recomendable entonces utilizar la parametrización natural. Que consiste en etiquetar cada punto de la trayectoria con la distancia  $s$  (sobre la curva) desde un punto de referencia

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad (2.9)$$

la parametrización natural es única para cada trayectoria, salvo la dirección con que se recorre dicha trayectoria, donde la variable  $s$ , es conocida como parámetro natural o parámetro arco, que permite medir la distancia sobre la curva. Para medir esta distancia se descompone la curva en trozos rectilíneos de longitud diferencial,

$$ds = |\overrightarrow{dr}|, \quad (2.10)$$

de forma que, integrando se puede obtener el valor de  $s$ , en un punto de la curva

$$s = s_0 + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} |\overrightarrow{dr}|. \quad (2.11)$$

## 2.3 Ejemplos de trayectorias

Ya se ha mencionado que la trayectoria es la línea formada por las diferentes posiciones que ocupa una partícula en el espacio, de forma tal que permite poder clasificar el movimiento que sigue la partícula a partir de la geometría descriptora. De estas posiciones, es posible hacer una primera clasificación en: movimientos en una, dos o tres dimensiones, siendo gráficas características las líneas rectas, líneas curvas planas y curvas no planas respectivamente.

Es posible señalar el tipo de movimiento al que se hace referencia de acuerdo a parámetros como: velocidad, aceleración, dirección, fuerzas centrales, entre otros. Estos parámetros modelan las características geométricas de la trayectoria del movimiento. Así, un movimiento en el que no se aplica una aceleración, tendrá como

resultado una trayectoria descrita por una línea recta. Existen formas que describen movimientos que se presentan más comúnmente, estos son descritos a continuación.

### 2.3.1 Movimiento circular. *Rotación*

Todos los cuerpos se mueven en línea recta con rapidez constante y mantendrán inalterada esta condición hasta que se aplique una fuerza externa que la modifique. La velocidad de un cuerpo es una cantidad vectorial definida por su rapidez y su dirección, al igual que se requiere una fuerza resultante para cambiar su rapidez, hay que aplicar una fuerza resultante para cambiar su dirección original de movimiento. Siempre que esa fuerza actúa en una dirección diferente de la dirección original del movimiento, ocasiona un *cambio* en la trayectoria de la partícula en movimiento.

En el movimiento rotacional, un cuerpo gira alrededor de un eje de rotación fijo, para representar este movimiento es necesario introducir conceptos como, desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular, y estudiar el movimiento en función de estos parámetros.

Para el caso del movimiento circular, la aceleración ya no se considera una constante. La Figura 2.5 muestra la posición de una partícula que se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj, en una circunferencia de radio  $r$ , situada en el plano  $x, y$ . En el tiempo  $t$ , el vector de desplazamiento  $\vec{r}$ , describe la posición instantánea de la partícula, y las componentes cartesianas del mismo son  $x$  y  $y$ . En función de estas componentes se puede expresar  $\vec{r}$ , como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (r \cos \theta)\hat{i} + (r \sin \theta)\hat{j}, \quad (2.12)$$

donde  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  son los vectores unitarios cartesianos usualmente utilizados.

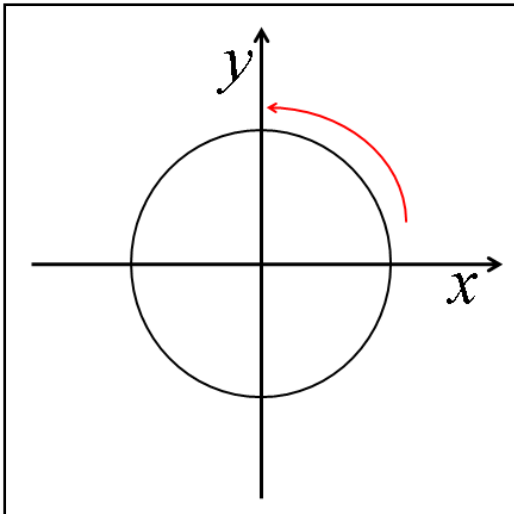


Figura 2.5 Movimiento de una partícula que sigue una trayectoria circular

### 2.3.2 Cicloide

Supóngase un círculo, de radio  $b$ , que se hace rodar, sobre una línea recta. Se define a la cicloide como la curva que traza uno de los puntos del plano del movimiento del círculo. Su estudio se remonta a 1634, y ha sido motivo de ocupación para científicos como: Pascal, Galileo, Descartes, Roberval y Torricelli, estos últimos lograron probar el cálculo del área bajo la curva,  $3\pi r^2$  que dedujo Galileo, pero que no pudo demostrar en su tiempo.

Las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de la cicloide, están definidas como sigue

$$x(t) = bt - b \operatorname{sen}(t) = b[t - \operatorname{sen}(t)], \quad (2.13a)$$

$$y(t) = b - b \operatorname{cos}(t) = b[1 - \operatorname{cos}(t)]. \quad (2.13b)$$

Un ejemplo de este movimiento es la trayectoria que sigue la válvula de la llanta de una bicicleta al rodar. De la cual se obtiene una cicloide como la mostrada en la Figura 2.6.



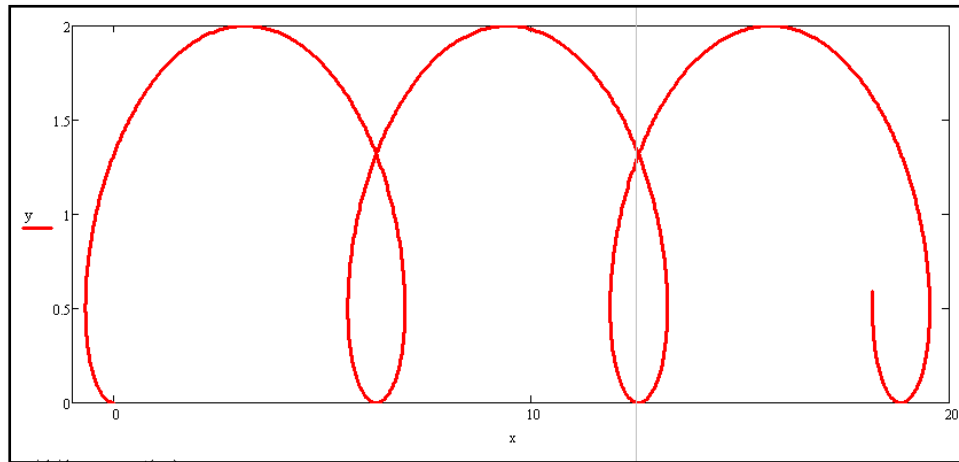


Figura 2.6 Cicloide ideal

### 2.3.3 Movimiento vibratorio en una dimensión

Se define el movimiento vibratorio como, el movimiento de un cuerpo o una partícula que oscila alrededor de una posición de equilibrio, siendo importante diferenciar entre la oscilación y la vibración, ya que la primera presenta amplitudes mayores, y la segunda frecuencias mayores.

El movimiento vibratorio más simple, es el Movimiento Vibratorio Armónico Simple (M.A.S.) que puede ser definido como el movimiento que resulta de proyectar un movimiento circular uniforme sobre uno de los ejes de la trayectoria. Para el estudio de la vibración es necesario considerar conceptos tales como: amplitud, fase inicial, período y frecuencia.

La vibración mecánica, en una sola dimensión ésta definida por la ecuación

$$x(t) = A \text{ sen } (\omega t), \quad (2.14a)$$

$$y(t) = 0, \quad (2.14b)$$

donde  $A$ , es la amplitud y  $\omega$  la frecuencia.

### 2.3.4 Movimiento vibratorio en dos dimensiones

Suponga una partícula que puede realizar vibraciones tanto a lo largo del eje  $x$ , como a lo largo del eje  $y$ , perpendiculares entre sí. Si excitamos ambas vibraciones, la partícula se moverá por una trayectoria curvilínea cuya forma dependerá de la diferencia de fases entre los dos movimientos [8].

Considerando el comienzo del registro del tiempo de modo que la fase inicial de la primera vibración sea cero. Las ecuaciones de vibración se definen del siguiente modo

$$x = A \cos(\omega t), \quad (2.15a)$$

$$y = B \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.15b)$$

donde  $\alpha$  es la diferencia de fase de ambas vibraciones, y  $A$  y  $B$  son respectivamente las amplitudes en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Las Ecs. (2.15a y 2.15b) definen la trayectoria en forma paramétrica de una partícula que se mueve debido a dos vibraciones perpendiculares entre sí, para obtener la trayectoria, es necesario quitar el parámetro  $t$ . Así se obtienen las Ecs.(2.16 y 2.17)

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}, \quad (2.16)$$

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (2.17)$$

Entonces, sustituyendo las Ecs. (2.16) y (2.17) en la Ec. (2.15), se tiene que

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \quad (2.18)$$

en donde se ha usado el hecho de que

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha,$$

y

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}.$$

Elevando al cuadrado la Ec. (2.18), se obtiene la Ec. (2.19)

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (2.19)$$

La cual describe una elipse, cuyos ejes están girando respecto a los ejes coordenados, la orientación de la elipse y el valor de sus semiejes, dependen entonces de las amplitudes y del valor de  $\alpha$ .

Partiendo de la Ec. (2.19) se pueden establecer diferentes trayectorias, cambiando los valores de la fase inicial  $\alpha$  y de las amplitudes  $A$  y  $B$ .

### 2.3.5 Diferentes trayectorias, casos particulares

**Caso I.** La diferencia de fases es nula ( $\alpha = 0$ ). Sustituyendo en la Ec. (2.19), se tiene

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0, \quad (2.20)$$

de la cual es posible obtener la ecuación de una recta, el movimiento descrito es una vibración armónica a lo largo de dicha recta. Con una frecuencia  $\omega$  y una amplitud igual a  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , se obtiene (Figura 2.7)

$$y = \frac{B}{A} x. \quad (2.21)$$

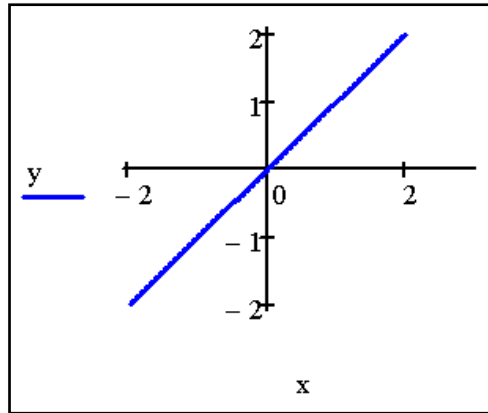


Figura 2.7 Movimiento lineal con  $v > 0$

**Caso II.** La diferencia de fases es  $\pi$  ( $\alpha = \pm\pi$ ). Partiendo de la misma ecuación, se tiene ahora que el movimiento descrito es una vibración armónica a lo largo de una recta (Figura 2.8), pero la función descriptora ahora es

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (2.22)$$

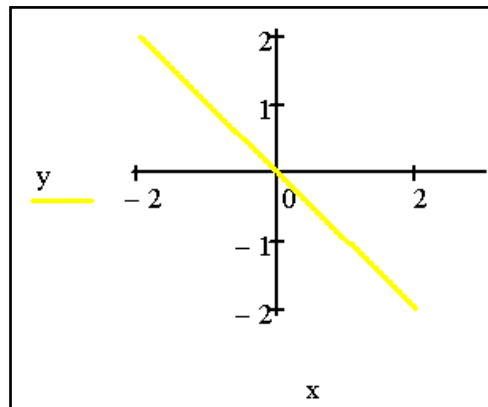


Figura 2.8 Movimiento lineal con  $v < 0$

**Caso III.** La diferencia de fase es igual a  $\pi/2$  ( $\alpha = \pm\pi/2$ ). La ecuación se convierte ahora en

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (2.23)$$

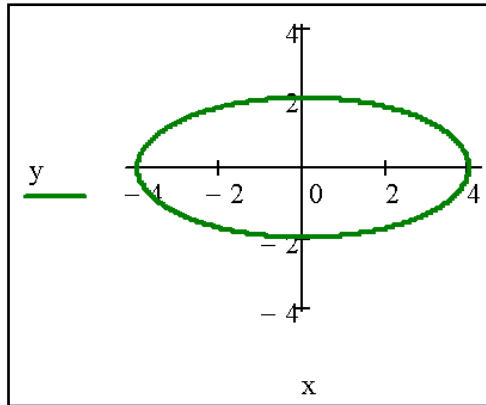


Figura 2.9 Movimiento elíptico con amplitudes,  $A = 4$  y  $B = 2$

La Ec. (2.23) describe una elipse (Figura 2.9) , en la cual los semiejes corresponden a las amplitudes de las vibraciones, cuando  $A = B$ , se genera una circunferencia (Figura 2.10), para el caso donde  $\alpha = +\pi/2$ , las ecuaciones de movimiento pueden ser descritas por las Ecs. (2.24 a y 2.24b)

$$x = A \cos \omega t, \quad (2.24a)$$

$$y = -B \sin \omega t, \quad (2.24b)$$

en donde el movimiento transcurre en un sentido horario.

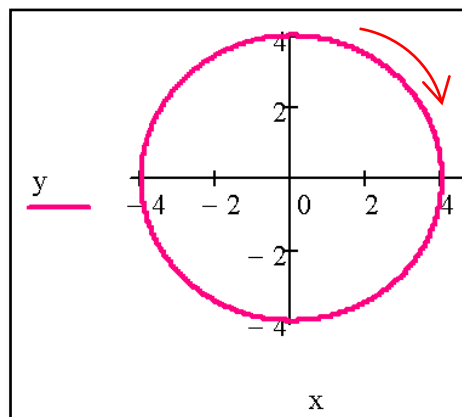


Figura 2.10 Movimiento circular en sentido horario

Para  $\alpha = -\pi/2$ , las ecuaciones, se ven afectadas en el sentido que sigue el movimiento, como se muestra en las Ecs. (2.25a y 2.25b)

$$x = A \cos \omega t, \quad (2.25a)$$

$$y = B \sen \omega t, \quad (2.25b)$$

el movimiento ahora se realiza en sentido antihorario (Figura 2.11).

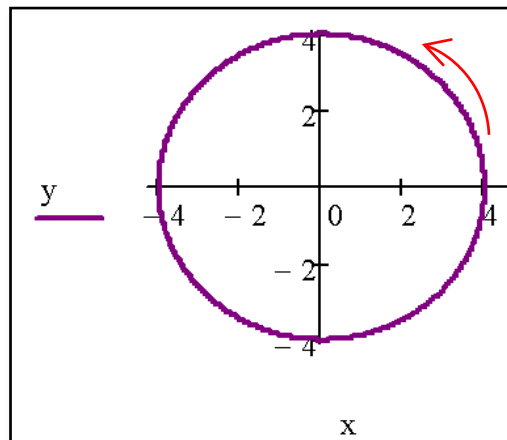


Figura 2.11 Movimiento circular en sentido antihorario

De lo anterior, se llega al movimiento uniforme para una circunferencia de radio  $R$  y velocidad angular  $\omega$ , que puede ser representada como la suma de dos vibraciones perpendiculares entre sí [Ecs. (2.26a y 2.26b)]

$$x = R \cos \omega t, \quad (2.26a)$$

$$y = \pm R \sen \omega t. \quad (2.26b)$$

Correspondiendo el signo en  $y$ , al sentido del movimiento.

**Caso IV.** Cuando la diferencia de las frecuencias de las vibraciones, es de una pequeña magnitud  $\Delta\omega$ , es posible considerarlas de igual frecuencia, pero cuando la

diferencia de fases varia lentamente, las ecuaciones de las vibraciones pueden ser escritas como sigue

$$x = A \cos \omega t, \quad (2.27a)$$

$$y = B \cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)], \quad (2.27b)$$

donde  $(\Delta\omega t + \alpha)$  es la diferencia de fases que va cambiando lentamente en el tiempo, y de forma lineal. En este caso, el movimiento resultante dibujara una trayectoria curvilinea, que cambia de tipo lentamente y que consecutivamente toma la forma correspondientes a los valores de la diferencia de fases desde  $-\pi$  hasta  $+\pi$ . Sí las frecuencias de las vibraciones no son iguales, el movimiento presentara una trayectoria con curvas que reciben el nombre de *figuras de Lissajous*, las vibraciones que generan estas trayectorias estan descritas por las siguientes ecuaciones

$$x = A \cos \omega t, \quad (2.28a)$$

$$y = B \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.28b)$$

Cambiando los parametros, es posible obtener diferentes trayectorias, como las gráficasadas en la Tabla I.

Mientras mas cerca de la unidad se halle la razon entre las frecuencias de las vibraciones, más complicada será la figura de Lissajous.

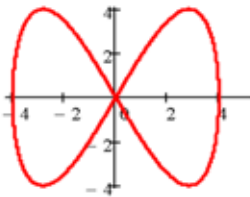
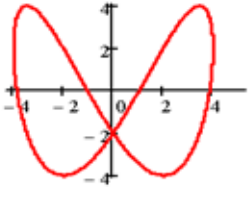
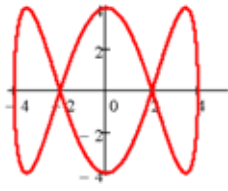
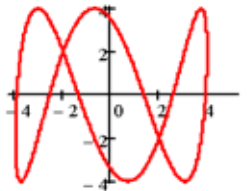
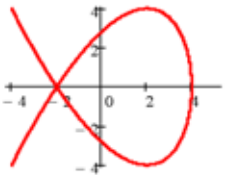
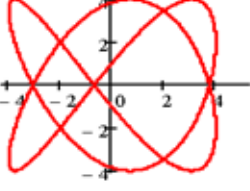
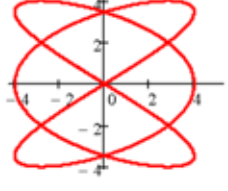
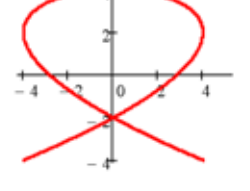
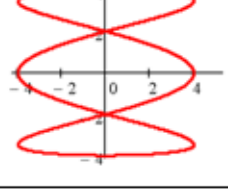
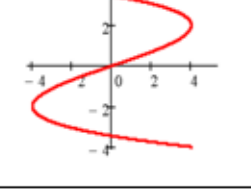
$\omega_1$	$\omega_2$	$\varphi = -\pi/2$	$\varphi = -\pi/3$
1	2		
1	3		
2	3		
3	2		
3	1		

Tabla I. Figuras de Lissajous, generadas por dos movimientos vibratorios

En el siguiente capítulo se calculan los momentos geométricos de algunas de las trayectorias estudiadas aquí. Esto con el fin de encontrar un método cuantitativo que permita medir la calidad de sistema óptico, en términos de su *MTF*. La cual suele ser función de la borrosidad provocada por el movimiento mecánico entre el sensor de una cámara y su imagen.



# **CAPÍTULO 3**

## **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA**

## **ÓPTICA PARA TRAYECTORIAS EN UNA DIMENSION**

### **3.1 Introducción**

En este capítulo se revisa la teoría correspondiente a la Función de Transferencia Óptica (*OTF*) como una medida cuantitativa de la resolución de un sistema óptico. Se estudiará el hecho de que la *OTF* se modifica por el movimiento relativo entre el sensor de captura y la imagen del objeto.

Se hará una revisión con enfoque unidimensional usando la teoría de momentos geométricos para ciertas trayectorias de tipo lineal y sinusoidal.

### 3.2 OTF y MTF en un sistema óptico incoherente. Breve Revisión

En algunos tratados se ha considerado a la formación de imágenes en términos de la convolución de la intensidad de la respuesta al impulso (intensidad del patrón de difracción) con la distribución de intensidad de un objeto iluminado con luz incoherente. Este enfoque de la formación de imágenes, es correcto y usualmente utilizado, aunque es a menudo difícil de aplicar [18]. Un enfoque alternativo, que simplifica la solución de muchos problemas y es adecuado para objetos complicados, es el análisis de la función de transferencia. Se desarrolla en esta tesis el análisis a través de ejemplos. Para minimizar la complejidad matemática se limita el análisis a una dimensión.

#### 3.2.1 Imagen de una distribución sinusoidal. Caso estático

Considere un objeto con distribución de intensidad  $I_{ob}(x')$  la cual consiste en una variación sinusoidal, descrito en la Figura 3.1 y dado por

$$I_{ob}(\xi) = 1 + a \cos 2\pi f_e \xi, \quad (3.1)$$

donde  $a$  es la amplitud de la función coseno,  $f_e$  es su frecuencia espacial, y  $x'$  la posición [9].

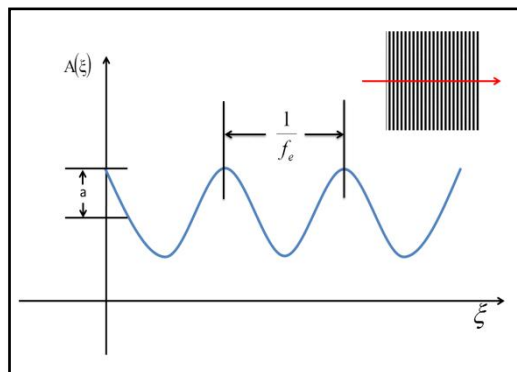


Figura 3.1 Distribución de un objeto sinusoidal

La visibilidad de una distribución de intensidad se define como

$$visibilidad = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \equiv V, \quad (3.2)$$

La cual en este ejemplo es  $a$ . Asuma que el objeto es iluminado con luz incoherente cuasimonocromática. La distribución de intensidad de la imagen esta dada por la Ec. (3.3). En la Figura 3.2 se muestra el Disco de Airy el cual es la imagen resultante de un pulso de luz después de pasar por un sistema óptico.

$$I_{im}(u) = \int I_{ob}(\xi) PSF(u - \xi) d\xi, \quad (3.3)$$



Figura 3.2 Disco de Airy

donde  $x$  es la posición coordenada de la imagen en el espacio, y  $PSF(x)$  es la intensidad de la Función de Punto Extendido. Sustituyendo la Ec. (3.1) en (3.3) la distribución de intensidad de la imagen es

$$I_{im}(u) = \int (1 + a \cos 2\pi f_e \xi) S(u - \xi) d\xi. \quad (3.4)$$

Al evaluar la Ec. (3.4), mediante el uso el teorema de convolución, el que se expresa como [Ec. (3.5a)]

$$g(u) = f(u) * h(u);$$

$$\int \tilde{g}(u) e^{-2\pi i \xi u} d\xi = \int [ \int \tilde{f}(u - \xi) \tilde{h}(\xi) d\xi ] e^{-2\pi i \xi u} d\xi, \quad (3.5a)$$

$$G(u) = F(u) OTF(u), \quad (3.5b)$$

y considerando que la transformada de una constante es una función delta, y que además la transformada de Fourier de una función coseno son dos funciones delta, se tiene entonces la distribución de intensidad esta dada por

$$I_{im}(u) = \int \left\{ \delta(\xi) + \frac{a}{2} [\delta(\xi - f_e) + \delta(\xi + f_e)] \right\} PSF(\xi) e^{-2\pi i \xi u} d\xi, \quad (3.6)$$

donde  $\mu$  corresponde a la coordenada en el espacio de frecuencias de Fourier. Usando las propiedades de la delta de Dirac, se evalúa la Ec. (3.6) y se obtiene

$$I_{im}(u) = OTF(0) + \frac{a}{2} [OTF(f_e) e^{2\pi i f_e u} + OTF(-f_e) e^{-2\pi i f_e u}]. \quad (3.7)$$

Considérese la identidad

$$OTF(u) = \int PSF(\xi) e^{-2\pi i \xi u} d\xi. \quad (3.8)$$

Aplicando el complejo conjugado en ambos lados de la Ec. (3.8) y recordando que  $PSF(x)$  es una función real, se tiene que

$$OTF^*(u) = \int PSF(\xi) e^{-2\pi i \xi u} du = OTF(-u), \quad (3.9)$$

donde el asterisco denota al complejo conjugado. Por lo tanto, los dos últimos términos de la derecha en la Ec. (3.7) son el complejo conjugado el uno del otro [9]. Entonces,

$$I_{im}(u) = OTF(0) + \frac{a}{2} [OTF(f_e) e^{2\pi i f_e u} + OTF^*(f_e) e^{-2\pi i f_e u}], \quad (3.10)$$

considerando la propiedad de los complejos conjugados

$$2\text{Re } z = z + \bar{z}, \quad (3.11)$$

se obtiene,

$$I_{im}(u) = OTF(0) + \frac{a}{2} \text{Re}[OTF(f_e) e^{2\pi i f_e u}], \quad (3.12)$$

donde  $\text{Re}$  es la parte real. Reescribiendo a  $OTF(\xi)$  en su forma polar

$$OTF(u) = |OTF(u)|e^{2\pi i\phi(u)}, \quad (3.13)$$

y considerando la identidad anterior se puede escribir a la Ec. (3.12) como

$$I_{im}(u) = OTF(0) + \left\{ 1 + a \frac{|OTF(f_e)|}{OTF(0)} \cos 2\pi[f_e u + \phi(f_e)] \right\}. \quad (3.14)$$

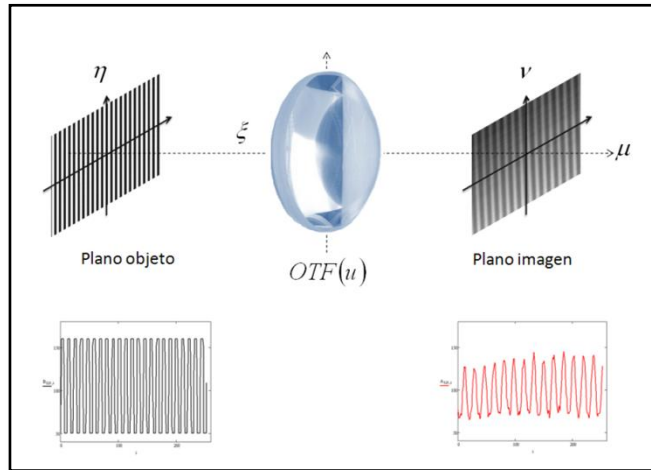


Figura 3.3 La visibilidad de la rejilla en el plano imagen cambia respecto al plano objeto, debido a  $OTF(u)$ .

Independientemente de la forma de la respuesta al impulso, la imagen de un coseno es un coseno de frecuencia similar, donde el contraste y la fase del coseno pueden ser afectadas por el sistema óptico, como se muestra en la Figura 3.4. La visibilidad en la imagen está dada por

$$V_i = a \frac{|OTF(f_e)|}{OTF(0)}, \quad (3.15)$$

mientras la visibilidad en el objeto fue  $V_0 = a$  [9]. La razón entre la visibilidad de la imagen y la visibilidad del objeto es el modulo de la función de transferencia óptica y esta dado por

$$MTF(f_e) = |OTF(f_e)| = \frac{V_i}{V_0} = \frac{|OTF(f_e)|}{OTF(0)}, \quad (3.16)$$

cuando el efecto de los cambios de la fase espacial se incluye, la función de transferencia óptica es una cantidad compleja

$$OTF(f_e) = \frac{|OTF(f_e)|}{OTF(0)} e^{i\phi(f_e)} = \frac{OTF(f_e)}{OTF(0)}. \quad (3.17)$$

La función fase  $\phi(f_e)$  es la fase que se produce en las Ecs. (3.13) y (3.14).

### 3.3 Momentos geométricos

Los momentos son características geométricas que se expresan numéricamente y contienen información de un objeto, tales como, área, orientación, escala y traslación. Aunque su uso más importante es el reconocimiento de la forma de una imagen, su aplicación en el procesamiento de imágenes abarca la codificación de información, la reconstrucción de una imagen, la determinación de la posición de un objeto dentro de la imagen, el análisis de textura y su estimación de movimiento [10].

Los momentos obtenidos de una imagen representan las características en las diferentes geometrías que la conforman, esta propiedad de los momentos ha permitido su amplia aplicación en áreas como el reconocimiento de patrones, la visión por computadora y la robótica.

Supóngase entonces, una imagen descrita por su distribución de intensidades en una matriz bidimensional, tal como  $f(x,y)$ , en donde el valor de la función  $f$  denota el valor de la intensidad en el pixel  $(x,y)$ .

Los momentos geométricos de los valores contenidos en cada pixel con respecto a su posición dentro de la matriz, brindan información tal como, el área de la imagen, las coordenadas del centroide y su orientación. Una vez obtenidas estas características, es posible representar vectorialmente estos descriptores. Hasta el momento sólo se está utilizando la información que se obtiene de los momentos de orden cero, los momentos de órdenes más altos brindan información mas detallada de la imagen, como las orillas, aunque también se ven más afectados por el ruido.

Se definen ahora los momentos geométricos  $m_{p,q}$  de orden  $p + q$  para una función continua

$$m_{p,q} = \iint_R x^p y^q f(x,y) dx dy, \quad (3.18)$$

donde  $R$  es la región en la que la función esta definida, para  $p, q = 0,1,2 \dots$  Esta definición puede variar en su representación dependiendo del tipo de base usada. Esto es, si la base esta expresada en coordenadas polares, la Ec. (3.1) discretizada se re-escribe como

$$m_{p,q} = \sum_{x=0}^M \sum_{y=0}^N x^p y^q f(x,y), \quad (3.19)$$

donde  $M \times N$  representa el tamaño de la matriz de datos de la imagen.

### 3.3.1 Momentos geométricos centrales

El centroide o centro de masa define el punto donde esta definido el centro geométrico de un objeto, y es una de las características más relevantes que se obtienen de los momentos, esto permite hacer una descripción de la imagen independiente de la posición o de la distribución que tenga el objeto, estos momentos pueden calcularse respecto del centro de gravedad mediante,

$$m_{p,q} = \sum_{x=0}^M \sum_{y=0}^N (x - x_0)^p (y - y_0)^q f(x,y), \quad (3.20)$$

y son conocidos como los momentos centrales de una imagen, y  $m_{0,0}$  representa la intensidad total de un sistema. Para el caso de imágenes binarias,  $m_{0,0}$  representa el área geométrica total.

Los momentos de primer orden  $m_{1,0}$  y  $m_{0,1}$  proporcionan información de las intensidades alrededor de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. La intensidad del centroide  $(x_0, y_0)$  esta dada entonces por las Ecs. (3.21a y 3.21b)

$$x_0 = m_{1,0}/m_{0,0}, \quad (3.21a)$$

$$y_0 = m_{0,1}/m_{0,0}. \quad (3.21b)$$

Para imágenes de “siluetas”, los puntos  $(x_0, y_0)$  proporcionan el centro geométrico de la imagen, es conveniente evaluar los momentos desplazando el centroide de la imagen, al origen del sistema de referencia. Esta transformación permite que el cómputo de los momentos sea independiente de la posición de la imagen con respecto al sistema. Estos momentos son llamados momentos centrales, y están definidos como

$$\mu_{p,q} = \iint_R (x - x_0)^p (y - y_0)^q f(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2 \dots \quad (3.22)$$

En la siguiente sección se muestran algunos ejemplos del uso de los momentos geométricos sobre funciones imagen discretas.

### 3.3.2 Ejemplos

Sea la imagen binaria  $f(x, y)$  de dimensiones  $256 \times 256$  pixeles, mostrada en la Figura 3.4.

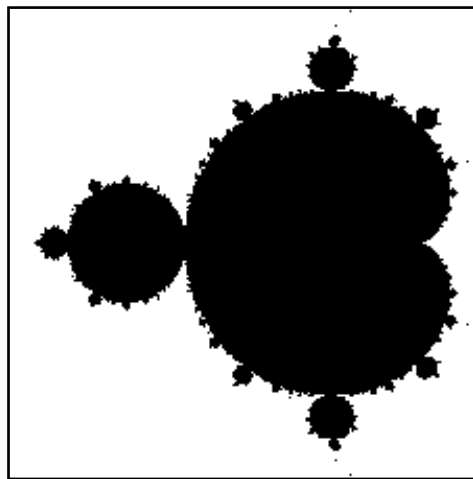


Figura 3.4 Imagen binaria de prueba del fractal de Julia de  $256 \times 256$  pixeles.



Sí aplica la Ec. (3.19), sobre  $f(x, y)$  y se obtienen los momentos de orden 2,

$$\text{Momentos geométricos} = \begin{pmatrix} 7.96 \times 10^6 & 7.745 \times 10^8 & 1.149 \times 10^{11} \\ 8.915 \times 10^8 & 8.674 \times 10^{10} & 1.287 \times 10^{13} \\ 1.467 \times 10^{11} & 1.467 \times 10^{13} & 2.176 \times 10^{15} \end{pmatrix}.$$

De los cuales se obtienen las coordenadas del centroide,

$$\text{Centroide} = (111.997 \quad , \quad 97.299)$$

A partir de los cuales se obtienen los momentos centrales, aplicando para ello la Ec. (3.20)

$$\text{Momentos centrales} = \begin{pmatrix} 7.96 \times 10^6 & 6.629 \times 10^{-7} & 3.955 \times 10^{10} \\ -3.474 \times 10^{-7} & -3.715 \times 10^6 & -2.961 \times 10^8 \\ 4.689 \times 10^{10} & 3.97 \times 10^{11} & 2.134 \times 10^{14} \end{pmatrix}.$$

Considérese ahora una imagen  $f(x, y)$  en niveles de gris, cuyas dimensiones son  $256 \times 256$  píxeles (Figura 3.5), al aplicar nuevamente la Ec. (3.19), para los momentos de orden 2 se calculan los momentos geométricos,



Figura 3.5 Imagen en niveles de gris de  $256 \times 256$  píxeles.

$$\text{Momentos geométricos} = \begin{pmatrix} 4.942 \times 10^6 & 5.358 \times 10^8 & 7.652 \times 10^{10} \\ 4.471 \times 10^8 & 4.967 \times 10^{10} & 7.175 \times 10^{12} \\ 5.889 \times 10^{10} & 6.555 \times 10^{12} & 9.427 \times 10^{14} \end{pmatrix}.$$

A partir de los cuales, se obtienen las coordenadas del centroide,

$$\text{Centroide} = (90.465 \quad , \quad 108.408).$$

Con estos datos, ahora se calculan los momentos centrales de la imagen, utilizando nuevamente la Ec. (3.20)

$$\text{Momentos centrales} = \begin{pmatrix} 4.942 \times 10^6 & 9.457 \times 10^{-8} & 1.844 \times 10^{10} \\ -1.63 \times 10^{-8} & 1.204 \times 10^9 & -8.777 \times 10^9 \\ 1.844 \times 10^{10} & -4.626 \times 10^{10} & 6.414 \times 10^{13} \end{pmatrix}.$$

Como se menciona anteriormente los momentos geométricos y centrales de una imagen permiten calcular características geométricas de los objetos inmersos en las imágenes digitales mostradas.

### **3.4 Momentos de una trayectoria en una dimensión y la OTF a partir de los momentos calculados**

Considere ahora un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria del tipo mostrada en el capítulo anterior. La trayectoria esta parametrizada y formada por  $N$  puntos, los cuales se representan por su función de trayectoria  $x(t)$ .

La información que describe al movimiento que presenta un objeto puede ser obtenida siguiendo el centroide de la imagen mediante una cámara CCD, el método de los momentos geométricos permite conocer la función de movimiento relativo  $x(t)$  entre el objeto y el sensor, así como otras características del movimiento, por ejemplo la PSF, la cual puede ser descrita como una medida de la degradación en el dominio espacial [11].

Sí el movimiento es en una dirección únicamente, es suficiente utilizar la función de línea extendida (LSF), esta se obtiene asemejándola a la función de Densidad de Probabilidad (PDF). Una explicación de este tratamiento es que el movimiento de la imagen causa la respuesta imagen de línea extendida del sistema

al moverse espacialmente. Los desplazamientos generados por el movimiento se integran durante el tiempo de exposición, este movimiento puede ser descrito por un histograma  $x(t)$ , donde la frecuencia de ocurrencia de una porción dada de  $x(t)$  se presenta como una función de  $x$  durante el tiempo de exposición. Por lo que, el histograma es la LSF [12], esto se puede ver en la Figura 3.6

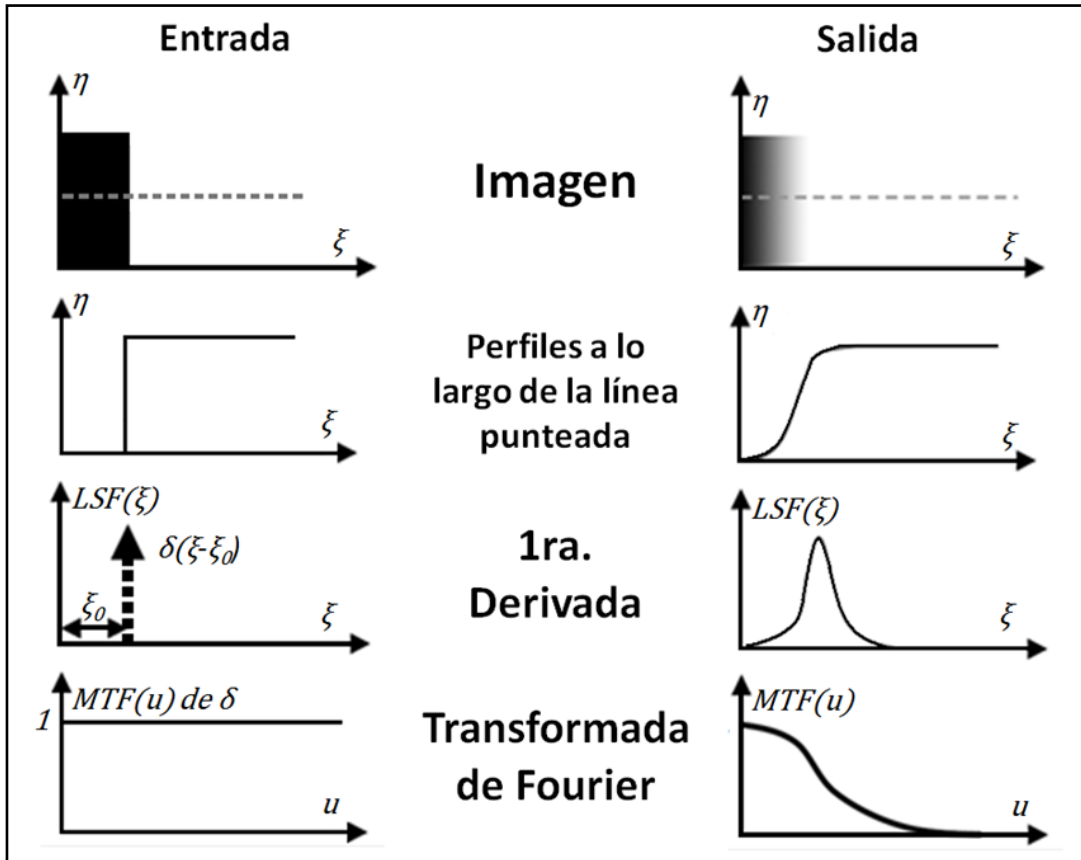


Fig. 3.6 Proceso de obtención de la MTF utilizando como entrada una Función Paso

La OTF está definida como la Transformada de Fourier de la LSF, como

$$OTF(\omega) = \mathcal{F}[LSF(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} LSF(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (3.23)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia espacial angular. La OTF contiene las frecuencias espaciales de una señal. La OTF es analítica y puede entonces expandirse en la forma de una serie de Taylor, como se muestra en la Ec. (3.24)

$$OTF(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n OTF(\omega)}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega=0} \omega^n, \quad (3.24)$$

la derivada  $n$  – ésima de la OTF en la frecuencia espacial cero, partiendo de la Ec. (3.23) está dada por la Ec. (3.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n OTF(\omega)}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega=0} &= \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} LSF(x) \exp(-i\omega x) dx \Big|_{\omega=0} \\ &= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n LSF(x) \exp(-i\omega x) dx \Big|_{\omega=0} \\ &= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n LSF(x) dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Donde la LSF es la Función de Densidad de Probabilidad del movimiento, es posible reconocer en la integral de la Ec. (3.25) la expresión del  $n$  – ésimo momento estadístico  $m_n$  del desplazamiento de la función  $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n LSF(x) dx = E(x^n) \triangleq m_n, \quad (3.26)$$

donde  $E(\cdot)$  es el valor esperado. Escribiendo la Ec. (3.26) por medio de la función de movimiento  $x(t)$  se tiene que

$$m_n = E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t) f_t(t) dt = \frac{1}{t_e} \int_{t_x}^{t_x+t_e} x^n(t) dt, \quad (3.27)$$

donde  $f_t = \frac{1}{t_e}$  es la PDF temporal y depende del tiempo de exposición  $t_e$ .

Entonces, a partir de las Ecs. (3.24), (3.25) y (3.27) se obtienen las Ecs. (3.28 y 3.29)

$$OTF(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (-i\omega)^n, \quad (3.28)$$

$$m_n = \frac{1}{t_e} \int_{t_x}^{t_x+t_e} x^n(t) dt. \quad (3.29)$$

Las Ecs. (3.28) y (3.29) definen una relación directa entre los momentos estadísticos de la función de movimiento y la OTF. Cuando la función de movimiento es conocida previamente y expresada analíticamente, los momentos pueden ser calculados y la OTF se puede obtener a partir de éstas ecuaciones. En muchos casos prácticos sólo muestras discretas de la función de movimiento están disponibles.

Sea  $\{x_i\}$  un conjunto de  $S(i = 1, \dots, S)$  muestras de la función de movimiento capturadas con un sensor dado. En este caso la Ec. (3.29) se reemplaza por

$$m_n = \frac{1}{S} \sum x_i^n. \quad (3.30)$$

Para el caso general, sobre todo cuando la función de movimiento no es dada analíticamente, es decir utilizando una función discretizada, formada por N muestras, la Función de Transferencia Óptica puede entonces calcularse sustituyendo la Ec. (3.30) se obtiene la Ec. (3.28).

La OTF, está formada por una parte real y una parte compleja, cada una de estas corresponden a las funciones conocidas como: Función de Transferencia en Modulación, MTF y Función de Transferencia en Fase, PSF [14] respectivamente. La MTF contiene la información real de la OTF, que es una importante herramienta matemática que permite medir la capacidad de resolución de un sistema óptico, la resolución se puede definir como la capacidad que tiene un sistema óptico para resolver o distinguir dos líneas a una determinada frecuencia espacial. Se define matemáticamente la MTF como el modulo de la OTF,

$$MTF(\omega) = |OTF(\omega)|, \quad (3.31)$$

En muchos casos la función de movimiento de la imagen puede ser aproximada a una función analítica. En la siguiente sección se hace mención de expresiones de la OTF utilizando el método de los momentos para algunos tipos de movimiento.

### 3.4.1 Ejemplo: movimiento lineal en una dimensión

Sí un objeto es sensado para instantes en que se mueve linealmente a una velocidad constante  $v$  como se muestra en la Figura 3.7, la función de desplazamiento está dada por la Ec. (3.32)

$$x(t) = vt, \quad t_x \leq t \leq t_x + t_e \quad (3.32)$$

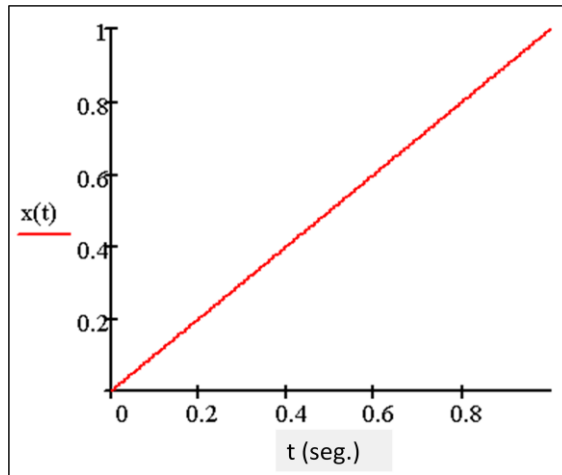


Figura 3.7 Función de movimiento del centro de masa del objeto en el tiempo, cuya trayectoria es lineal.

donde  $t_x$  es el instante de inicio de la exposición y  $t_e$  es el tiempo de exposición del sensor. El  $n$  – ésimo momento de la trayectoria se calcula a partir de la Ec. (3.29) y está dado como [Ec. (33)]

$$m_n(t_x, v, t_e) = \frac{1}{t_e} \sum_{t_x}^{t_x+t_e} (vt)^n$$

$$m_n(t_x, v, t_e) = \frac{v^n t^{n+1}}{t_e(n+1)} \Big|_{t_x}^{t_x+t_e}$$

$$m_n(t_x, v, t_e) = \frac{v^n}{t_e(n+1)} \{(t_x + t_e)^{n+1} - t_x^{n+1}\}, \quad (3.33)$$

esta última expresión para  $m_n$ , depende de parámetros de movimiento, como son la velocidad y el tiempo de exposición.

Sustituyendo  $m_n$  en la Ec. (3.28), se obtiene

$$OTF(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[v(t_x+t_e)]^{n+1} - (vt_x)^{n+1}}{vt_e n!} (-i\omega)^n, \quad (3.34)$$

usando la serie de Taylor,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.35)$$

haciendo el algebra, se obtiene entonces que la  $OTF(\omega)$  está dada por,

$$OTF(\omega) = e^{-iv\omega\left(t_x + \frac{t_e}{2}\right)} \left[ \text{sinc}\left(\frac{vt_e\omega}{2}\right) \right]. \quad (3.36)$$

A partir de la  $OTF(\omega)$ , se calcula la  $MTF(\omega)$ , una gráfica se muestra en la Figura 3.6

$$MTF(\omega) = |OTF(\omega)| = \left| \text{sinc}\left(\frac{d}{2}\omega\right) \right| = |\text{sinc}(\pi df)|, \quad (3.37)$$

donde  $d = vt_e$  corresponde a la extensión de la borrosidad o degradación que sufre la imagen causada por el movimiento lineal, y  $f = \omega/2\pi$  es la frecuencia espacial, como se muestra en la Figura 3.8

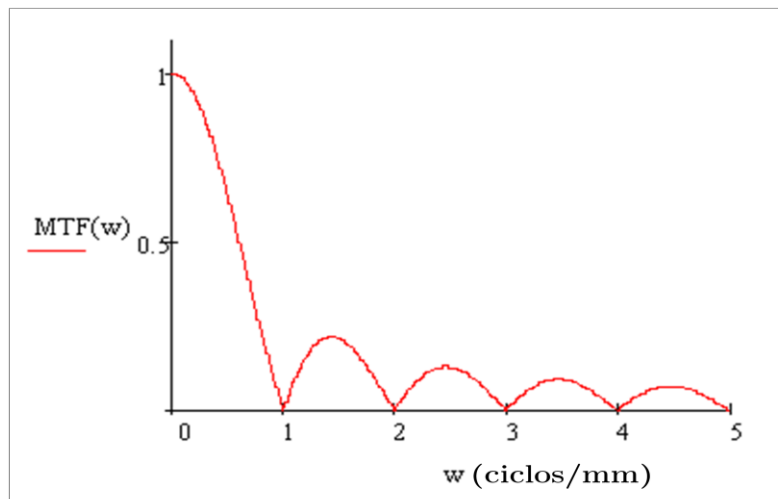


Figura 3.8 MTF teórica, para la función de movimiento lineal.

### 3.4.2 Ejemplo: movimiento vibratorio en una dimensión. Caso alta frecuencia

Las vibraciones son un factor crítico en sistemas dinámicos de adquisición de imágenes, siendo este movimiento la causa más severa de borrosidad en la imagen. Considerando la función de movimiento como

$$x(t) = D \text{sen}(\omega_0 t), \quad t_x \leq t \leq t_x + t_e \quad (3.38)$$

donde  $D$  corresponde a la amplitud y  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  es la frecuencia angular, para períodos de vibración  $T_0$  (Figura 3.9).

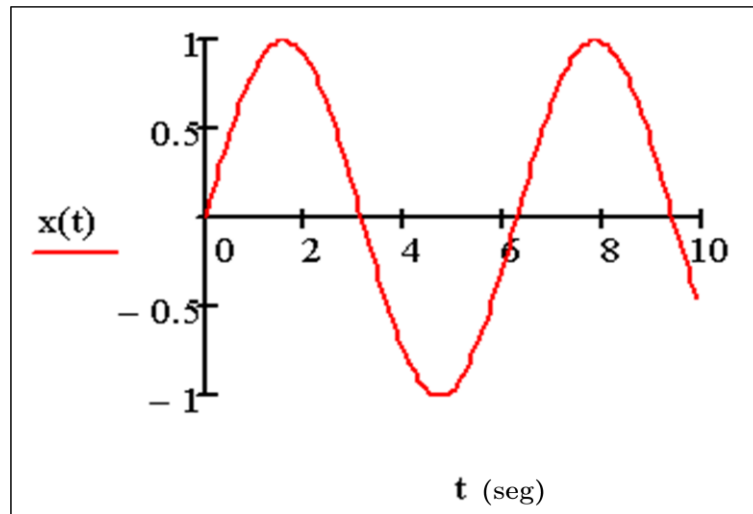


Figura 3.9 Función de movimiento del centro de masa del objeto en el tiempo, cuya trayectoria corresponde a un movimiento vibratorio en una dimensión.

Entonces el momento  $m_n$  se calcula utilizando la Ec. (3.27), mediante

$$m_n(t_x, D, \omega_0, t_e) = \frac{1}{t_e} \int_{t_x}^{t_x+t_e} [D \text{sen}(\omega_0 t)]^n dt. \quad (3.39)$$

Como estableció Kopeika [12] al elevar la función de movimiento a la potencia  $n$ , se obtiene

$$m_n = \begin{cases} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} a_{n,l} \text{sen}[(n-2l)\omega_0 t_x + \phi_{n,l}], & n = 1, 3, 5 \dots \\ \frac{D^n n!}{2^n [(n/2)!]^2} + \sum_{l=0}^{n/2-1} b_{n,l} \cos[(n-2l)\omega_0 t_x + \phi_{n,l}], & n = 0, 2, 4 \dots \end{cases} \quad (3.40)$$



donde,

$$a_{n,l} = \frac{D^n}{\omega_0 t_e} \frac{(-1)^{(n-1+2l)/2}}{2^{n-1}} \binom{n}{l} \left\{ -\frac{\text{sen} \left[ \left( \frac{n-l}{2} \right) \omega_0 t_e \right]}{\frac{n}{2}-l} \right\}, \quad (3.41)$$

$$b_{n,l} = \frac{D^n}{\omega_0 t_e} \frac{(-1)^{n/2+l}}{2^{n-1}} \binom{n}{l} \left\{ -\frac{\text{sen} \left[ \left( \frac{n-2}{2} \right) \omega_0 t_e \right]}{\frac{n}{2}-l} \right\}, \quad (3.42)$$

$$\phi_{n,l} = \left( \frac{n}{2} - l \right) \omega_0 t_e, \quad (3.43)$$

para  $a_{n,l}$ ,  $b_{n,l}$  y  $\phi_{n,l}$  que son parámetros que dependen de la amplitud de vibración  $D$ , la frecuencia angular  $\omega_0$  y el tiempo de exposición  $t_e$ . Para el caso de vibración de baja frecuencia,  $t_e < T$ , y para el caso de vibración de alta frecuencia es conveniente aproximar la exposición con un número de períodos de vibración [ $t_e \approx NT0$ ,  $N$  entero. Sustituyendo  $te=NT0$  en la Ec. (3.40), se obtiene,

$$m_n = \frac{D^n n!}{2^n [(n/2)!]^2} \quad n = 0,2,4 \dots \quad (3.44)$$

Sustituyendo ahora la Ec. (3.44) en la Ec. (3.28), se obtiene la OTF para el movimiento vibratorio de alta frecuencia expresada en la Ec. (3.45)

$$OTF(\omega)_{alta \text{ frecuencia}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega D)^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = J_0(\omega D). \quad (3.45)$$

Definiendo a partir de la Ec. (3.45) a la MTF, como

$$MTF(\omega)_{alta \text{ frecuencia}} = |J_0(\omega D)|, \quad (3.46)$$

donde  $J_0$  es la función Bessel de orden cero [21]. Sea  $f_e = \omega/2\pi$  la frecuencia espacial, la cual se muestra en la Figura 3.10 y re-escribiendo la Ec. (3.46) se tiene

$$MTF(\omega)_{alta \text{ frecuencia}} = |J_0(2\pi D f_e)|. \quad (3.47)$$

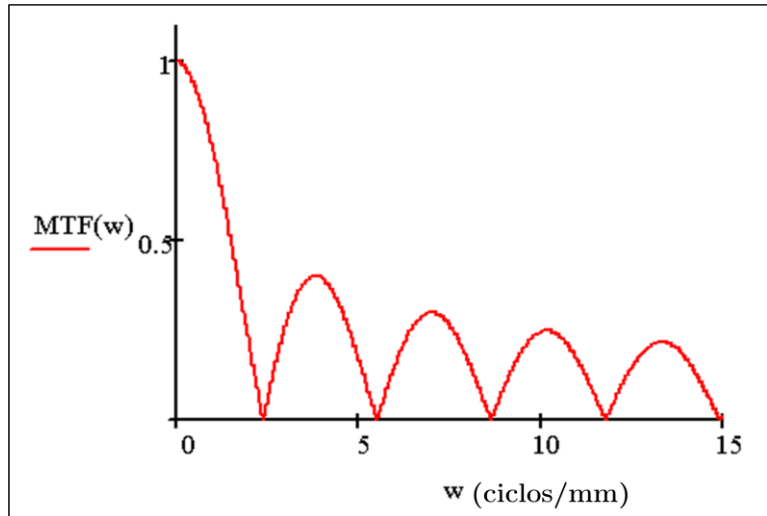


Figura 3.10 MTF teórica, para la función de movimiento vibratorio de alta frecuencia en una dimensión.

En el siguiente capítulo se extiende el tratamiento a dos dimensiones.

# **CAPÍTULO 4**

## **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA**

## **ÓPTICA PARA TRAYECTORIAS EN DOS DIMENSIONES**

### **4.1 Introducción**

En el presente capítulo se extiende el tratamiento para obtener la MTF de un sistema óptico, a dos dimensiones. Se revisan los movimientos lineal, circular y elíptico a partir de una función de movimiento descrita por dos movimientos vibratorios.

### **4.2 Momentos de una trayectoria en dos dimensiones**

Considere el sistema de la Figura 4.1 con una función de pupila que es radialmente simétrica, para la cual

$$P(\vec{r}_p) = P(r_p). \quad (4.1)$$

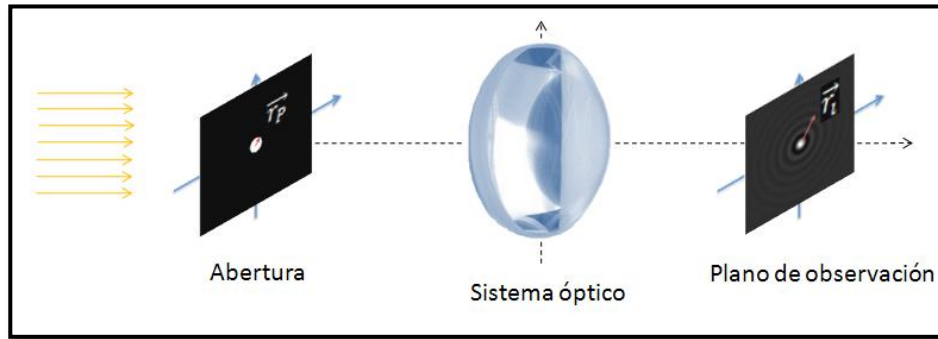


Figura 4.1 Función de pupila radialmente simétrica y plano de observación.

Sí  $\vec{r}_p$  y  $\vec{r}_i$  (en el plano de observación) están definidos como

$$\vec{r}_p = (r_p \cos \theta_p, r_p \sin \theta_p), 0 \leq \theta_p < 2\pi, \quad (4.2)$$

y

$$\vec{r}_i = (r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i), 0 \leq \theta_i < 2\pi, \quad (4.3)$$

se puede derivar de la Ec. (3.10) a la Función de Punto Extendido mediante la expresión

$$PSF(\vec{r}_i) = \frac{1}{P_{ex} \lambda^2 R^2} \left| \int P(r_p) r_p dr_p \int_0^{2\pi} \exp \left[ -\frac{2\pi i}{\lambda R} r_p \cdot r_i \cos(\theta_p - \theta_i) \right] d\theta_p \right|^2. \quad (4.4)$$

En forma esquemática esto puede ser observado en la Figura 4.2

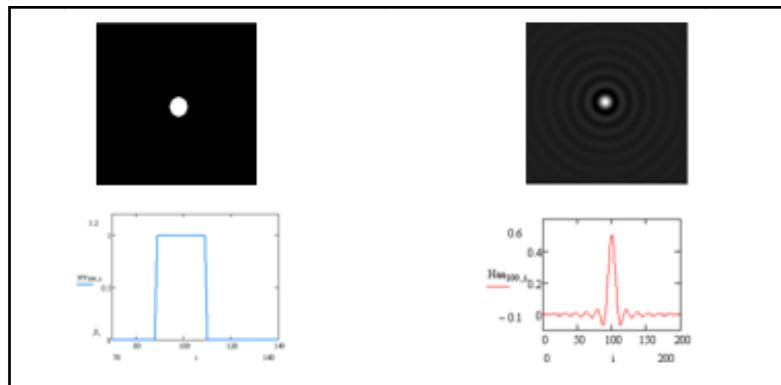


Figura 4.2 Función de Punto Extendido, para una fuente puntual

Considerando la identidad de Jacobi,

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \alpha) = 2xJ_0(x), \quad (4.5)$$

donde  $J_0(\cdot)$  es la función Bessel de orden cero de primer grado, utilizando la Ec. (4.5) y realizando los productos que no dependen del parámetro de integración, es posible reescribir la Ec. (4.4) como se muestra en la Ec. (4.6)

$$PSF(\vec{r}_i) = \frac{4\pi^2}{P_{ex}\lambda^2R^2} \left| \int P(r_p) J_0\left(\frac{2\pi i}{\lambda R} r_p\right) r_p dr_p \right|^2. \quad (4.6)$$

Entonces, *la PSF de un sistema cuya función de pupila es radialmente simétrica, es también radialmente simétrica* [9]. Análogamente, se tiene a la *OTF* y la *PSF* dependientes la una de la otra, esto se puede ver en las Ecs. (4.7) y (4.8)

$$OTF(\vec{v}_i) = 2\pi \int PSF(r_i) J_0(2\pi v_i r_i) r_i dr_i, \quad (4.7)$$

$$PSF(r_i) = 2\pi \int OTF(v_i) J_0(2\pi v_i r_i) v_i dv_i, \quad (4.8)$$

donde,  $v_i = |\vec{v}_i|$ . Entonces, la *PSF* y la *OTF* de un sistema con una función de pupila radialmente simétrica resulta en una pareja de transformadas Hankel ó Bessel-Fourier de orden cero. Este resultado es una consecuencia de que la transformada de Fourier de una función radialmente simétrica es una transformada de Hankel de orden cero. En la Ec. (4.7) se puede notar que la *PSF* es una función real, también es posible notar que la *OTF* de una función radialmente simétrica también es simétrica.

Como se mencionó anteriormente el movimiento en general se realiza en dos dimensiones  $x$  e  $y$ , esto es perpendiculares entre sí. El movimiento vibratorio es capaz de generar una gran cantidad de los casos de movimiento particulares, esta es la razón por la que se estudia el cálculo de los momentos de una partícula que vibra en  $x$  e  $y$ .

Las vibraciones mecánicas, son la principal causa de la degradación de una imagen, la borrosidad de una imagen causada por vibración es común cuando el sistema de adquisición se encuentra en vehículos que se mueven gracias a turbinas,

motores o estructuras mecánicas [15]. Aunque la vibración puede reducirse desde el diseño, la presencia de vibración no se nulifica. Una forma de medir la borrosidad generada por el movimiento vibratorio es mediante la Función de Transferencia Óptica (OTF). Las Funciones de Transferencia Óptica para diversas vibraciones sinusoidales son conocidas [14]. Considérense las vibraciones de alta frecuencia en las cuales el tiempo de exposición  $t_e$  es mayor que el período  $T$  de una pequeña componente armónica ( $t_e > T$ ). La OTF para vibraciones sinusoidales de alta frecuencia es conocida en la literatura [12] y está dada por

$$OTF_{HF} = J_0(D\omega), \quad (4.9)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular en la dirección de la vibración,  $D$  es la amplitud de la vibración y  $J_0$  es la función Bessel de orden cero.

Sin embargo, las vibraciones no son siempre armónicas, algunas pueden ser aleatorias. *Sí la función de vibración es conocida ó puede medirse, la OTF puede ser calculada numérica o analíticamente.* En algunos casos la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) de la vibración es conocida o estimada. Dado que la PDF es también la Función de Punto Extendido y en tal caso, se puede calcular la OTF a partir de la Transformada de Fourier de la PDF [12], tal como se observa en la siguiente expresión

$$OTF(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} PDF(x) \exp(-j\omega x) dx, \quad (4.10)$$

donde  $PDF(x)$  es el desplazamiento. Utilizando esta relación, se puede encontrar la OTF para vibración aleatoria cuya PDF es gaussiana como se muestra en la Figura 4.3, y que está definida por la Ec. (4.11)

$$OTF(\omega) = e^{(-0.5 \sigma^2 \omega^2)}, \quad (4.11)$$

donde  $\sigma$  es la desviación estándar de la vibración [18].

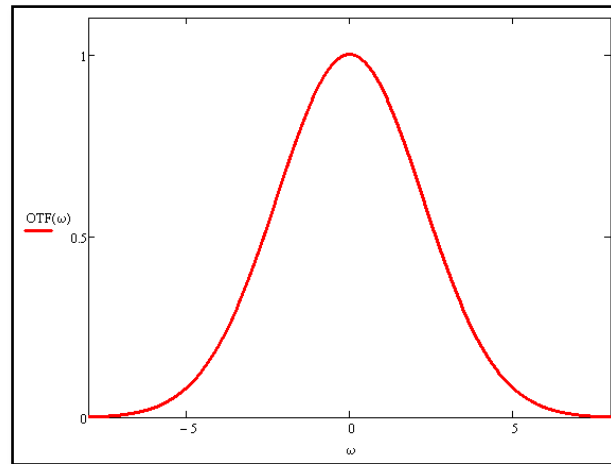


Figura 4.3 OTF teórica con  $\sigma^2 = 0.2$

En la mayoría de casos, la función de movimiento es desconocida y está es medida o estimada por métodos indirectos.

### 4.3 OTF en dos dimensiones a partir de los momentos de una trayectoria

El movimiento es la principal causa de degradación en una imagen, caracterizar cuantitativamente la degradación causada por el movimiento es útil para evaluar la distorsión en una imagen y así poder restaurarla. Un ejemplo de esto será mostrado en el siguiente capítulo. Una forma conveniente de caracterizar esta degradación es mediante la Función de Transferencia Óptica, (OTF).

Un método para calcular la OTF está basado en la *función de movimiento* relativo entre la cámara y la imagen del objeto. Para cualquier tipo de movimiento una expresión de la OTF se puede obtener mediante métodos numéricos o analíticos. Otros métodos están basados en el análisis de la frecuencia espacial o en el análisis del dominio espacial de la función de respuesta al impulso. El cálculo de la

OTF mediante la frecuencia espacial conduce a una expresión analítica sólo para algunos movimientos como el movimiento lineal y la vibración de alta frecuencia. A continuación se propone un nuevo enfoque para el cálculo de la OTF, en sistemas con funciones de movimiento bidimensional.

Suponga una partícula que se mueve en una trayectoria genérica descrita por la función vectorial  $\overline{d}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ , como la que se observa en la Figura 4.4. Considérese el caso de vibración en dos dimensiones, tomando el comienzo de registro del tiempo de modo que la fase inicial de la primera vibración sea cero, las ecuaciones de vibración en dos dimensiones se definen por

$$x(t) = D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (4.12a)$$

$$y(t) = D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (4.12b)$$

para  $y = 0$ , cuando  $t = t_0$ . Donde  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$  y  $D_n$  ( $n = 1,2$ ); son la frecuencia y la amplitud de cada uno de los movimientos vibratorios.

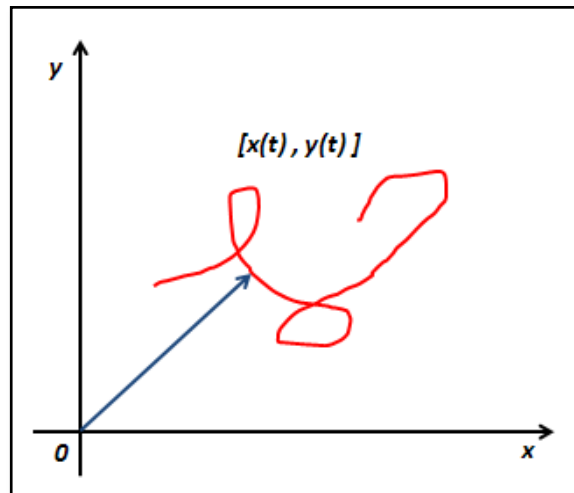


Figura 4.4 Trayectoria genérica de una partícula que se mueve a lo largo de una curva  $\overline{d}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ .



Las Ecs. (4.12a) y (4.12b) describen trayectorias similares a las analizadas en el capítulo 2. Entonces es posible definir los momentos  $m_{pq}^{(d)}$  de orden  $(p + q)$  de la función de desplazamiento bidimensional  $\overrightarrow{d(t)}$ , dentro del intervalo de tiempo  $[t_i, t_i + t_e]$  como;

$$m_{pq}^{(d)} = \frac{1}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} [x(t)]^p [y(t)]^q dt, \quad (4.13)$$

redefiniéndola, para el caso en que  $t_e \rightarrow \infty$ , lo cual significa que el tiempo de exposición de la cámara crece respecto al período de vibración del objeto. Se tiene que,

$$m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} [x(t)]^p [y(t)]^q dt. \quad (4.14)$$

Reescribiendo la trayectoria  $\overrightarrow{d(t)}$  como

$$\overrightarrow{d(t)} = D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \hat{i} + D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \hat{j}, \quad (4.15)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi f_1$  y  $\omega_2 = 2\pi f_2$ . Reemplazando las frecuencias en la Ec. (4.15) resulta

$$\overrightarrow{d(t)} = D_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \hat{i} + D_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \hat{j}. \quad (4.16)$$

Sustituyendo a esta última expresión en la Ec. (4.14)

$$m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} [D_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)]^p [D_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)]^q dt. \quad (4.17)$$

Para llevar a cabo esta integral los valores de  $p$  y  $q$  pueden ser pares o impares ó combinaciones de estos. Esto puede ser resuelto usando combinaciones de las Ecs. (4.18a), (4.18b), (4.18c) y (4.18d) [13],

$$\cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA + \binom{2n}{1} \cos(2n-2)A + \dots + \binom{2n}{n-1} \cos 2A \right\}, \quad (4.18a)$$

$$\sin^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA - \binom{2n}{1} \cos(2n-2)A + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos 2A \right\}, \quad (4.18b)$$

$$\cos^{2n-1}A = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \cos(2n-1)A + \binom{2n-1}{1} \cos(2n-3)A + \dots + \binom{2n-1}{n-1} \cos A \right\}, \quad (4.18c)$$

$$\sin^{2n-1}A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \sin(2n-1)A - \binom{2n-1}{1} \sin(2n-3)A + \dots - (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sin A \right\}. \quad (4.18d)$$

### CASO PAR:

Para el caso par, en que  $p = 2n$ ,  $n = \frac{p}{2}$  y la fase  $A = 2\pi f_1 t + \varphi_1$ , se tiene

$$\cos^p(2\pi f_1 t + \varphi_1) = \cos^{2n}A. \quad (4.19)$$

Usando la fórmula (4.18a) y expandiendo se tiene que;

$$\begin{aligned} \cos^p(2\pi f_1 t + \varphi_1) &= \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} + \\ &\frac{1}{2^{p-1}} \left\{ \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \binom{p}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \dots + \right. \\ &\left. \binom{p}{p/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para el caso en que  $q = 2n$ ,  $n = \frac{q}{2}$  y la fase  $B = 2\pi f_2 t + \varphi_2$ ,

$$\cos^q(2\pi f_2 t + \varphi_2) = \cos^{2n}B. \quad (4.21)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \cos^q(2\pi f_2 t + \varphi_2) &= \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} + \\ &\frac{1}{2^{q-1}} \left\{ \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \binom{q}{1} \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots + \right. \\ &\left. \binom{q}{q/2-1} \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

realizando los productos de ambas series de las Ecs. (4.20) y (4.22), se tiene la Ec. (4.23)

$$\begin{aligned}
& \cos^p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos^q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&= \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} + \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \frac{1}{2^{p-1}} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\
&+ \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \binom{p}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \dots \\
&+ \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \binom{p}{p/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\
&+ \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \frac{1}{2^{q-1}} \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^{q-1}} \frac{1}{2^{p-1}} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^{q-1}} \binom{p}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
&+ \frac{1}{2^{q-1}} \binom{p}{p/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \binom{q}{1} \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^{p-1}} \binom{q}{1} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \binom{p}{1} \binom{q}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
&+ \binom{p}{p/2-1} \binom{q}{1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
&+ \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \binom{q}{q/2-1} \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^{p-1}} \binom{q}{q/2-1} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2^{p-1}} \binom{p}{1} \binom{q}{q/2-1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
&+ \binom{p}{p/2-1} \binom{q}{q/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2). \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la Ec. (4.23) en el límite de la Ec. (4.17), se obtiene la Ec. (4.24)

$$\begin{aligned}
m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} & \left[ D_1^p D_2^q \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} + \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \frac{1}{2^{p-1}} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \right. \\
& + \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \binom{p}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \dots \\
& + \frac{1}{2^q} \binom{q}{q/2} \binom{p}{p/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\
& + \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \frac{1}{2^{q-1}} \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^{q-1}} \frac{1}{2^{p-1}} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^{q-1}} \binom{p}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
& + \frac{1}{2^{q-1}} \binom{p}{p/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos q(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \binom{q}{1} \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^{p-1}} \binom{q}{1} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \binom{p}{1} \binom{q}{1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
& + \binom{p}{p/2-1} \binom{q}{1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos(q-2)(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
& + \frac{1}{2^p} \binom{p}{p/2} \binom{q}{q/2-1} \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^{p-1}} \binom{q}{q/2-1} \cos p(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\
& + \frac{1}{2^{p-1}} \binom{p}{1} \binom{q}{q/2-1} \cos(p-2)(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots \\
& \left. + \binom{p}{p/2-1} \binom{q}{q/2-1} \cos 2(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cos 2(2\pi f_2 t + \varphi_2) \right] dt. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Resolviendo el límite para el primer termino de la Ec. (4.24)

$$m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{1}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} \frac{D_1^p}{2^p} \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \frac{D_2^q}{2^q} \left(\frac{q}{2}\right) dt = \frac{D_1^p D_2^q}{2^{p+q}} \left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{q}{2}\right), \quad (4.25)$$

generalizando la integración para los términos restantes como se muestra en la siguiente expresión

$$m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{D_1^p D_2^q}{t_e} \int_{t_i}^{t_i+t_e} \cos k(2\pi f_\sigma t + \varphi_\sigma) dt, \quad \text{para } \sigma = 1, 2$$

Evaluando el límite,

$$m_{pq}^{(d)} = \lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{D_1^p D_2^q}{t_e} \cdot \left\{ \frac{1}{k2\pi f_\sigma} \cdot [\text{sen } k(2\pi f_\sigma t + \varphi_\sigma) - \text{sen } k\varphi_\sigma] \right\} = 0, \quad (4.26)$$

en donde  $\lim_{t_e \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$ .

De este modo es posible entonces definir los momentos de orden  $p + q$ , como,

$$m_{pq}^{(d)} = \frac{D_1^p p!}{2^p \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^2} \frac{D_2^q q!}{2^q \left[\left(\frac{q}{2}\right)!\right]^2}, \quad \text{para } p \text{ y } q \text{ pares} \quad (4.27)$$

La expresión de la Ec. (4.27) es válida sólo para los casos en que  $p$  ó  $q$  son pares. *Para cualquier caso en los que son impares, el límite es siempre cero.*

Considerando lo anterior los momentos  $m_{pq}^{(d)}$ , se establecen como,

$$m_{pq}^{(d)} = \begin{cases} \frac{D_1^p p!}{2^p \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^2} \frac{D_2^q q!}{2^q \left[\left(\frac{q}{2}\right)!\right]^2}, & \text{para } p \text{ y } q \text{ pares} \\ 0, & \text{para } p \text{ ó } q \text{ impares} \end{cases}. \quad (4.28)$$

La Ec. (4.28) permite observar que los momentos  $m_{pq}^{(d)}$  son separables, siendo  $D_1$  y  $D_2$  las amplitudes de los movimientos vibratorios en cada eje. Esto es,

$$m_{pq}^{(d)} = m_p m_q. \quad (4.29)$$

Extendiendo la definición de la OTF en dos dimensiones para el caso de funciones momento separables mediante la expresión,

$$OTF(\omega_1, \omega_2) = OTF(\omega_1)OTF(\omega_2) = \sum_p \frac{m_p}{p!} (-i\omega_1)^p \sum_q \frac{m_q}{q!} (-i\omega_2)^q. \quad (4.30)$$

Sustituyendo la Ec. (4.28) en la Ec. (4.30)

$$\begin{aligned} OTF(\omega_1, \omega_2) &= \sum_p \frac{D_1 p!}{2^p \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^2} \cdot \frac{1}{p!} \cdot (-i\omega_1)^p \sum_q \frac{D_2 q!}{2^q \left[\left(\frac{q}{2}\right)!\right]^2} \cdot \frac{1}{q!} \cdot (-i\omega_2)^q \\ &= \sum_p \frac{D_1 (-i\omega_1)^p}{2^p \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^2} \sum_q \frac{D_2 (-i\omega_2)^q}{2^q \left[\left(\frac{q}{2}\right)!\right]^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Cada sumatoria converge a una función Bessel de orden cero como función de la frecuencia, *i.e.*

$$OTF(\omega_1, \omega_2) = J_0(\omega_1)J_0(\omega_2). \quad (4.32)$$

La Función de Transferencia Óptica de la Ec. (4.32), expresa el producto de dos funciones de Bessel de orden cero, una en cada eje coordenado. Es bien sabido que;

$$|OTF(\omega_1, \omega_2)| = MTF(\omega_1, \omega_2), \quad (4.33)$$

siendo *MTF* la función de Transferencia Modulada.

## 4.4 Simulación para algunos casos

Se analizan ahora casos particulares para las trayectorias estudiadas en el capítulo 2. Bajo la base de que una cámara digital de CCD hace el seguimiento de un objeto puntual que se mueve en una trayectoria, como se observa en la Figura 4.5

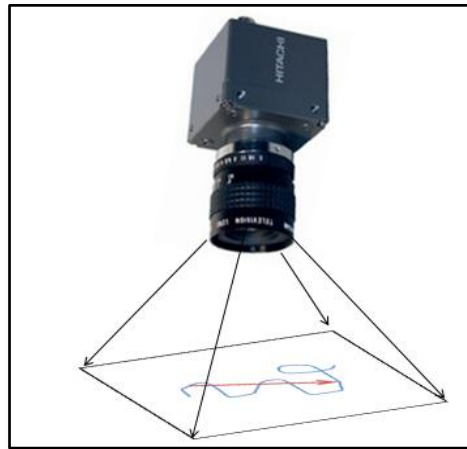


Figura 4.5 Esquema del sentido de una cámara CCD

Se utiliza como objeto de prueba una rejilla multiresolución USAF (Figura 4.6), esta rejilla pertenece al conjunto de patrones basados en el estándar USAF 1951, los cuales son utilizados para evaluar el rendimiento de sistemas ópticos. La rejilla es afectada por el movimiento simulado en cada caso.

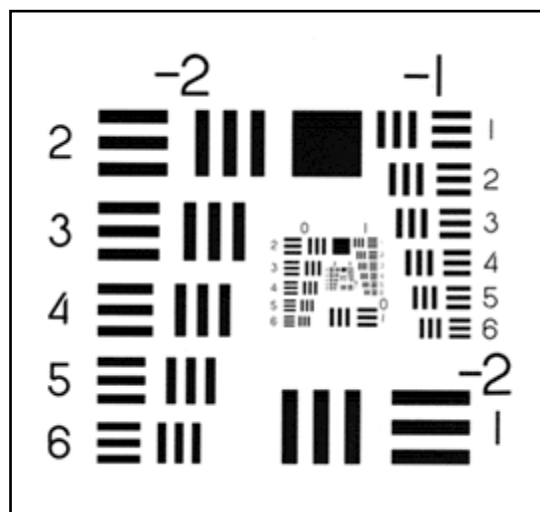


Figura 4.6 Rejilla Multiresolución USAF

#### 4.4.1 Simulación del movimiento rectilíneo en dos dimensiones

Retomando la expresión de las ecuaciones paramétricas del movimiento vibratorio en dos dimensiones de la Ec. (4.12). Se analiza teóricamente el movimiento rectilíneo de una partícula en un plano, este movimiento es considerado en dos dimensiones. Para la gráfica mostrada en la Figura 4.7 se utilizan los siguientes parámetros:  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $D_1 = D_2 = 10$ , y  $\alpha = 0$

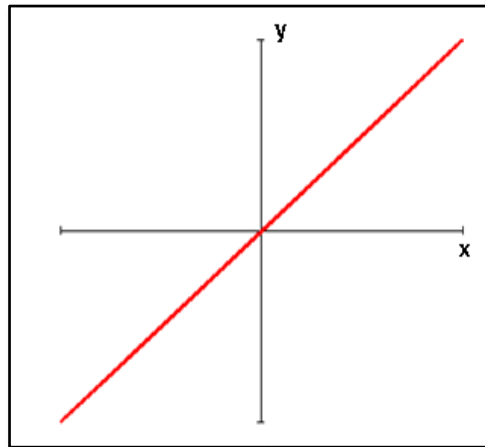


Figura 4.7 Objeto visto axialmente que presenta movimiento rectilíneo en un plano.  
Para:  $x(t) = 10\cos(t)$ ,  $y(t) = 10\cos(t)$

Siguiendo el cálculo descrito en la sección anterior para la *MTF*, se obtiene la función  $\text{sinc}(\omega_1, \omega_2)$  cuya gráfica se muestra en la Figura 4.8.

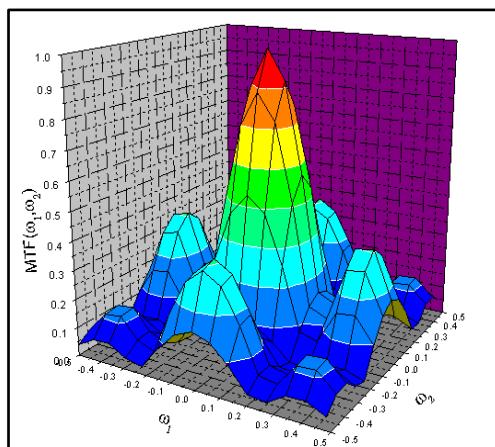


Figura 4.8 MTF para la función de movimiento rectilíneo con orden  $p + q = 160$



Proyectando en el plano  $XY$ , como mapa de intensidades a la función separable  $\text{sinc}(\omega_1) \cdot \text{sinc}(\omega_2)$ , se puede observar la forma que guarda la  $MTF$  en dos dimensiones en la Figura 4.9

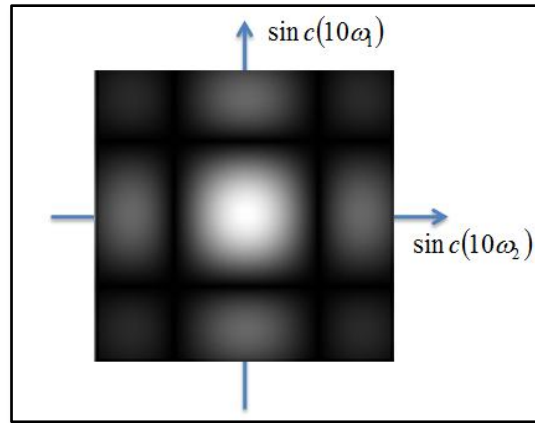


Figura 4.9 MTF, vista superior, escalada en niveles de gris.

En la Figura 4.10 se observa un perfil en una dimensión.

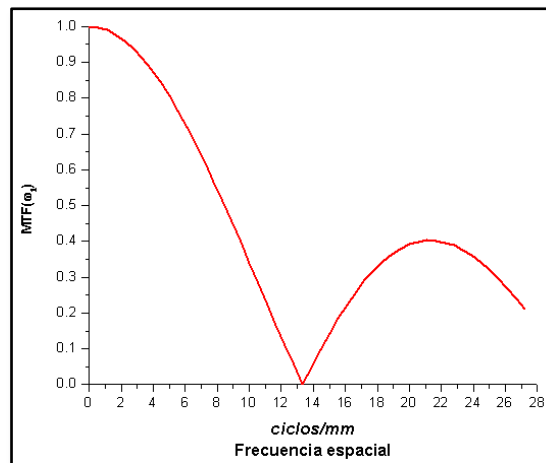


Figura 4.10 Perfil en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con orden  $p + q = 160$

Como se puede observar en la gráfica, la frecuencia de corte ( $f_c$ ) es de 13 pares de líneas por  $mm$ , este valor nos aporta la información de la capacidad del sistema para resolver dos líneas cuando el movimiento relativo entre el objeto y el sensor tiene las características del movimiento simulado. El sistema tiene una

reducción de contraste de  $MTF = 0.5$  para aquellas frecuencias espaciales de  $f_e = 9 \text{ ciclos/mm}$ . El valor de contraste para  $f_e \geq 13 \text{ ciclos/mm}$  es de cero, por lo que, los valores de la  $MTF$  en estas frecuencias de los denomina espurios.

En la Figura 4.11 se muestra el objeto de prueba degradado por el movimiento rectilíneo para diferentes frecuencias y amplitudes.

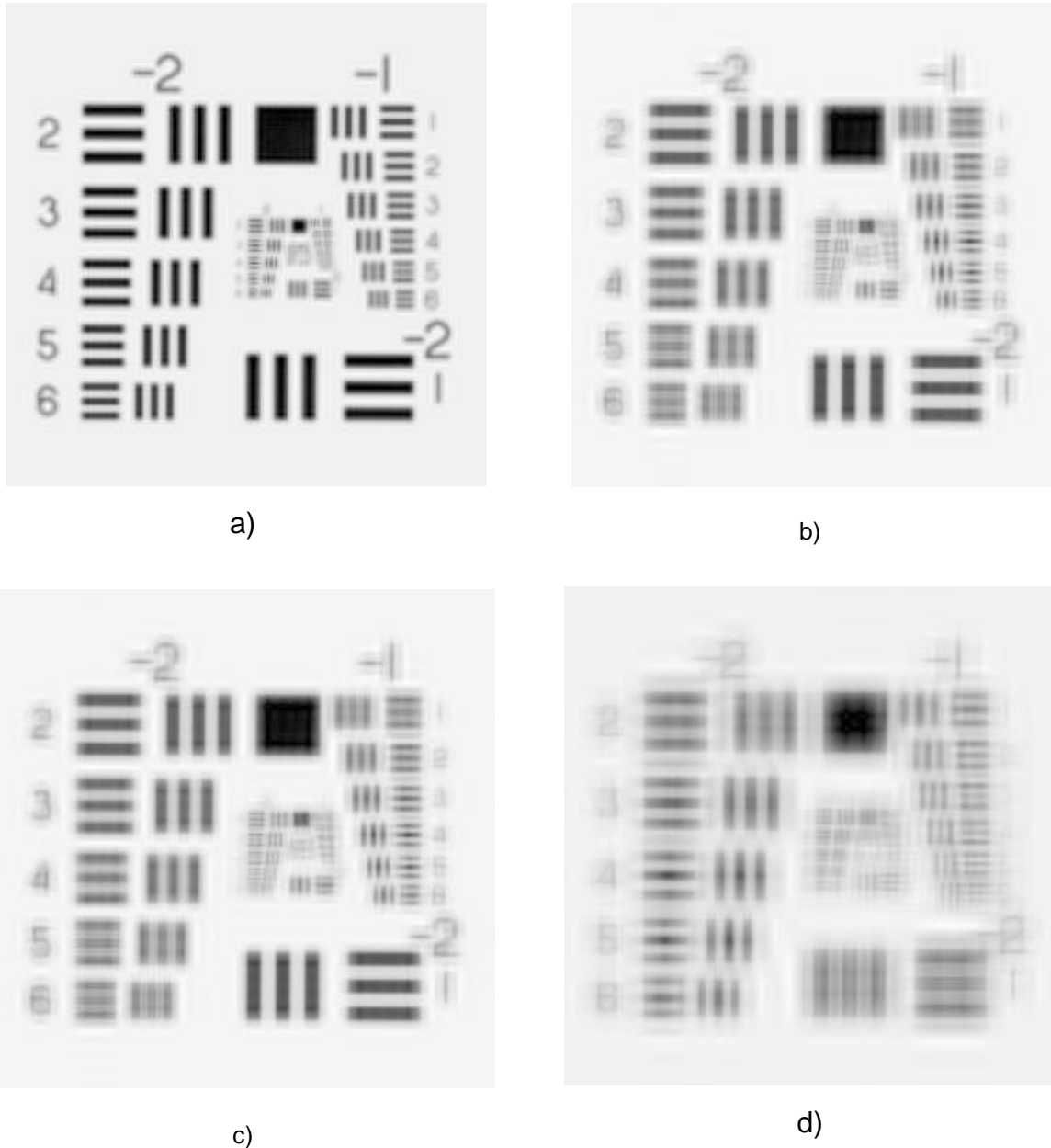


Figura 4.11 Objeto de prueba degradado por movimiento rectilíneo en dos dimensiones para  
a)  $x(t) = 10\cos(t)$ ,  $y(t) = 10\cos(t)$ , b)  $x(t) = 20\cos(t)$ ,  $y(t) = 20\cos(t)$ ,  
c)  $x(t) = 10\cos(2t)$ ,  $y(t) = 10\cos(2t)$  y d)  $x(t) = 20\cos(2t)$ ,  $y(t) = 20\cos(2t)$

En la Figura 4.7 se mostro una trayectoria lineal que es simétrica con respecto a los ejes coordenados. Ahora se analiza el mismo tipo de movimiento pero con una trayectoria antisimétrica, dicha trayectoria se muestra en la Figura 4.12, y se utilizan los siguientes parámetros:  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $D_1 = 10$ ,  $D_2 = 20$ , y  $\alpha = 0$

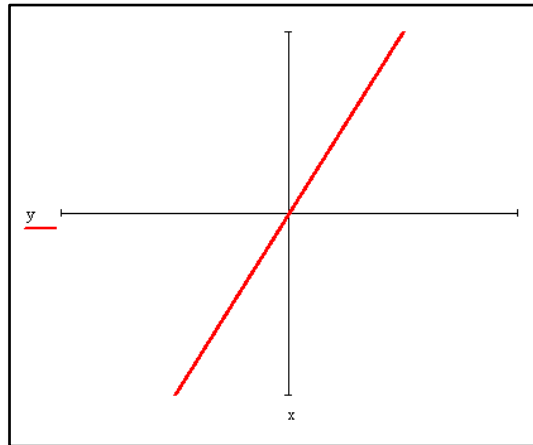


Figura 4.12 Movimiento rectilíneo en un plano. Esta trayectoria es anti simétrica con respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ . Con parámetros:  $x(t) = 10 \cos(t)$ ,  $y(t) = 20 \cos(t)$

Haciendo uso del mismo tratamiento que el caso anterior se obtiene la gráfica de su MTF, mostrada en la Figura 4.13.

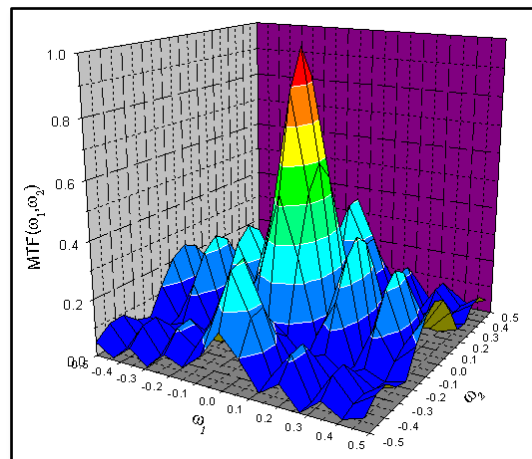


Figura 4.13 MTF para la función de movimiento rectilíneo con orden  $p + q = 240$

Se muestra en la Figura 4.14 un mapa de intensidades de la MTF graficada en la Figura 4.12, como se puede ver a diferencia del movimiento rectilíneo analizado anteriormente, para este caso se tienen dos frecuencias de corte diferentes entre sí.

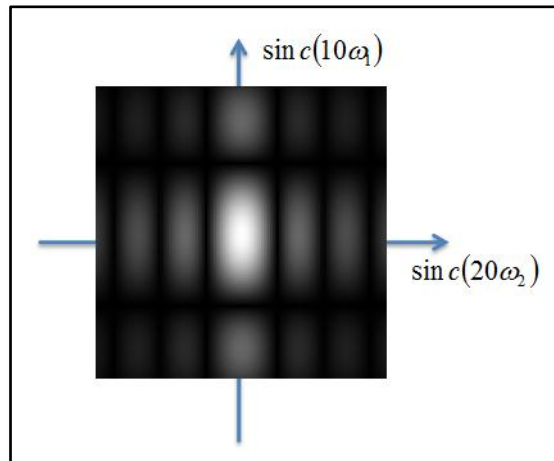


Figura 4.14 MTF, vista superior, escalada en niveles de gris.

Con la finalidad de mostrar las dos frecuencias de corte se hace un barrido en cada eje, mostrando el perfil a lo largo de  $X$  e  $Y$ , en las Figuras 4.15 y 4.16. Haciendo un corte sobre cada uno de los perfiles del mapa de intensidades de la Figura 4.12.

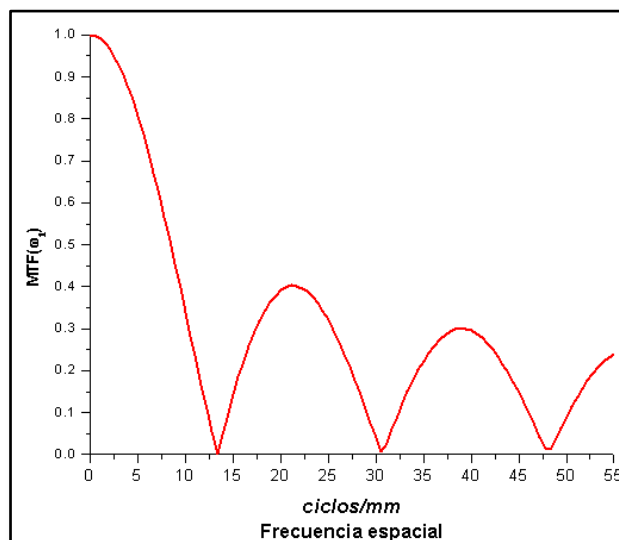


Figura 4.15 Perfil  $X$  en una dimensión para el movimiento rectilíneo con orden  $p + q = 240$

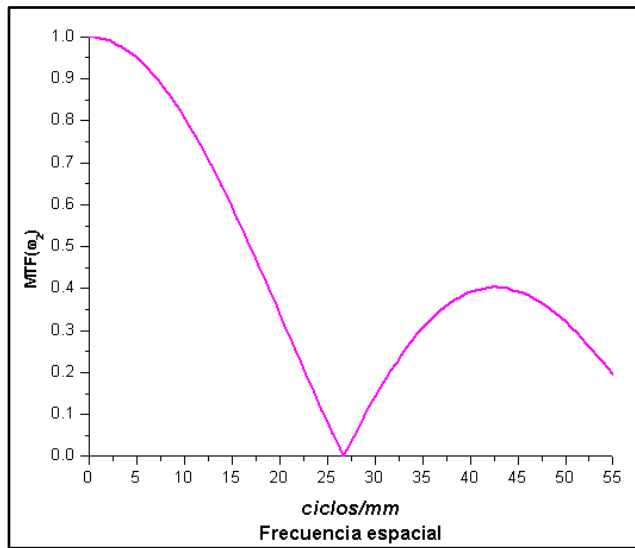
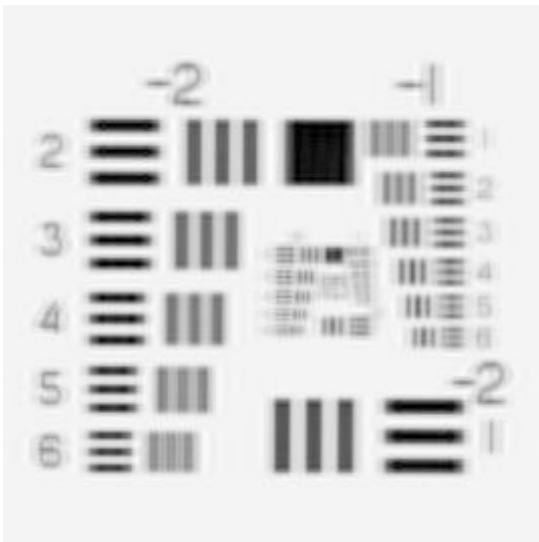
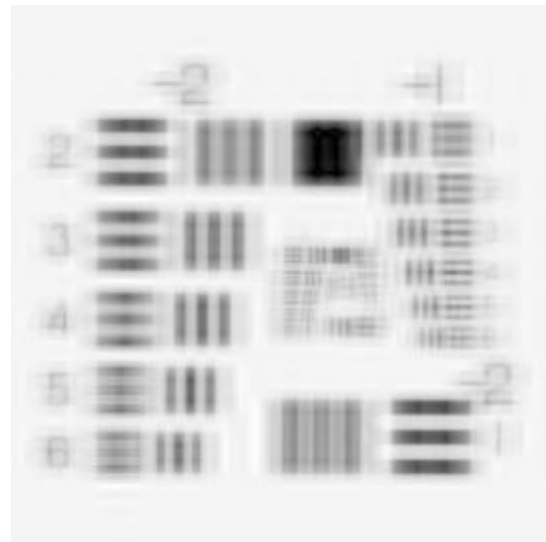


Figura 4.16 Perfil Y en una dimensión para el movimiento rectilíneo con orden  $p + q = 240$

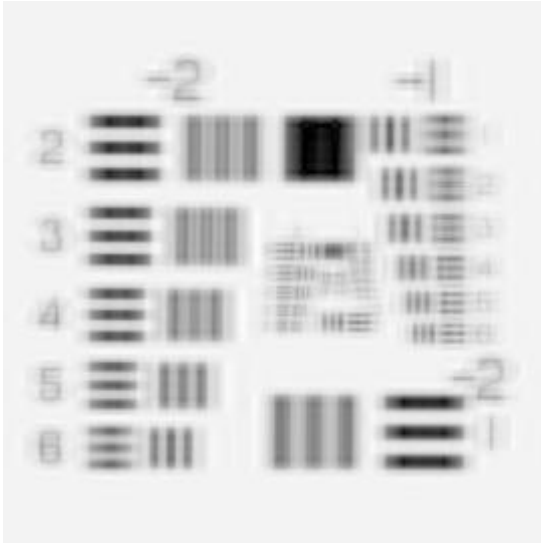
Se observa en las dos gráficas anteriores que las frecuencias de corte son diferentes, esto se debe a que la trayectoria no es simétrica con respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ . Las frecuencias de corte son  $f_c = 13$  y  $f_c = 26$  líneas por  $mm$ , con estos valores se puede determinar que la borrosidad es mayor en el eje  $X$ .



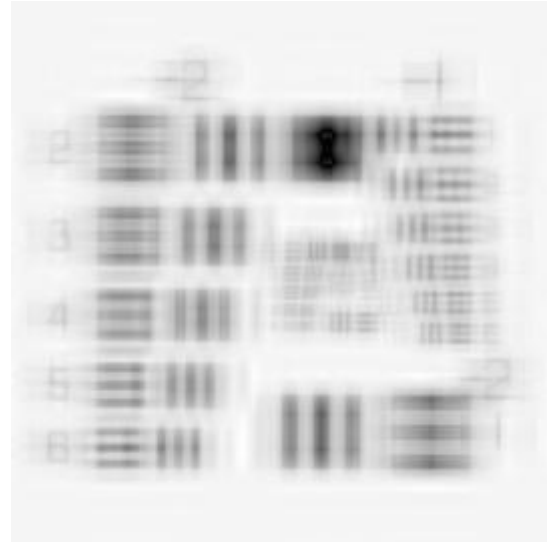
a)



b)



c)



d)

Figura 4.17 Objeto de prueba degradado por movimiento rectilíneo en dos dimensiones para  
a)  $x(t) = 10\cos(t)$ ,  $y(t) = 20\cos(t)$ , b)  $x(t) = 20\cos(2t)$ ,  $y(t) = 20\cos(2t)$ ,  
c)  $x(t) = 15\cos(t)$ ,  $y(t) = 30\cos(t)$  y d)  $x(t) = 20\cos(2t)$ ,  $y(t) = 20\cos(2t)$

#### 4.4.2 Simulación del movimiento circular

Para el caso del movimiento circular, el cambio en la fase  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  genera un cambio en una de las funciones coseno, realizando ahora el movimiento descrito por la trayectoria  $\overline{d}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ , donde

$$x(t) = D_1 \text{sen}(\omega_1 t), \quad (4.34a)$$

$$y(t) = D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (4.34b)$$

Utilizando los parámetros:  $\omega_1 = \omega_2 = 5$ ,  $D_1 = D_2 = 3$ ,  $p = q = 80$  y  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , se obtiene la trayectoria de la Figura 4.18.

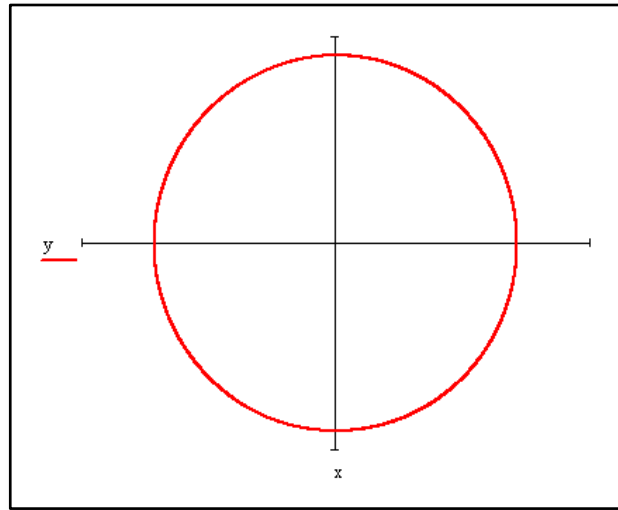


Figura 4.18 Movimiento circular para  $x(t) = 3 \cos(5t)$ ,  $y(t) = 3 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

Utilizando nuevamente la Ec. 4.31 y calculando la *MTF*, se obtiene la gráfica de la Figura 4.19. En este caso particular la  $MTF = J_0(\omega_1)J_0(\omega_2)$ .

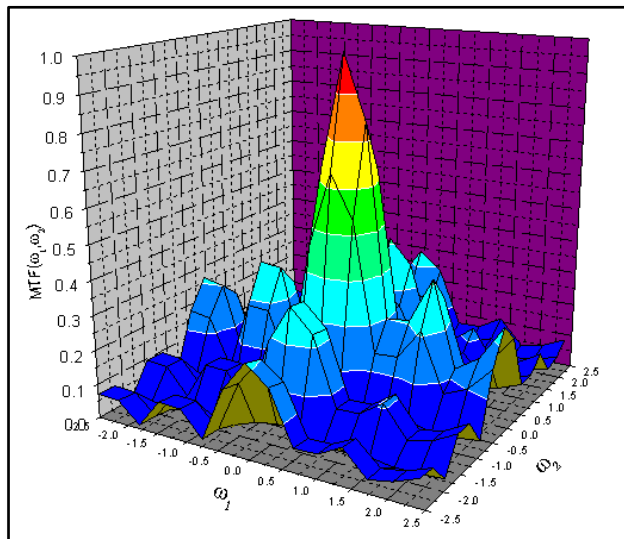


Figura 4.19 MTF para la función de movimiento circular con orden  $p + q = 240$ ,

Realizando la proyección en el plano  $X$  e  $Y$ , como mapa de intensidades, se obtiene la Figura 4.20

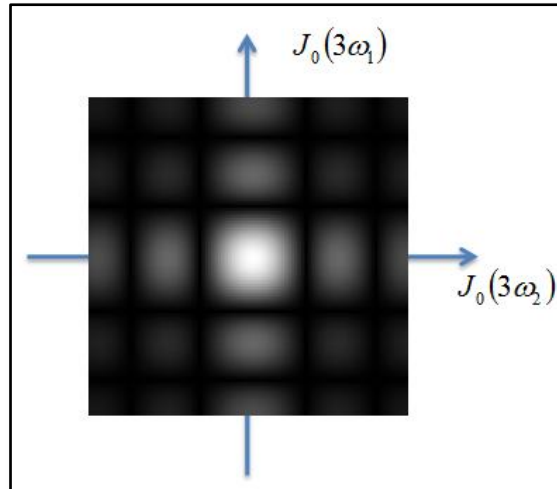


Figura 4.20 MTF del movimiento circular, vista superior, escalada en niveles de gris.

En la Figura 4.21 se muestra el barrido en un solo renglón del mapa de intensidades, siendo este el perfil en una sola dimensión de la MTF.

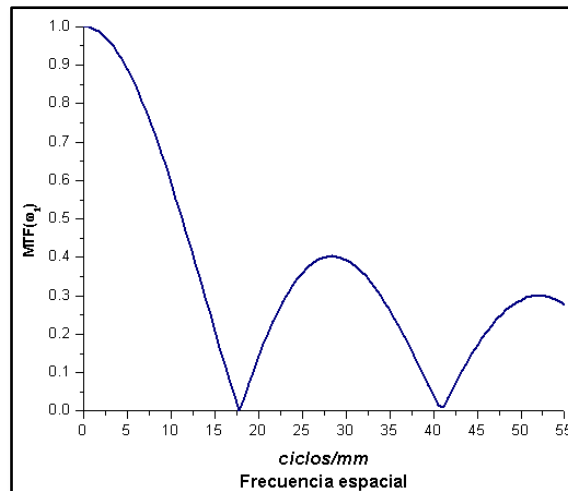
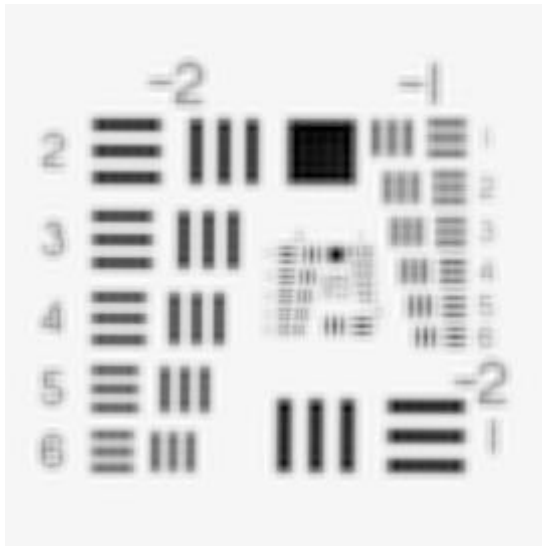


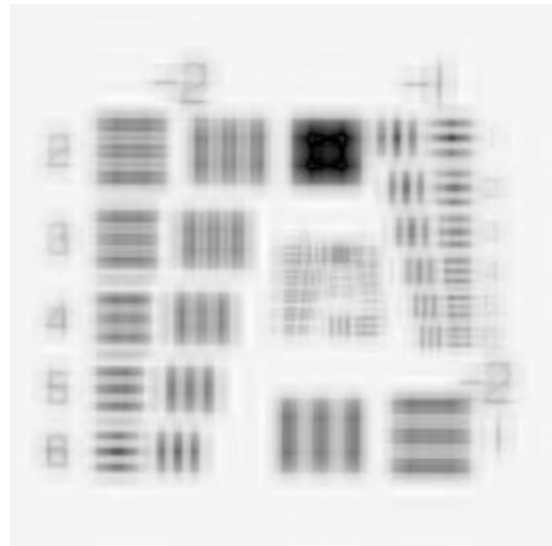
Figura 4.21 Perfil en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con orden  $p + q = 240$

Se observa en la Figura 4.21 la frecuencia de corte  $f_c = 17$  líneas por  $mm$ , para este caso, la trayectoria también es simétrica con respecto de los ejes, por lo que la borrosidad es igual con respecto a ambos. En la Figura 4.22 se muestra al objeto de prueba degradado por este movimiento para diferentes amplitudes y frecuencias.

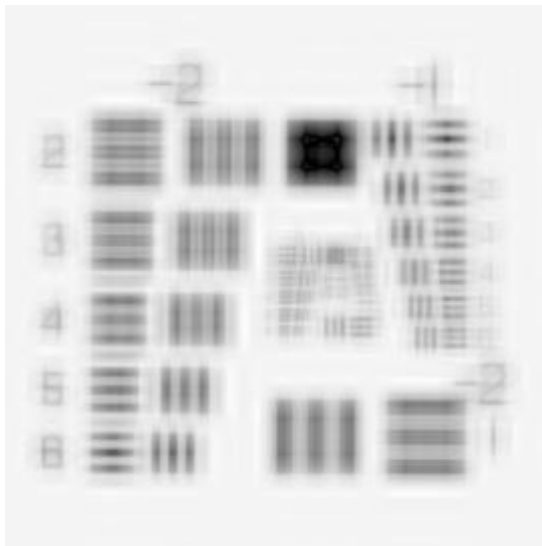




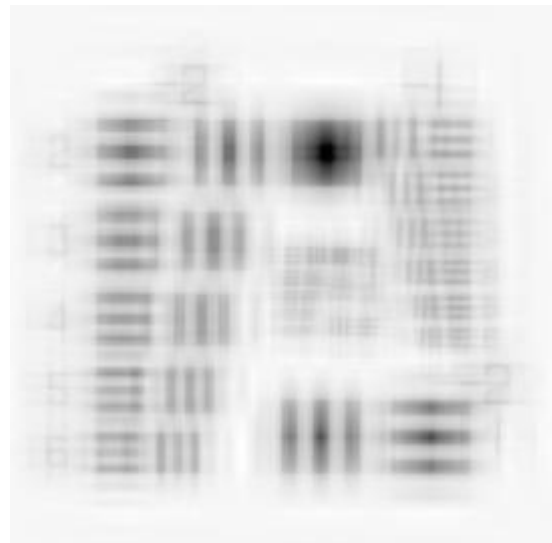
a)



b)



c)



d)

Figura 4.22 Objeto de prueba degradado por movimiento circular para  
a)  $x(t) = 3\cos(5t)$ ,  $y(t) = 3\cos(5t)$ , b)  $x(t) = 6\cos(5t)$ ,  $y(t) = 6\cos(5t)$ ,  
c)  $x(t) = 3\cos(10t)$ ,  $y(t) = 3\cos(10t)$  y d)  $x(t) = 6\cos(10t)$ ,  $y(t) = 6\cos(10t)$

#### 4.4.3 Simulación del movimiento elíptico

El movimiento elíptico (Figura 4.23) al igual que el movimiento circular presenta un cambio en la diferencia de fase,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . La amplitud de cada una de las vibraciones es diferente entre ellas, a continuación se describe el movimiento elíptico con los siguientes parámetros:  $\omega_1 = \omega_2 = 10$ ,  $D_1 = 3$ ,  $D_2 = 2$ ,  $p = q = 80$  y  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

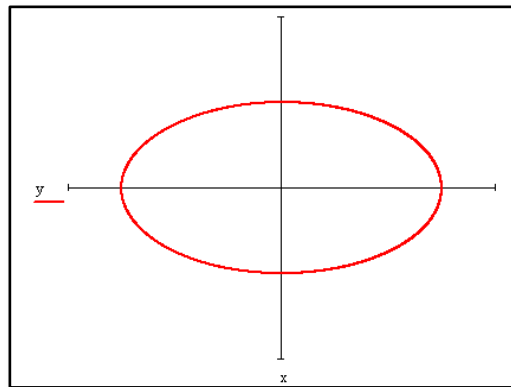


Figura 4.23 Movimiento elíptico para  $x(t) = 3 \cos(10t)$ ,  $y(t) = 2 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$

Al sustituir estos parámetros en la Ec. (4.31) y calcular la MTF del movimiento se obtiene la gráfica de la Figura 4.24,

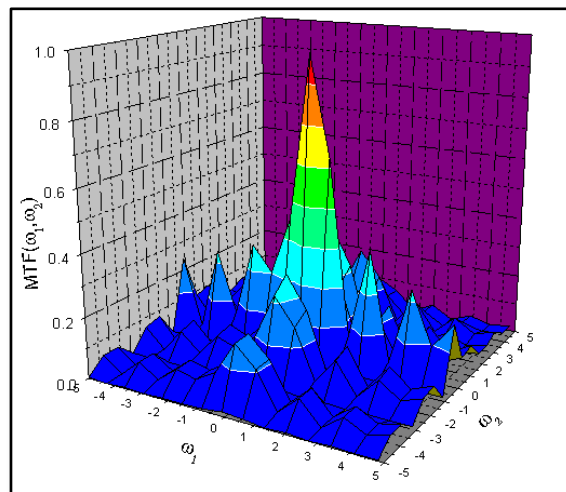


Figura 4.24 MTF para la función de movimiento elíptico con orden  $p + q = 240$ ,

Análogamente a los casos anteriores, proyectando en un mapa de intensidades, se obtiene la imagen de la Figura 4.25

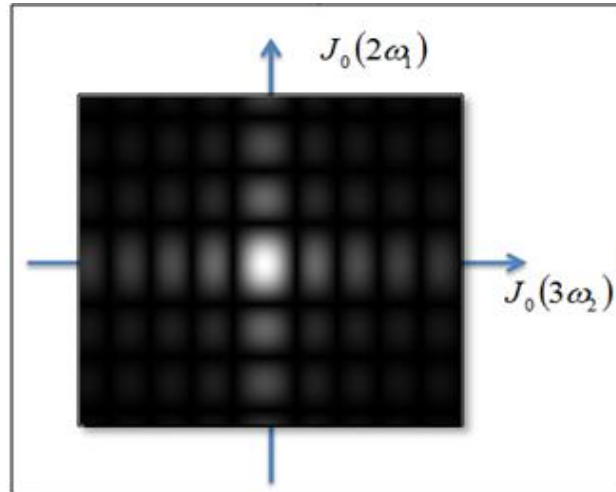


Figura 4.25 MTF del movimiento elíptico, vista superior, escalada en niveles de gris.

Como se puede observar la figura presenta ahora diferencia en las amplitudes en cada uno de los ejes. A continuación se muestran los dos perfiles en las Figuras 4.26 y 4.27

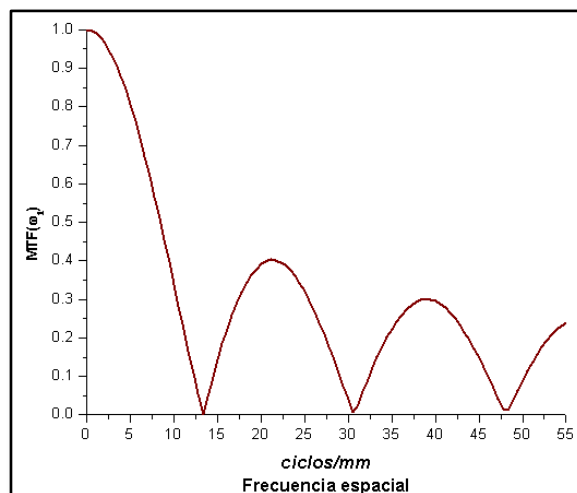


Figura 4.26 Perfil X en una dimensión de la MTF para el movimiento elíptico, con orden  $p + q = 240$

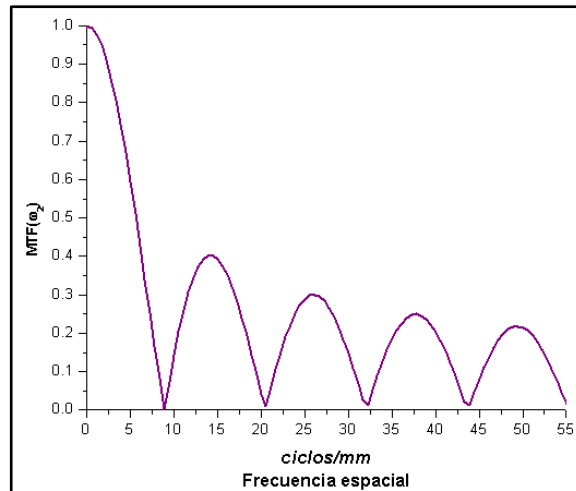
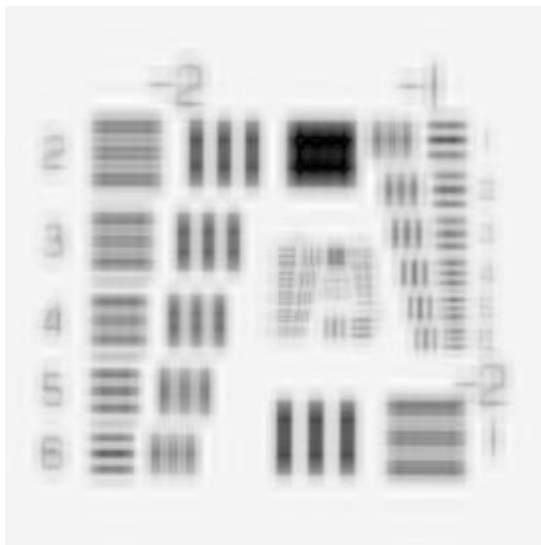


Figura 4.27 Perfil Y en una dimensión de la MTF para el movimiento rectilíneo, con orden  $p + q = 240$

De las dos últimas gráficas es posible observar que este tipo de movimiento presenta también dos frecuencias de corte  $f_c = 13$  y  $f_c = 9$  líneas por  $mm$  respectivamente, para este caso la borrosidad también es mayor en el eje Y, a donde corresponde la menor amplitud del movimiento elíptico.

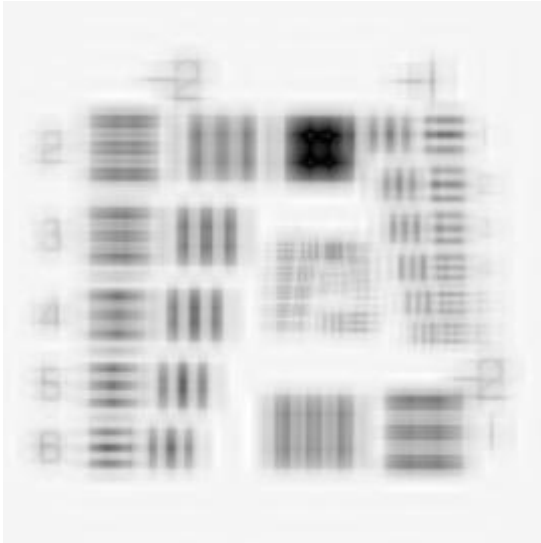
En la Figura 4.28 se muestra el objeto de prueba afectado por el movimiento elíptico a diferentes amplitudes y frecuencias.



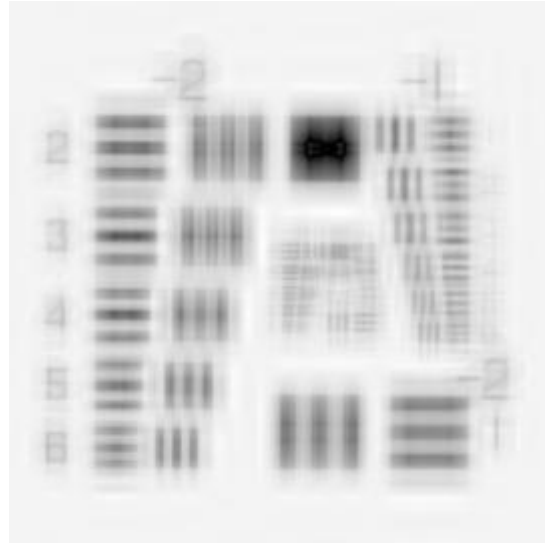
a)



b)



c)



d)

Figura 4.28 Objeto de prueba degradado por movimiento elíptico para  
a)  $x(t) = 3\cos(10t)$ ,  $y(t) = 2\cos(10t)$ , b)  $x(t) = 6\cos(10t)$ ,  $y(t) = 2\cos(10t)$ ,  
c)  $x(t) = 3\cos(10t)$ ,  $y(t) = 4\cos(10t)$  y d)  $x(t) = 6\cos(15t)$ ,  $y(t) = 2\cos(15t)$

En la Tabla II se sintetizan los resultados obtenidos

Trayectoria	MTF en dos dimensiones	Expresión
Lineal $y = x$	<i>sinc</i> simétrica	$\text{sinc}(\omega_1) \cdot \text{sinc}(\omega_2)$ $\omega_1 = \omega_2$
Lineal $y = mx + b$	<i>sinc</i> No simétrica	$\text{sinc}(\omega_1) \cdot \text{sinc}(\omega_2)$
Circular	Bessel simétrica	$J_0(D\omega_1) \cdot J_0(D\omega_2)$
Elíptico	Bessel No simétrica	$J_0(D_1\omega_1) \cdot J_0(D_2\omega_2)$

Tabla II. Funciones de Transferencia en Modulación para distintas trayectorias

En el siguiente capítulo se muestra el desarrollo y resultados de los experimentos realizados para cada tipo de movimiento tanto en una como en dos dimensiones.



# **CAPÍTULO 5**

## **EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

### **5.1 Introducción**

Se presentan ahora los experimentos realizados en el laboratorio, con el fin de llevar a cabo los cálculos de la OTF y la MTF. Se utiliza la Ec. (4.31) presentada en el capítulo anterior. Se utilizan distintos sistemas para la generación de las trayectorias, estos se describen en la siguiente sección. Se obtienen experimentalmente las trayectorias lineal en dos dimensiones, circular y elíptica y además se calcula la MTF, esto para cada uno de los casos. Finalmente se presentan los resultados.

### **5.2 Sistema de adquisición**

Para la realización del experimento se utilizó un sistema óptico-digital para la adquisición de imágenes. En la Figura 5.1 se representa esquemáticamente una

secuencia de  $N$  imágenes que se adquieren para poder obtener la función de movimiento a partir del centroide de cada imagen.

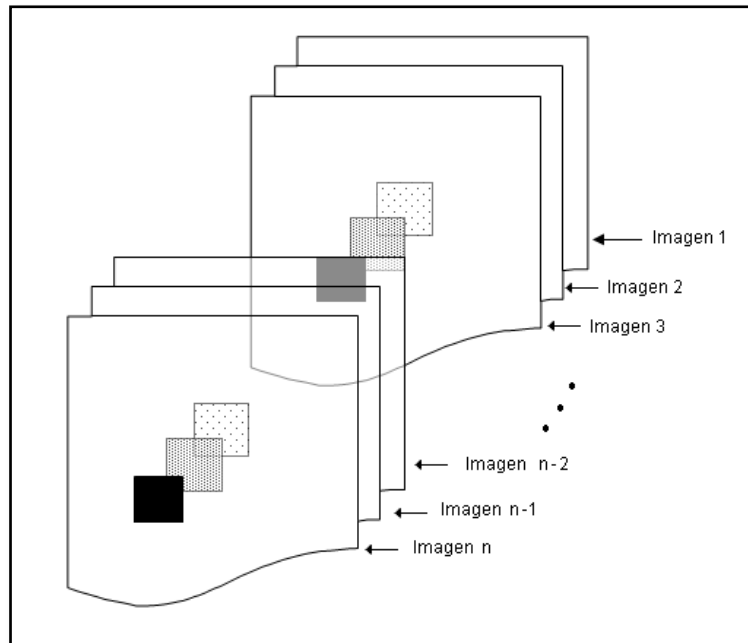


Figura 5.1 Esquema de una secuencia formada por  $N$  imágenes.

El sistema de adquisición consta de una cámara CCD Hitachi de  $\frac{1}{2}$  pulgada, blanco y negro, con resolución espacial de  $1432 \times 1050$  píxeles, en la Tabla III. se muestran las especificaciones de la cámara[25].

Tamaño del elemento	2/3 de pulgada
Número de píxeles	1432 x 1050
Tamaño del píxel	6.45 x 6.45 $\mu\text{m}$
Frecuencia de lectura	30 marcos por segundo
Frecuencia de escaneo horizontal	32.07 KHz
Frecuencia de escaneo vertical	30 Hz
Distancia focal	17.526 mm
Velocidad de disparo	1/30, 1/60, 1/25, 1/250 seg.

Tabla III. Especificaciones de la Cámara CCD



Un sistema de lentes zoom 37 a 75 mm, los valores típicos para el ángulo visual vertical y horizontal son: Gran angular (35° a 100°), Estándar (12° a 35°) y Telefoto (6° a 12°). Un sistema de iluminación de LEDs que irradia luz blanca sobre un campo de trabajo de 7.6 a 22.8 cm. y una tarjeta digitalizadora de imágenes marca Foresight Imaging. La tarjeta digitalizadora fue controlada a través de una interfaz programada en Visual Basic 6.0 la cual permite capturar la secuencia de imágenes con una velocidad de 16 marcos por segundo.

### **5.3 Sistema de simulación de movimiento**

Se utilizan tres diferentes sistemas para la simulación de los movimientos en una y dos dimensiones, a continuación se describen, de acuerdo al movimiento que permite realizar cada sistema.

#### **5.3.1 Movimiento lineal en una dimensión**

Se coloca una imagen sobre un móvil eléctrico que se desplaza a diferentes velocidades  $v$  sobre un riel de longitud  $l = 97 \text{ cm}$ . Las velocidades se regulan con el cambio de voltaje y son medidas con sensores de movimiento que se fijan al riel. Un esquema de este sistema se muestra en la Figura 5.2.

Usando los sistemas de adquisición de imágenes y de simulación del movimiento lineal, se adquieren un conjunto de  $N$  imágenes con un tiempo de exposición por imagen de  $t_e = 0.06 \text{ seg}$ . De cada una de estas imágenes se calcula la posición del centroide, y se obtiene la pareja ordenada  $[x(t), y(t)]$  correspondiente. Con las posiciones espaciales del centroide del objeto en función del tiempo, se logra seguir al objeto como si toda su masa estuviera concentrada en un solo punto.



Figura 5.2 Diagrama del sistema óptico – digital y del sistema de simulación de movimiento lineal, utilizado para la realización del experimento.

En la Figura 5.3 se muestra la función de movimiento  $x(t)$  obtenida a partir de calcular los centroides de cada una de las imágenes de un objeto que se desplaza a una velocidad  $v = 0.3 \text{ cm/seg}$  y cuya trayectoria se describe por la Ec. (3.32).

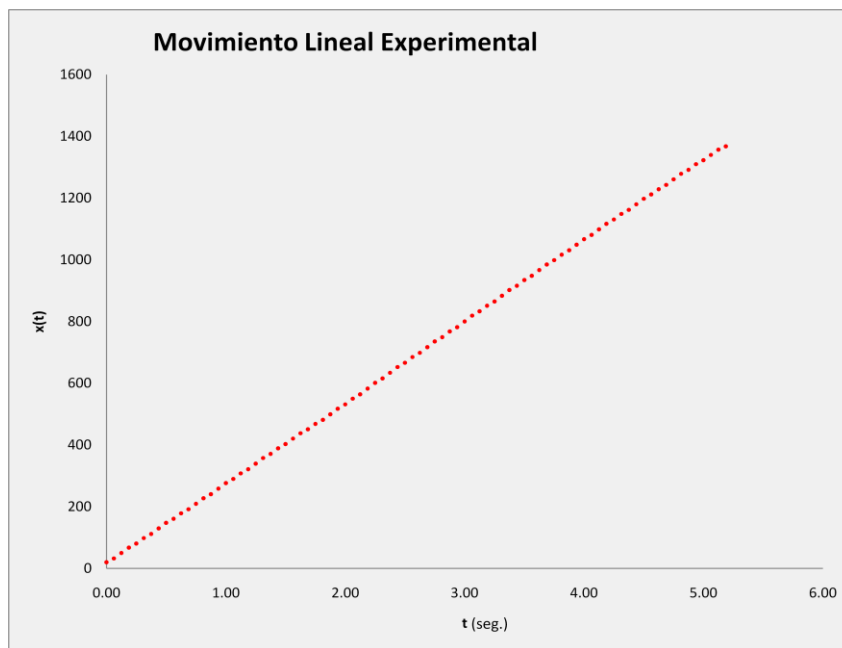


Figura 5.3 Función de movimiento lineal experimental. Cada punto de la gráfica corresponde a la posición  $x(t)$  del centroide del objeto que se mueve sobre el riel a velocidad constante.

### 5.3.2 Movimiento vibratorio en una dimensión

Utilizando el mismo sistema de adquisición que en el movimiento lineal, pero ahora generando movimiento vibratorio en una dimensión, y utilizando para ello una bocina, donde se monta un objeto que oscila. Se gráfica el centroide de cada imagen en el tiempo. La función de movimiento describe ahora a un objeto que vibra a una frecuencia  $f = 3 \text{ Hz}$ . El tiempo de exposición, nuevamente corresponde a  $t_e = 1/16$ . En la Figura 5.4 se muestra un esquema del sistema y en la Figura 5.5 una fotografía con los elementos que componen al sistema.

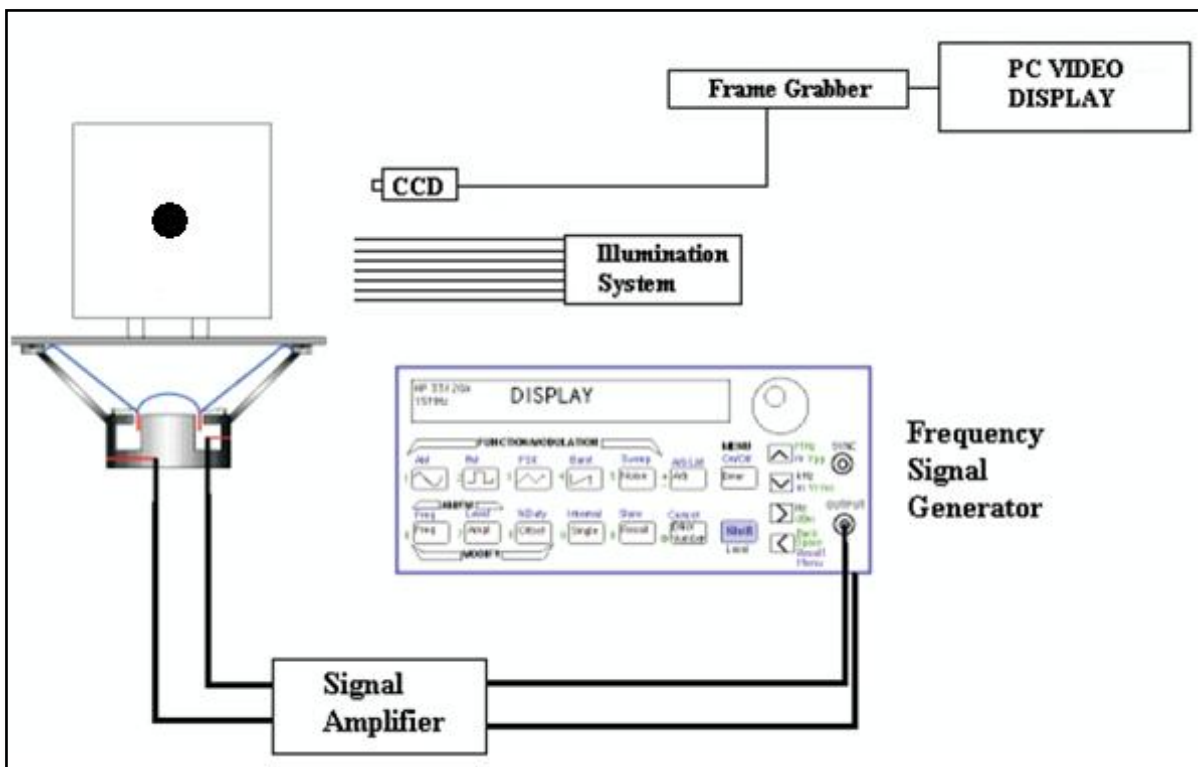


Figura 5.4 Sistema de movimiento vibratorio

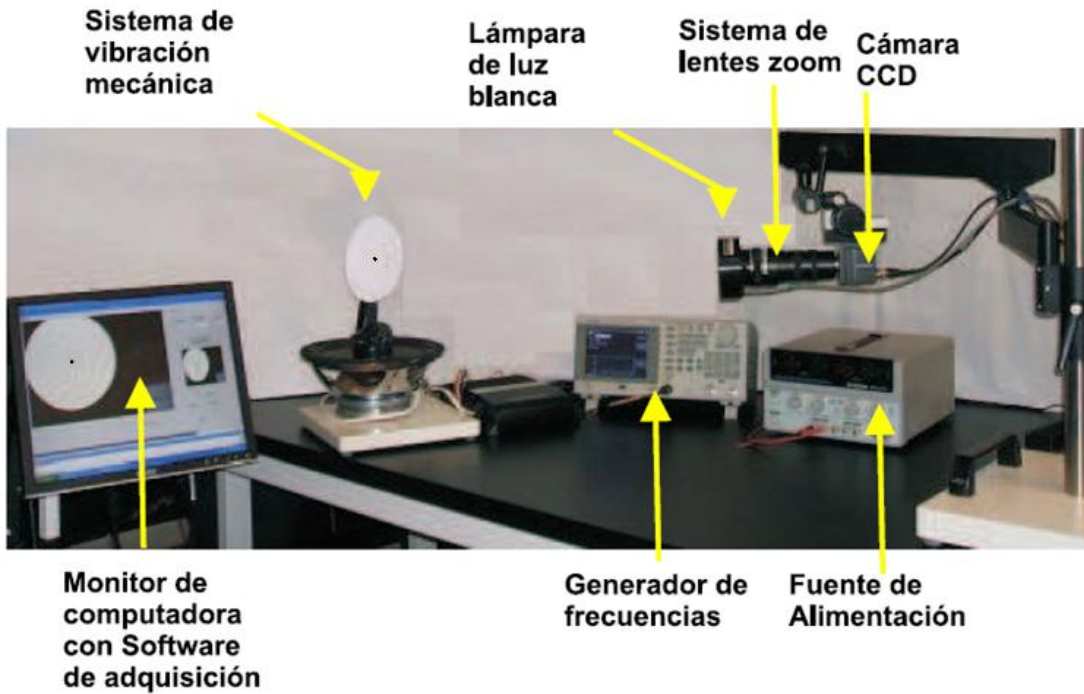


Figura 5.5 Sistema vibratorio. Bocina, amplificador, generador de señales, anillo de LEDs, lente zoom, cámara de CCD y computadora con frame grabber.

En la Figura 5.6 se muestra una gráfica del seguimiento del centroide de un objeto vibrando.

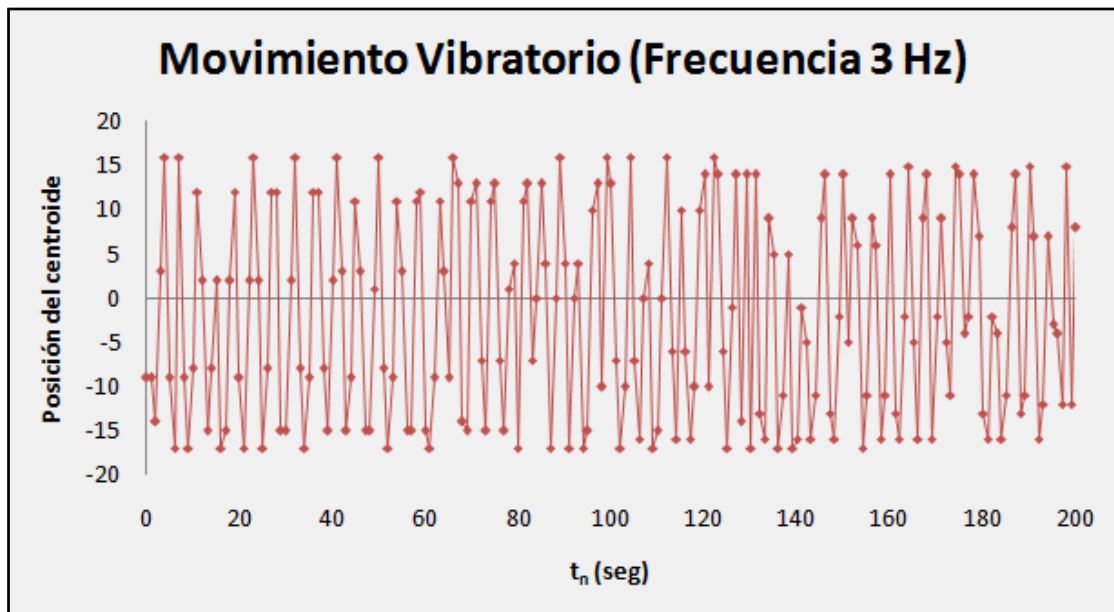


Figura 5.6 Movimiento vibratorio experimental de alta frecuencia en una dimensión. Cada punto es la posición del centroide del objeto.

### 5.3.3 Movimiento lineal, circular y elíptico en dos dimensiones

En esta parte, se realiza un montaje para simular el movimiento en dos dimensiones, este consiste en un controlador universal Modelo XPS-C8 Marca Newport, que permite mover varios instrumentos simultáneamente. En este caso se utiliza para desplazar al objeto de una barra horizontal y una base en forma circular. Este controlador es conectado a una computadora y a través de una interfaz programada en *Visual Basic .Net* que permite modificar parámetros como la velocidad y las distancias recorridas, esta interfaz fue programada para simular los tipos de movimiento analizados en el presente estudio. Un esquema del montaje es mostrado en la Figura 5.7, y una fotografía de la base se muestra en la Figura 5.8.

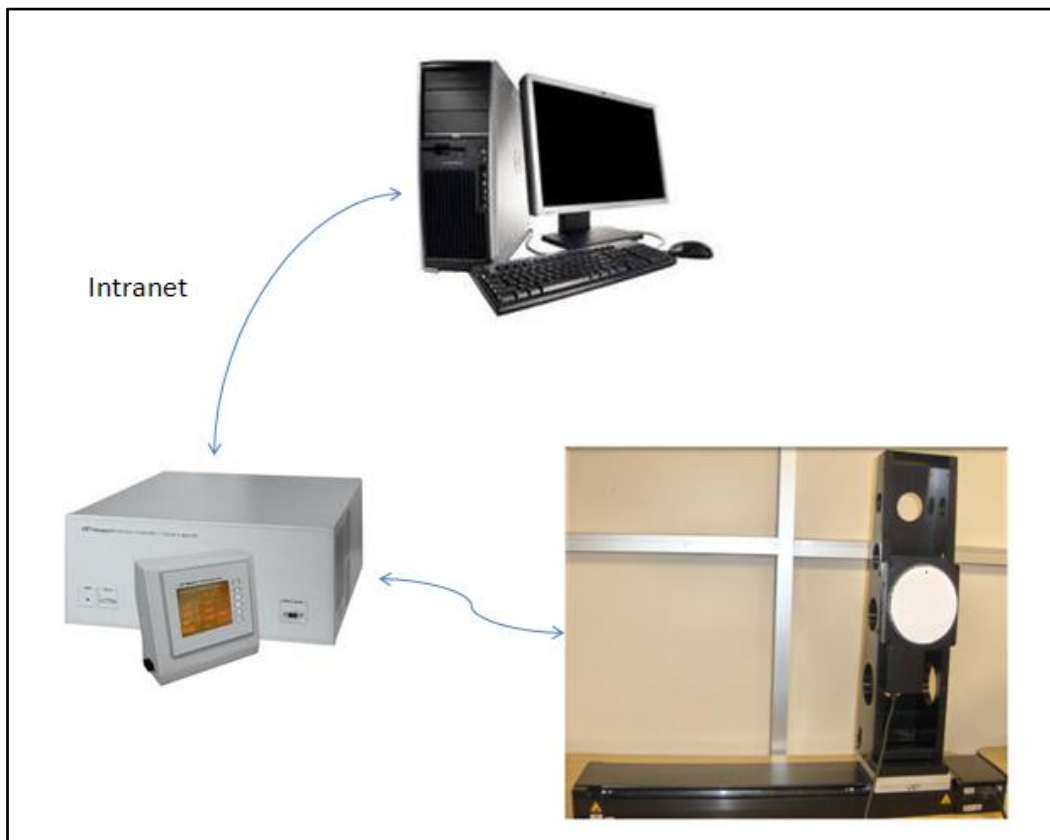


Figura 5.7 Esquema del sistema montado para la simulación del movimiento en dos dimensiones. Computadora, controlador universal y bases mecánicas.

Se captura una imagen cada que existe un desplazamiento que es determinado previamente, de acuerdo a la cantidad de imágenes que se desean procesar y al movimiento que se está simulando.

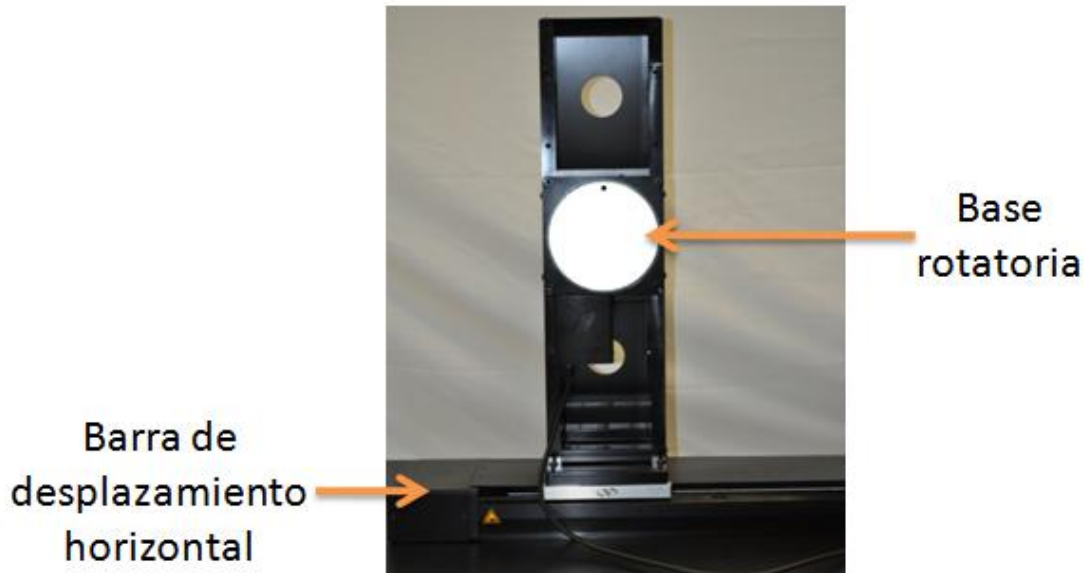


Figura 5.8 Imagen capturada durante la simulación del movimiento en dos dimensiones. Bases mecánicas para rotación y desplazamiento.

Cada una de estas imágenes es preprocesada para extraer solamente la información del movimiento simulado, y posteriormente se binariza la imagen con umbral igual a 200, así se obtiene la información del centroide. Una vez conocidos todos los valores de cada uno de los centroides para toda la secuencia de imágenes, estos son graficados y se obtiene la función de movimiento. En la Figura 5.9 se muestra parcialmente la interfaz gráfica del programa realizado para la captura de las imágenes. En la siguiente sección se muestran cada una de las gráficas para los movimientos lineal en un plano, circular y elíptico.

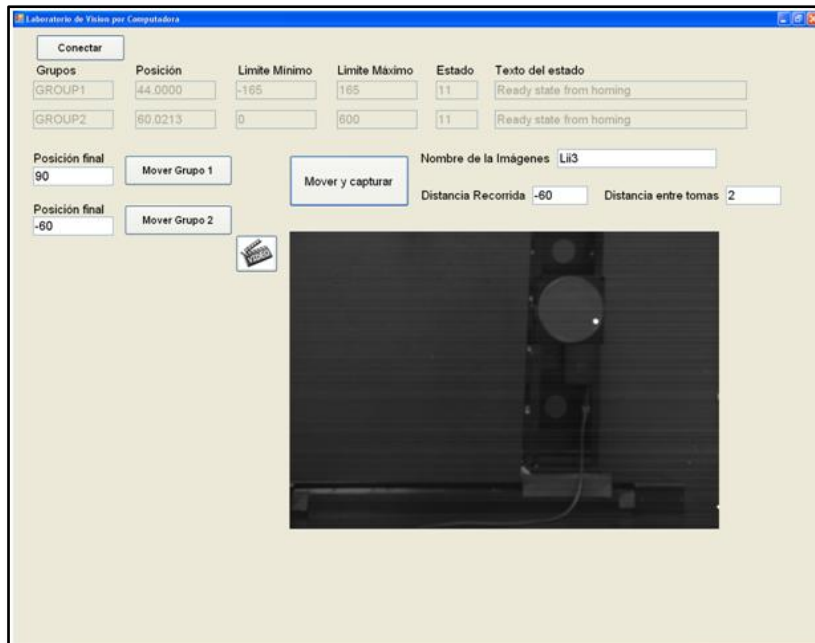


Figura 5.9 Interfaz gráfica del programa utilizado para la manipulación y captura de los movimientos.

Finalmente, debido a que la base rotatoria con la que se cuenta en el laboratorio tiene un intervalo angular de  $[0^\circ, 330^\circ]$  aparecen huecos entre el punto final y el punto inicial, en las gráficas de la elipse y la circunferencia. En las Figura 5.10 se muestran algunas posiciones del objeto y parte de la interface gráfica programada.

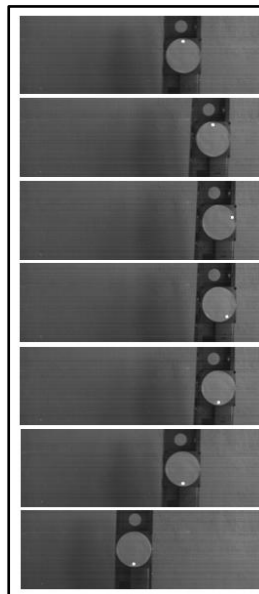
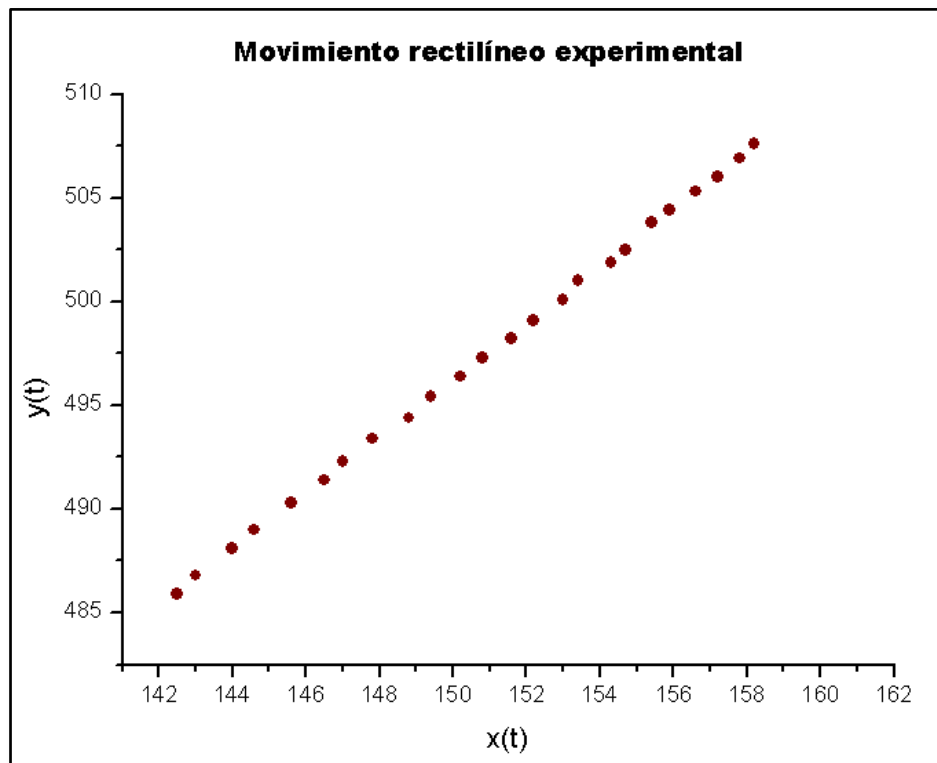


Figura 5.10 Secuencia de imágenes para obtener la función de movimiento. Al rotar la base, el objeto puntual se mueve en forma circular.

### 5.3.3.1 Movimiento lineal en un plano. Caso dos dimensiones

Modificando los parámetros de tiempo de captura, velocidad y dirección de los dos movimientos que permite el controlador universal y con el que se cuenta en el laboratorio, se hacen combinaciones para lograr simular los distintos movimientos.

En el caso del movimiento rectilíneo, el tiempo de captura es igual a 0.5 segundos, para la base que genera el movimiento circular, se tiene una velocidad de 10 mm/seg. mientras se mueve la base de desplazamiento horizontal hacia la izquierda. Para la base rotatoria, la velocidad es de  $5^\circ/\text{seg.}$  y el movimiento se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj, para el caso de este movimiento se utiliza el movimiento de la base en un rango de  $280^\circ$  a  $325^\circ$ . Con la combinación de estos movimientos se obtiene la gráfica de la Figura 5.11.



5.11 Movimiento rectilíneo experimental en un plano. Los ejes son funciones paramétricas del tiempo, con las posiciones resultantes del centroide del objeto.



A partir de esta función de movimiento es posible obtener la gráfica de su MTF, esta se muestra en la Figura 5.12

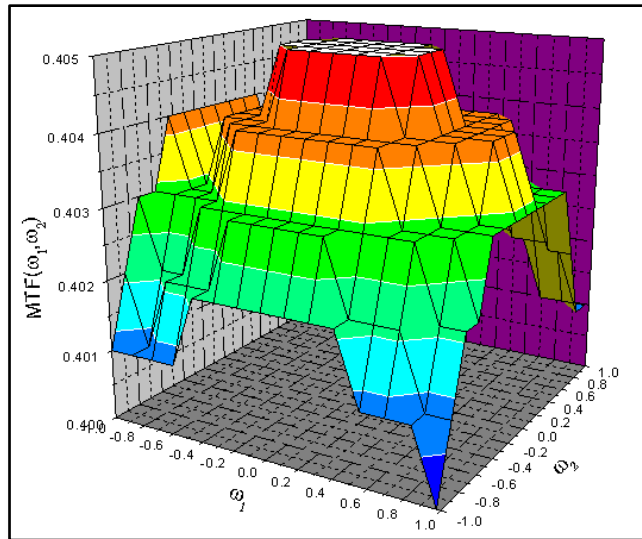


Figura 5.12 MTF experimental, para la función de movimiento rectilíneo gráfícada en la Figura 5.10 con orden  $p + q = 224$

Se toman los datos de esta gráfica para obtener el mapa de intensidades de la Figura 5.13, como se puede observar el movimiento es simétrico con respecto de los ejes. Debido a la escasa cantidad de frecuencias obtenidas sólo se logra visualizar un lóbulo de la MTF.

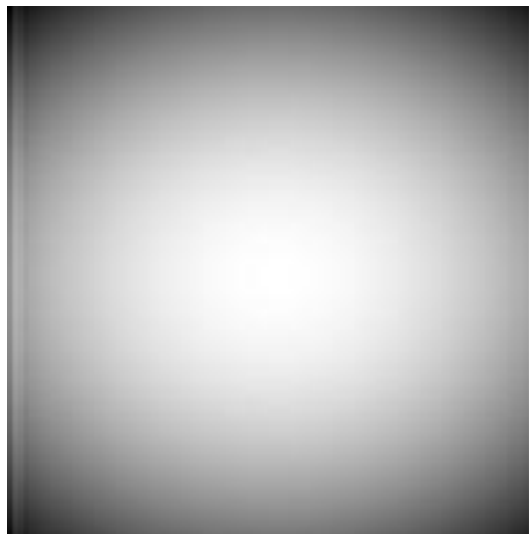


Figura 5.13 Mapa de intensidades de la MTF para el movimiento rectilíneo experimental

Haciendo un barrido a lo largo del eje horizontal de la MTF obtenida, se tiene la gráfica de la Figura 5.14.

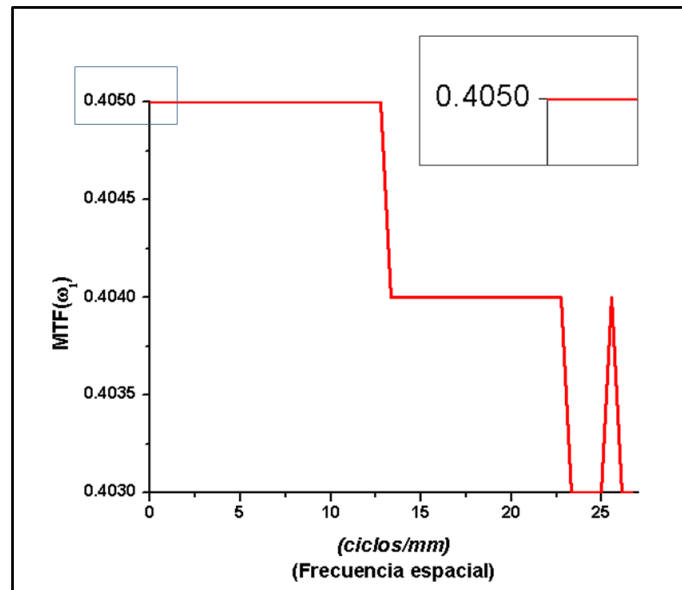
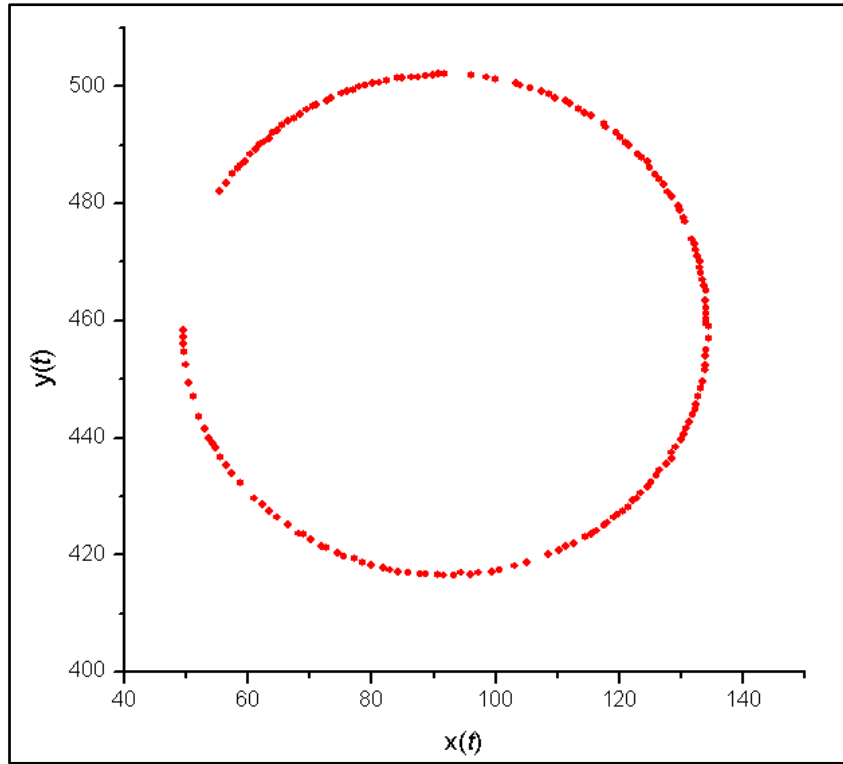


Figura 5.14 Perfil X para el movimiento rectilíneo experimental con orden  $p + q = 224$

En ella es posible observar la tendencia de la MTF a una frecuencia de corte  $f_c = 23$  ciclos por  $mm$ . Es importante notar que la MTF máxima es de 0.405, esto implica que el sistema no tiene una buena resolución aún en bajas frecuencias. Este hecho deriva de que la velocidad del movimiento es mayor al tiempo de exposición generando una mayor borrosidad.

### 5.3.3.2 Movimiento circular

Para el movimiento circular solamente se hizo uso de la base rotatoria, con una velocidad de  $5^\circ/\text{seg}$ . y capturando para cada 0.2 segundos. Como se puede ver en la gráfica de la Figura 5.15 sólo se capturo el movimiento en un rango de  $0^\circ$  a  $330^\circ$  debido a que la base sólo maneja este rango.



5.15 Centroide de un objeto con movimiento circular. Datos obtenidos experimentalmente.

Se calcula la MTF para el movimiento circular obtenido experimentalmente y se gráfica en la Figura 5.16

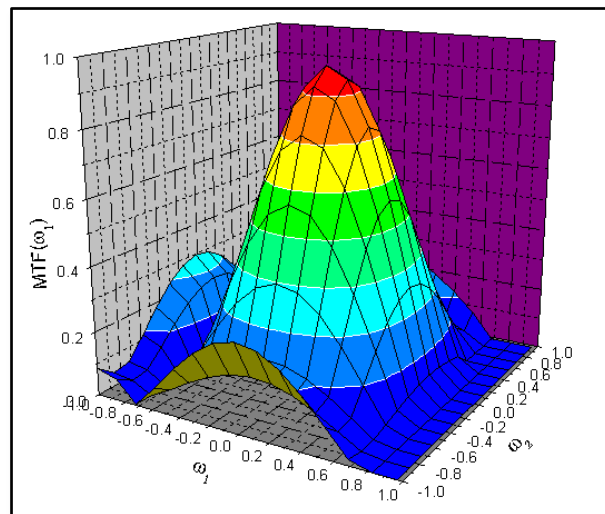


Figura 5.16 MTF experimental para la función de movimiento circular con orden  $p + q = 226$

Se puede observar que la MTF obtenida es simétrica con respecto de los ejes, ya que el movimiento circular es simétrico. Se muestra en la Figura 5.17 el mapa de intensidades correspondiente a la MTF calculada.

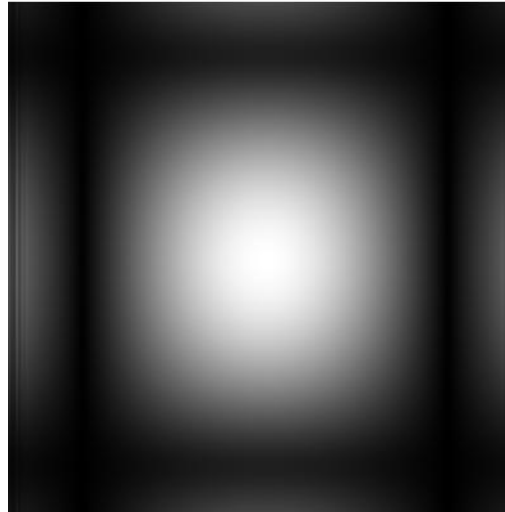


Figura 5.17 MTF experimental, mapa de intensidades para el movimiento circular.

Tomando esta imagen y graficando en una dimensión uno de los perfiles, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 5.18.

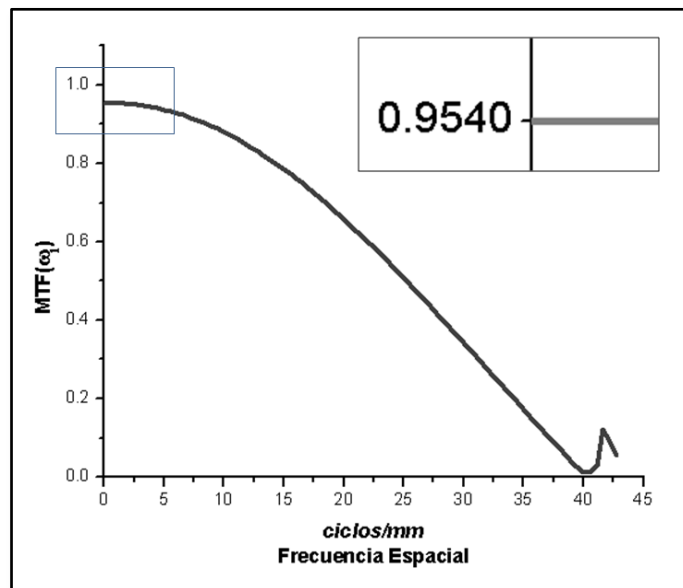
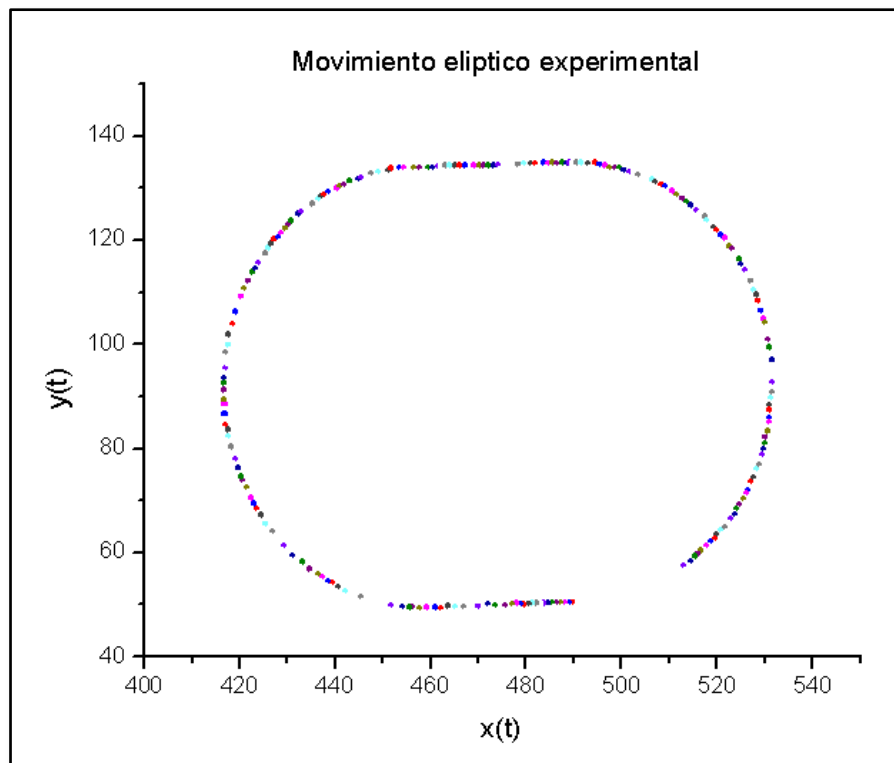


Figura 5.18 Perfil X de la MTF obtenida para el movimiento circular experimental con orden  $p + q = 226$

Se puede observar en la Figura 5.18 que la frecuencia de corte  $f_c = 40$  ciclos/mm y que la MTF máxima es de 0.95

### 5.3.3.3 Movimiento elíptico

Para el movimiento elíptico, se programaron los movimientos de modo tal que se realizara primero el movimiento lineal, a la derecha, con una velocidad de 8 mm/seg. durante 180 mm y enseguida comienza el movimiento rotatorio con una velocidad de  $5^\circ/\text{seg.}$  durante  $180^\circ$ , terminando este movimiento comienza nuevamente el movimiento lineal ahora a la izquierda a la misma velocidad y por un recorrido igual al anterior (180 mm) iniciando ahora el movimiento circular por los  $150^\circ$  restantes, esto debido nuevamente al rango de la base rotatoria. La gráfica obtenida al seguir el centroide del movimiento se muestra en la Figura 5.19



5.19 Movimiento elíptico experimental

Al calcular la *MTF* para el movimiento elíptico experimental, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 5.20, en ella se puede observar que existen dos frecuencias de corte.

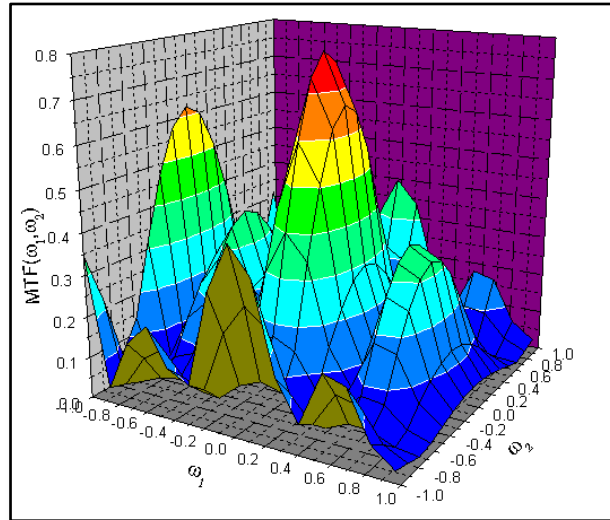


Figura 5.20 MTF para el movimiento elíptico experimental

Proyectando la *MTF* calculada como un mapa de intensidades, se obtiene la imagen mostrada en la Figura 5.21.

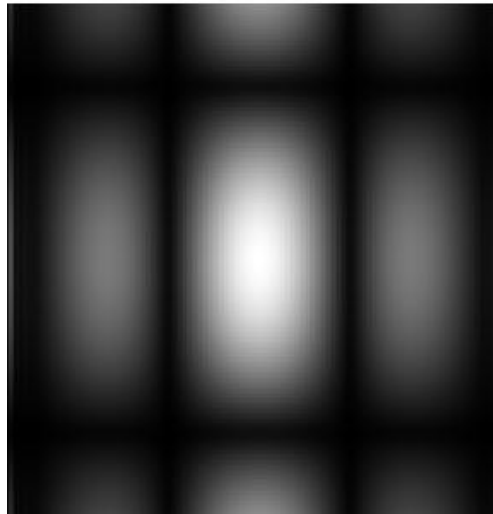


Figura 5.21 MTF experimental, mapa de intensidades del movimiento elíptico.

Al realizar un barrido sobre los ejes *X* e *Y* se tienen las gráficas mostradas en las Figs. 5.22 y 5.23.

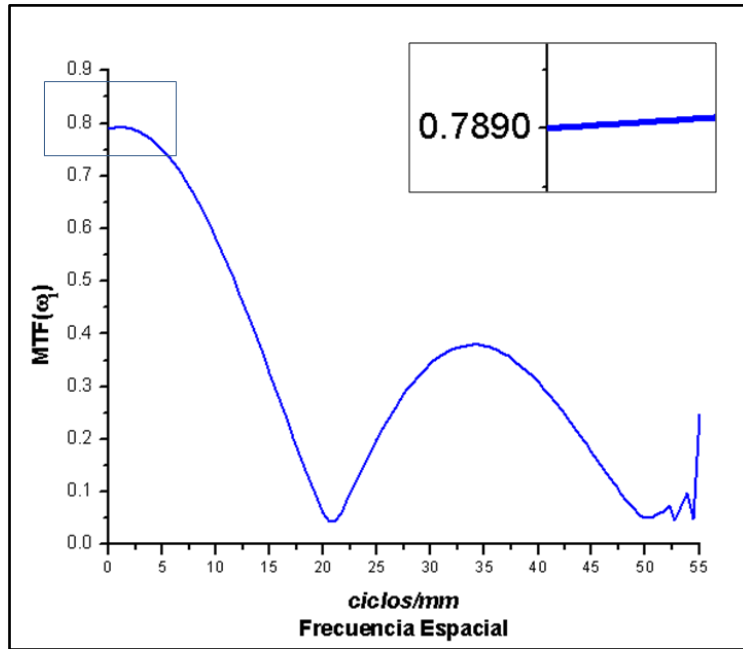


Figura 5.22 Perfil X en una dimensión de la MTF obtenida para el movimiento elíptico experimental.

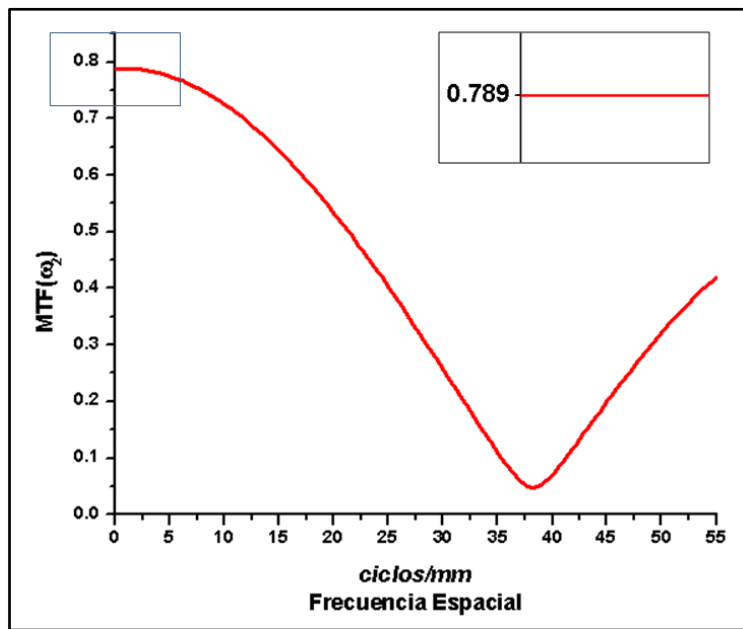


Figura 5.23 Perfil Y en una dimensión de la MTF obtenida parel movimiento elíptico experimental.

Se pueden observar las dos frecuencias de corte en cada uno de los ejes,  $f_c = 21$  y  $f_c = 38$  ciclos por  $mm$ . Así como que la MTF máxima en X y Y es de 0.79.

## 5.4 Aplicaciones

Considere una fábrica de manufactura de botellas de PET, a través del método de inyección y soplado. Durante el proceso las boquillas de las inyectoras pueden ensuciarse con rebabas de material, esto provoca que las piezas producidas presenten un defecto en el sello de la botella. Este defecto provoca que el contenido de la botella no se conserve.

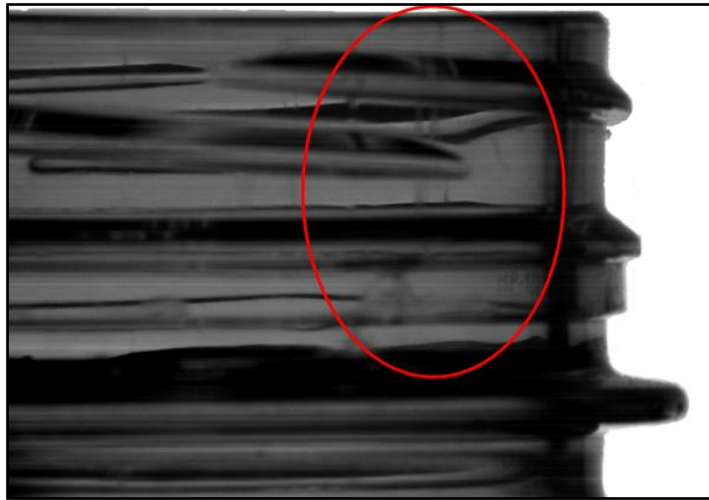


Figura 5.24 Imagen del sello de la botella con defectos.

Para poder detectar este defecto se utiliza un sistema de Control de Calidad a través de la captura de imágenes de las botellas. Las botellas van girando sobre su propio eje, lo cual provoca un cierto grado de borrosidad en las imágenes capturadas. Conociendo la función de movimiento que siguen las botellas es posible caracterizar el sistema de adquisición, a través de la MTF y restaurar las imágenes.

Para poder realizar el experimento se utiliza el mismo sistema de adquisición pero ahora con dos cámaras, y se capturan vistas superior y lateral de una botella girando sobre su propio eje. Para llevar a cabo el movimiento se utiliza un motor de 12 volts, alimentada por una fuente de voltaje con rangos de 0 a 30 volts y 0 a 3 Amperes. El sistema se muestra en la Figura 5.25.



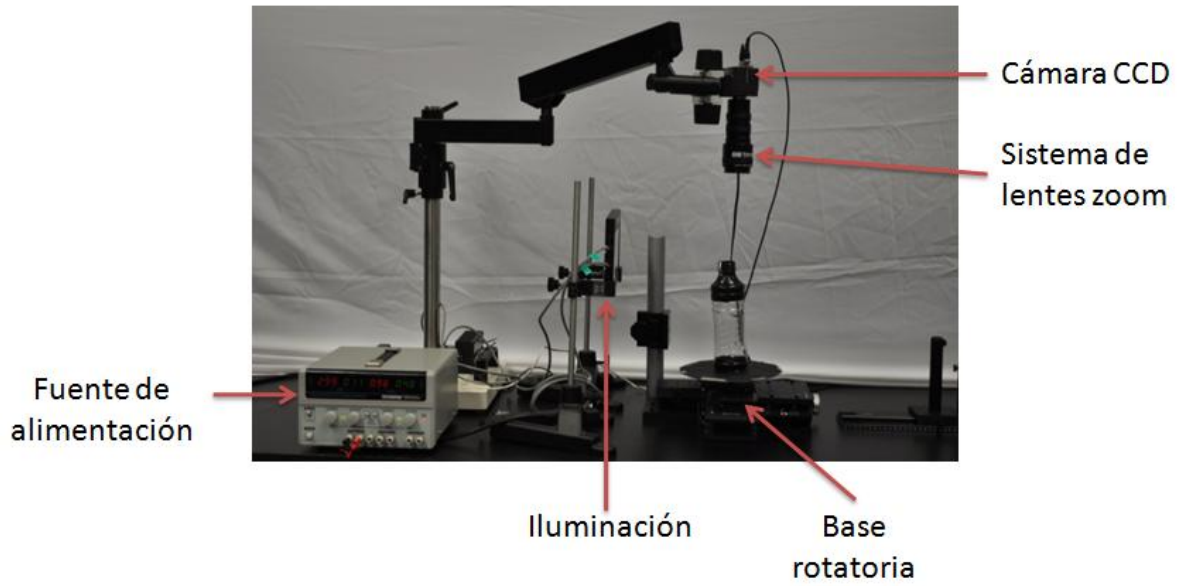


Figura 5.25 Fotografía del sistema óptico y de movimiento circular.

Se capturan imágenes para tres velocidades distintas, estas fueron elegidas debido a que el equipo con el que se cuenta en el laboratorio, permite estas tres velocidades sin que la imagen del defecto salga del campo de visión de la cámara, se utilizó la cámara superior, como se puede observar en la Figura 5.26

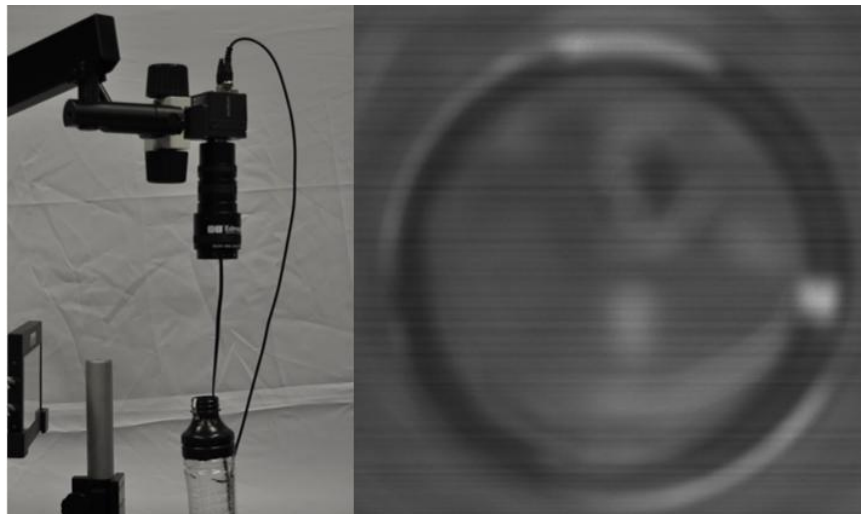


Figura 5.26 Vista superior del sistema

A partir de una secuencia de  $N = 200$  imágenes se puede obtener la función de movimiento del punto del objeto a través de seguir el centroide de cada una de las imágenes.



Figura 5.27 Vista lateral y vista superior de una botella que presenta una grieta

Como se puede observar en la Figura 5.27 se marco el cuello de la botella para visualizar la posición de la grieta, para poder realizar el seguimiento del centroide es necesario cortar y binarizar previamente las imágenes. Una vez que se obtiene el centroide de estas imágenes se obtiene la función de movimiento, la trayectoria descrita se muestra en la Figura 5.28

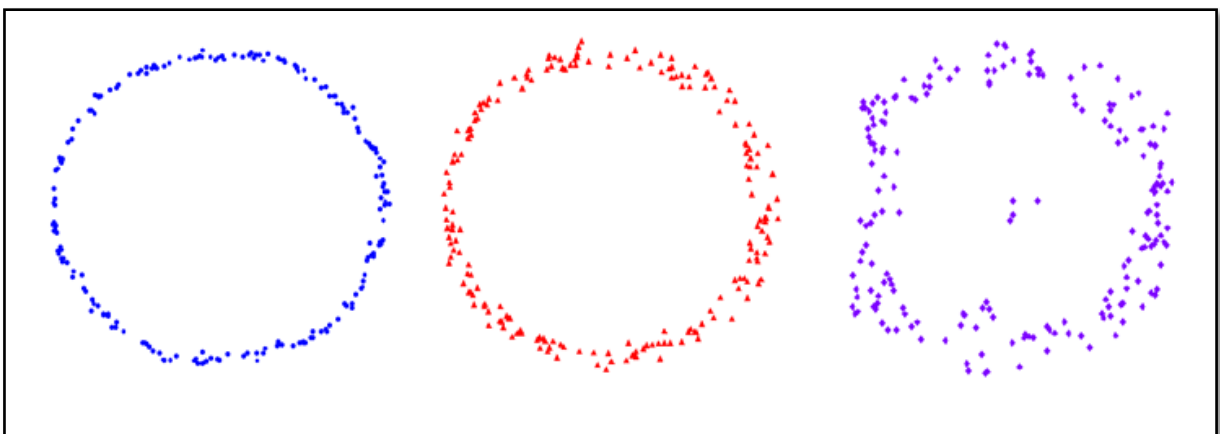


Figura 5.28 Trayectorias circulares obtenidas a 3 velocidades radiales diferentes.

A partir de estas trayectorias es posible calcular la MTF para el sistema, en las Figuras 5.29, 5.30 y 5.31 se muestran los resultados para cada una de las velocidades. Para cada caso se tiene respectivamente. a) MTF en dos dimensiones, b) Mapa de intensidades, c) Perfil en X de la MTF y d) Perfil en Y de la MTF.

l)  $\omega_1$

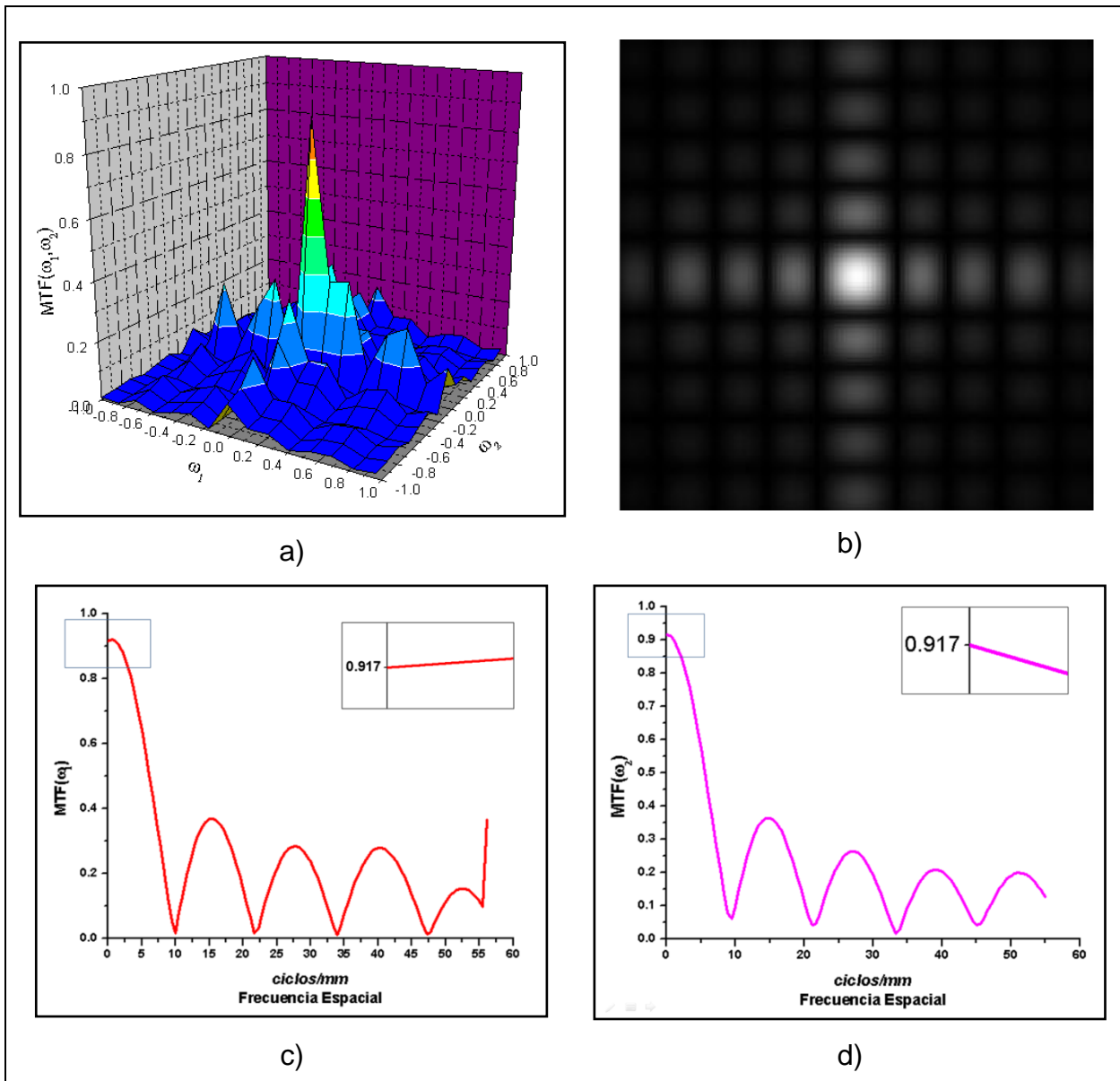
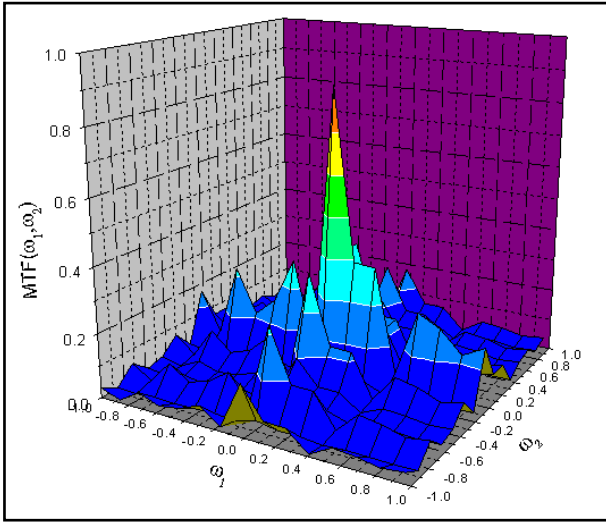
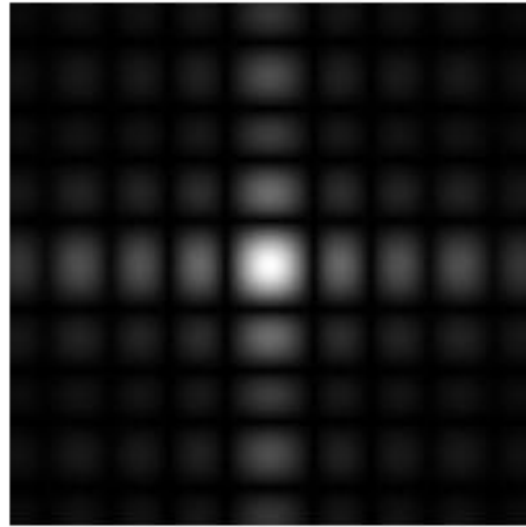


Figura 5.29 Resultados para  $\omega_1$

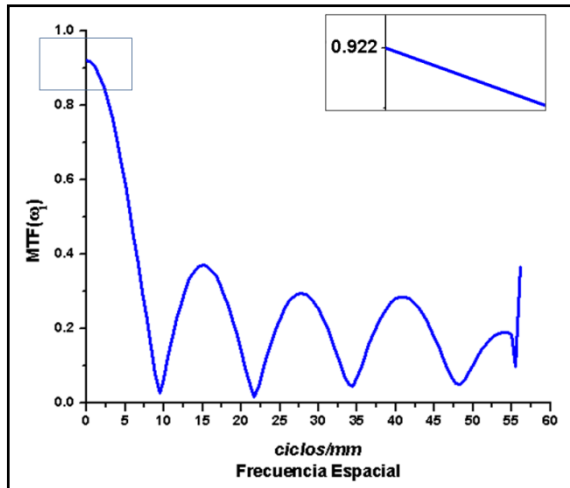
II)  $\omega_2$



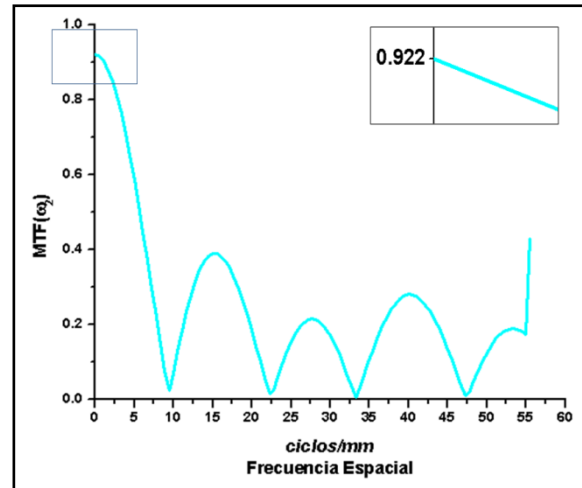
a)



b)



c)



d)

Figura 5.30 Resultados para  $\omega_2$

III)  $\omega_3$

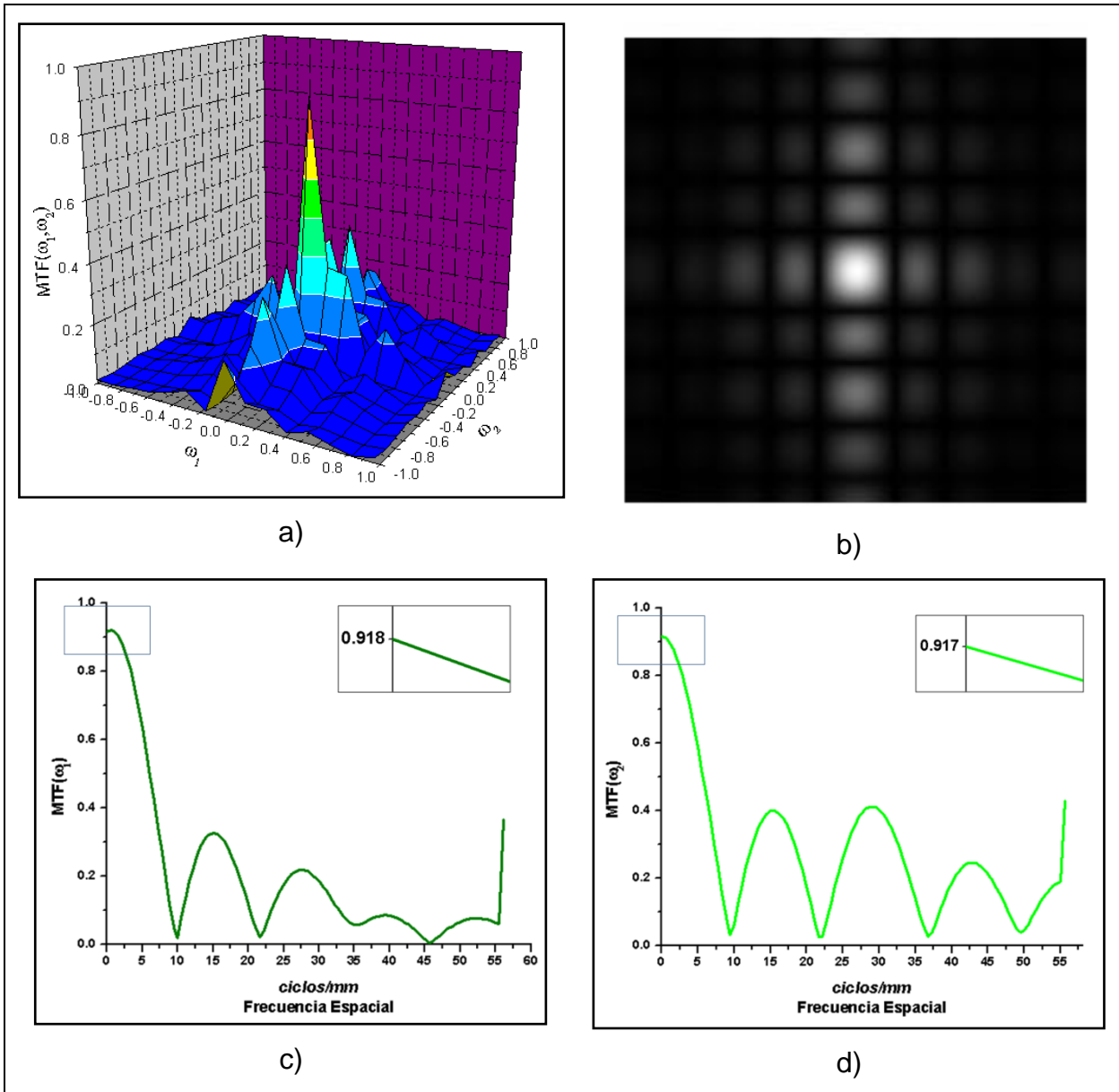
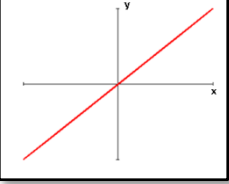
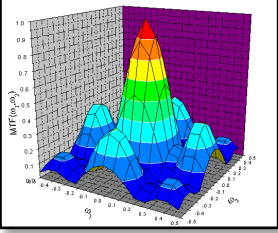
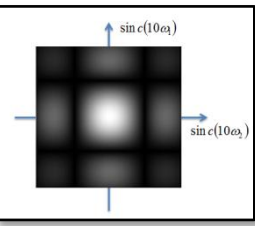
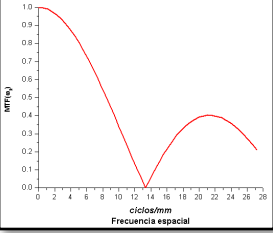
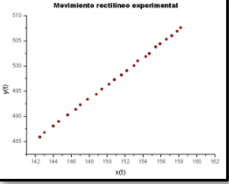
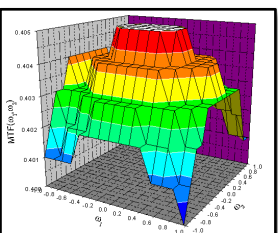
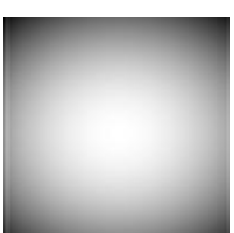
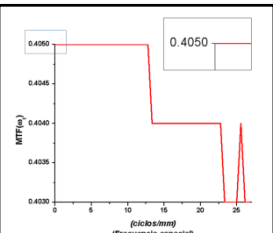
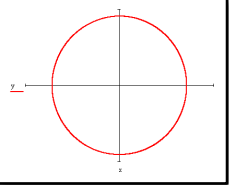
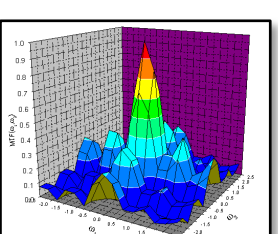
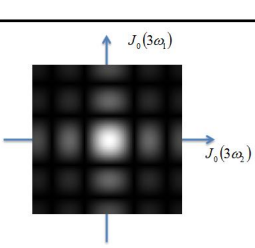
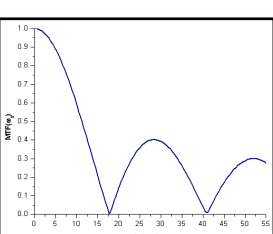
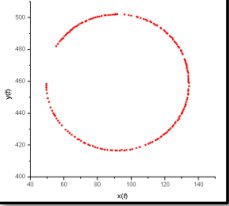
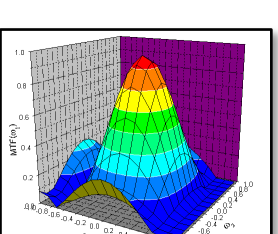
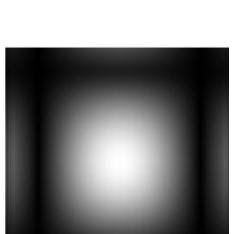
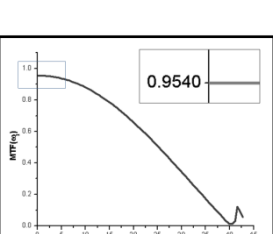


Figura 5.31 Resultados para  $\omega_3$

Se puede observar en las gráficas c) y d) de las Figuras 5.29, 5.30 y 5.31 que la frecuencia de corte  $f_c \cong 10$  ciclos por  $mm$  para las tres velocidades capturadas, se observa también que existe una variación en el valor máximo de la MTF obtenida para cada caso.

## 5.5 Análisis de los Resultados

En la Tabla IV se muestra la comparación entre los resultados obtenidos en la simulación y experimentalmente.

 <p>Simulación del Movimiento lineal <math>y = x</math></p>			
 <p>Movimiento rectilíneo experimental</p> <p>Movimiento lineal experimental</p>			
 <p>Simulación del Movimiento Circular</p>			
 <p>Movimiento circular experimental</p>			

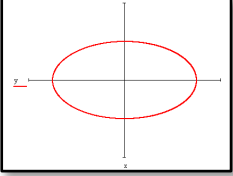
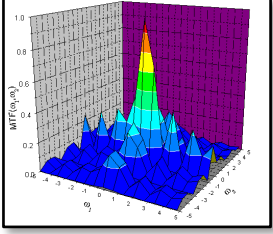
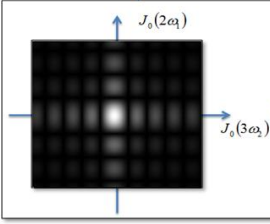
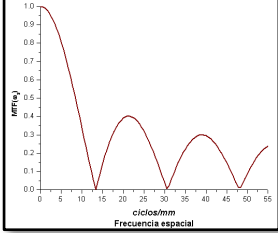
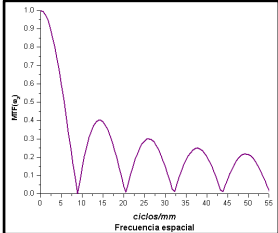
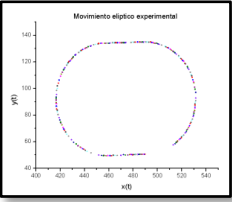
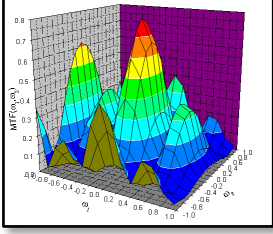
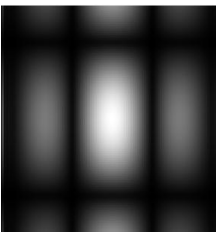
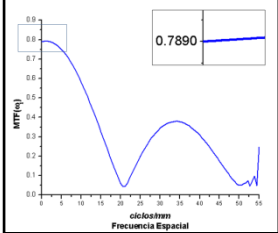
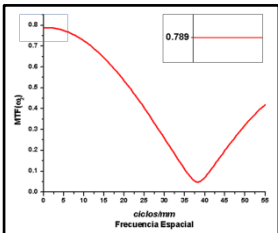
 <p>Simulación del Movimiento Elíptico</p>			 
 <p>Movimiento elíptico experimental</p>			 

Tabla IV. Comparación entre los resultados obtenidos para los movimientos simulados y los movimientos experimentales.

Se puede observar en la Tabla IV que los resultados obtenidos experimentalmente presentan similitud en el tipo de funciones graficadas al hacer un barrido sobre el mapa de intensidades, con los resultados obtenidos en la simulación de los movimientos, la diferencia existente se debe a la cantidad de puntos obtenidos para cada trayectoria. Se puede observar también que la simetría de las trayectorias es un modulador de la simetría de la MTF en dos dimensiones.

En las Figuras 5.32 y 5.33 se muestran los perfiles de la MTF para las tres velocidades, en ellas se puede ver que la frecuencia de corte se mantiene constante

en 10 ciclos/mm y que el valor de la MTF es el que se modifica debido al cambio de velocidad en el movimiento, teniendo en X e Y una MTF máxima de  $MTF_{m\acute{a}x} = 0.922$  para  $v = 1/5\pi$  y para  $v = 1/9\pi$  y  $v = 2/9\pi$  la  $MTF_{m\acute{a}x} = 0.917$

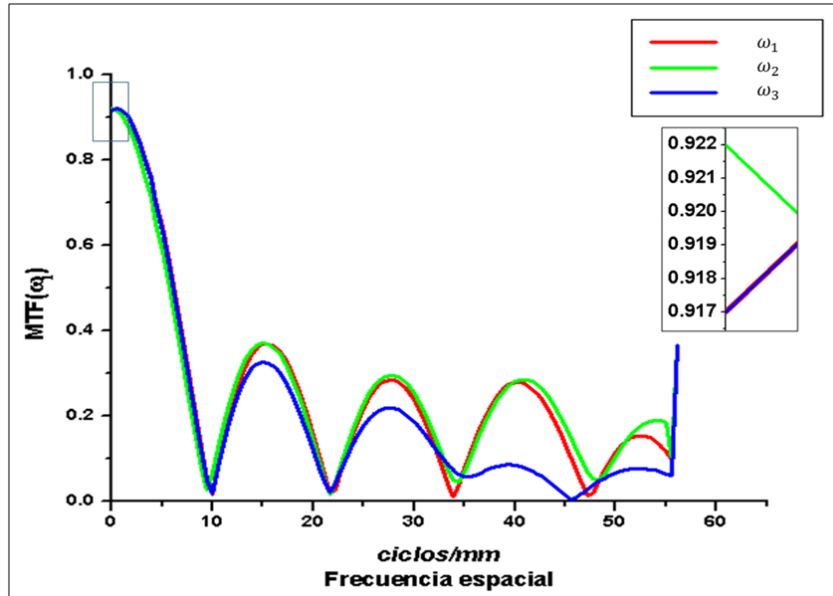


Figura 5.32 Perfil en X de la MTF para las 3 velocidades radiales diferentes

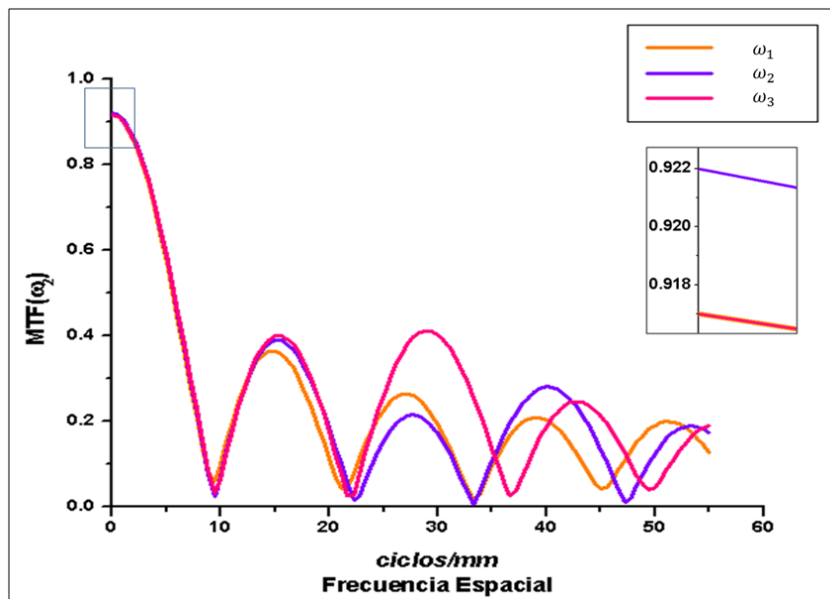


Figura 5.33 Perfil en Y de la MTF para las 3 velocidades radiales diferentes

En el siguiente capítulo se muestran las conclusiones del presente trabajo de Tesis.



## CAPÍTULO 6.

### CONCLUSIONES

Se implementó el método de momentos para seguir trayectorias de objetos que se mueven en dos dimensiones. Se desarrollo el análisis de los momentos en dos dimensiones para funciones de movimiento resultantes de dos movimientos vibratorios perpendiculares entre sí. Se obtuvo el centroide de cada imagen a partir de sus momentos geométricos. Se estudiaron los movimientos lineal en un plano, el movimiento circular y elíptico, así como la familia de figuras de Lissajous, esto variando las amplitudes, frecuencias y diferencias de fase entre los dos movimientos vibratorios.

Se extendió el tratamiento del método de momentos a dos dimensiones. Se realizó el cálculo de la MTF en dos dimensiones para los casos de movimiento circular y elíptico, así como el lineal en un plano. A partir de la función de movimiento obtenida al seguir la trayectoria descrita por los centroides de las secuencias de imágenes, para movimientos simulados y experimentales.

A partir del cálculo y la obtención de resultados se observó que la geometría de la MTF en dos dimensiones depende no sólo de la velocidad del movimiento, sino también de la geometría que presenta la trayectoria que sigue el objeto de prueba. Se obtuvo entonces que los movimientos lineales simétricos y antisimétricos tienen una MTF resultante del producto de dos funciones *sinc*, y los movimientos circular y elíptico tienen una MTF resultante del producto de dos funciones de *Bessel*.

En el campo de aplicación del método se realizó el seguimiento de defectos en el sello de botellas de PET, fabricadas con un método de inyección y soplado. Obteniendo la MTF experimental a partir de las imágenes capturadas. A partir de la MTF fue posible conocer la capacidad de resolución del sistema de adquisición utilizado para realizar el seguimiento del defecto a tres distintas velocidades. La capacidad de resolución del sistema óptico – digital de adquisición de imágenes de objetos bajo movimiento circular fue de una modulación de  $0.3$  para  $8$  ciclos/mm en  $X$  y de  $7$  ciclos/mm en  $Y$ .

## REFERENCIAS

1. G. B. Airy, On the Diffraction of an Object Glass with Circular Aperture Trans. Cambridge Philos. Soc. 5, 283 (1835).
2. Jurgen R. Meyer-Arendt. Introduction to classical and modern optics, Ed. Prentice Hall, (1984), 559 pgs.
3. Max Born and Emil Wolf. Principles of Optics, 7th ed. Cambridge University Press.
4. Williams, Charles S; Becklund Orville A. "*Introduction to the Optical Transfer Function*", SPIE Press, (2002).
5. Malacara, Daniel. "*Óptica Básica*", Fondo de Cultura Económica, 2 da. Ed. México (2004).
6. Dorrosoro Díaz, Carlos. "*Estudio de una unidad de medida de MTF por métodos directos; Puesta a punto, ajuste, calibración y aplicaciones*". Tesina de Licenciatura, Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias. Junio (1997).
7. McKelvey, John P; Grotch, Howard. "*Física para ciencias e ingeniería*", Harper & Row Latinoamérica, 1ra. Ed.
8. Saveliev I.V; "*Curso de Física General*", Tomo 1, Ed. Mir-Moscú, (1984).
9. Goodman, Joseph W., "*Introduction to Fourier Optics*". Roberts and Company Publishers, 3ra ed. (2004).
10. R Mukundan, K R Ramakrishnan, "*Moment Functions in Image Analysis. Theory and applications*". World Scientific (1998).
11. G. R. V. Kumar and K. Sayanagi, "*Measurement of Optical Transfer Function by its Moments*," J. Opt. Soc. Am. 58, 1369-1370 (1968)

12. A. Stern and N. S. Kopeika "Analytical method to calculate optical transfer functions for image motion and vibrations using moments" J. Opt. Soc. Am. A, 14 (2), (1997).
13. M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. McGraw-Hill, New York, (1968), pp. 75–76, Eqs. 14.339, 14.347, and 17.366.
14. A. Stern and N. S. Kopeika "Optical transfer function analysis of images blurred by nonharmonic vibrations characterized by their power spectrum density" J. Opt. Soc. Am. A, 16 (9), (1999).
15. D. Wulich and N. S. Kopeika, "Image resolution limits resulting from mechanical vibration", Opt. Eng. 26, 529–533 (1987).
16. Optical Instruments and Techniques, Proceedings of the conference held in London, 1961. Edited by K. J. Habell. London: Chapman and Hall Ltd, 1962., p.95
17. Sayanagi, K, "The role of optical transfer function in optical design techniques". (1962).
18. Shigang Wang, Baiqing Guan, Guabao Wang, Qian Li, "Measurement of sinusoidal vibration from motion blurred images". Pattern Recognition Letters 28 (2007) 1029-1040. Science Direct
19. Giulio Fanti, Roberto Basso, "MTF resolution of images obtained without an acquisition system". *International Conference on the shroud of Turin: "Perspectives of a multifaced enigma"*. Columbus-Ohio. August 14-17, (2008).
20. O. Hadar, I. Dror, and N. S. Kopeika, "Image resolution limits resulting from mechanical vibration. Part IV: Real time numerical calculation of optical transfer functions and experimental verification", Opt. Eng. 33, 566–578 (1994).

21. Toxqui Quitl, Carina. *“Clasificación de Objetos en movimiento usando momentos de Jacobi-Fourier y la MTF del Sistema Óptico Digital”*. Tesis Doctoral, INAOE, Mayo 2010.
22. Guirao Piñeira, Antonio. *“Calidad Óptica del ojo humano en función de la Edad”*. Tesis doctoral, Universidad de Murcia, Septiembre 1998.
23. Cinemática de la partícula (G.I.T.I.).  
[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Cinem%C3%A1tica\\_de\\_la\\_part%C3%ADcula\\_%28G.I.T.I.%29#Trayectoria](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Cinem%C3%A1tica_de_la_part%C3%ADcula_%28G.I.T.I.%29#Trayectoria)
24. Guiones de MECÁNICA I  
[http://server.faiia.upm.es/mecanica\\_/apuntes/apuntes.html](http://server.faiia.upm.es/mecanica_/apuntes/apuntes.html)
25. Manual de cámara CCD, <http://www.hitachikokusai.com>
26. George B. Parrent and Brian J. Thompson, “Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics”, SPIE Optical Engineering Press, 1989



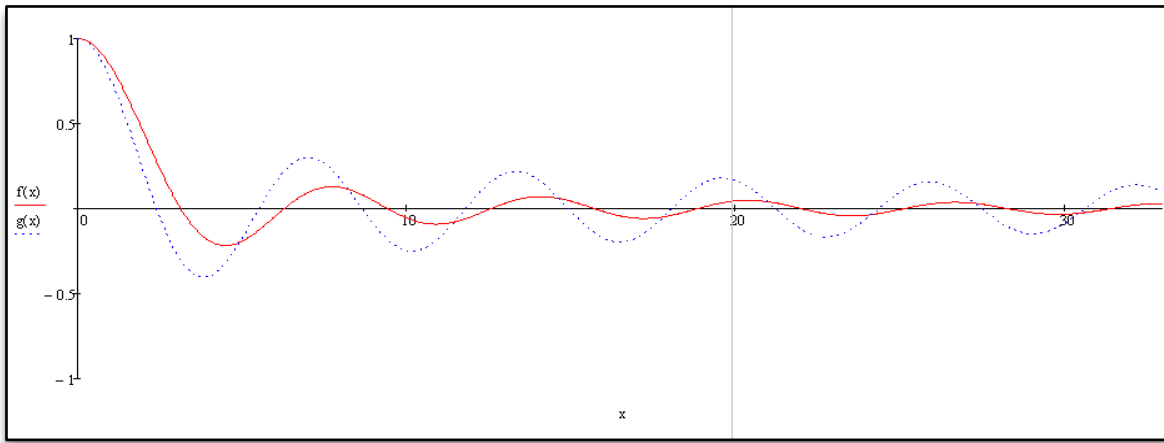
# APENDICES





## APENDICE A.

### Ceros de las funciones de Bessel ( $J_0$ ) y Sinc

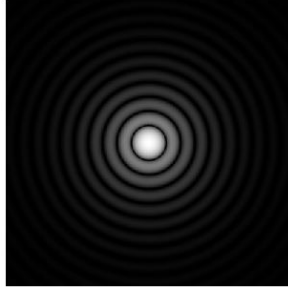


<b>x</b>	<b><math>J_0(x)</math></b>	<b>Sinc(x)</b>
<b>2.404826</b>	<b>0.000000</b>	0.279395
3.141593	-0.304242	0.000000
<b>5.520078</b>	<b>0.000000</b>	-0.125210
6.283185	0.220277	0.000000
<b>11.791534</b>	<b>0.000000</b>	-0.059331
12.566371	0.157507	0.000000
<b>14.930918</b>	<b>0.000000</b>	0.046961
15.707963	-0.141182	0.000000
<b>18.071064</b>	<b>0.000000</b>	-0.038858
21.991149	-0.119609	0.000000
<b>24.352472</b>	<b>0.000000</b>	-0.028887
25.132741	0.111968	0.000000
<b>27.493479</b>	<b>0.000000</b>	0.025602
28.274334	-0.105625	0.000000

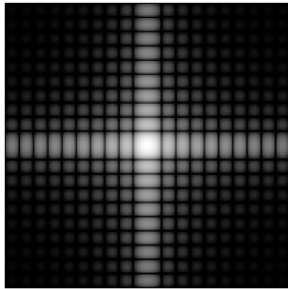
## APENDICE B.

Mapas de intensidad de las Funciones Bessel ( $J_0$ ) y Sinc

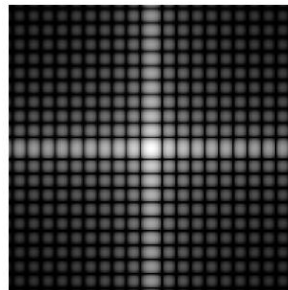
a) Mapa de intensidades de la función de Bessel



b) Mapa de intensidades del producto de dos funciones *sinc*



c) Mapa de intensidades del producto de dos funciones de Bessel



## APENDICE C.

Códigos de programas en Mathcad versión 14

### Binarizar

```
binarizar(I, nivel) := | N ← cols(I)
                       | M ← rows(I)
                       | for i ∈ 0..M - 1
                       |   for j ∈ 0..N - 1
                       |     | ki,j ← 255 if Ii,j ≥ nivel
                       |     | ki,j ← 0 otherwise
                       | k
```

### Momentos

```
momentos(I, orden) := | M ← rows(I)
                       | N ← cols(I)
                       | for p ∈ 0..orden
                       |   for q ∈ 0..orden
                       |     mp,q ←  $\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (i^p \cdot j^q \cdot I_{i,j})$ 
                       |
                       | xc ←  $\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}$ 
                       |
                       | yc ←  $\frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}$ 
                       |
                       | cen ← augment(xc, yc)
                       | cen
```

## Momentos centrales

```
momentos_centrales(I,orden) := | M ← rows(I)
                                | N ← cols(I)
                                | for k ∈ 0..orden
                                |   for l ∈ 0..orden
                                |     
$$m_{k,l} \leftarrow \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left( i^k \cdot j^l \cdot I_{i,j} \right)$$

                                |
                                |     
$$xc \leftarrow \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}$$

                                |
                                |     
$$yc \leftarrow \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}$$

                                |   for p ∈ 0..orden
                                |     for q ∈ 0..orden
                                |       
$$mc_{p,q} \leftarrow \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ (i - xc)^p \cdot (j - yc)^q \cdot I_{i,j} \right]$$

                                | mc
```

## Figuras de Lissajous

$$a := 0 \quad b := 10$$

$$N := 1000$$

$$\Delta := \frac{b - a}{N}$$

$$A := 3$$

$$B := 2$$

$$i := 0, 1..N$$

$$\Delta = 1 \times 10^{-3}$$

$$t_i := 1\Delta \cdot i$$

$$\omega_1 := 10$$

$$\omega_2 := 10$$

$$\alpha := \frac{\pi}{2}$$

$$x_i := A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t_i)$$

$$y_i := B \cdot \cos(\omega_2 \cdot t_i + \alpha)$$

## Cálculo de la MTF

```

MTF(D1, D2, w1, w2, pf, qf, N) :=
  p ← 0
  q ← 0
  Δ1 ←  $\frac{w1}{N}$ 
  Δ2 ←  $\frac{w2}{N}$ 
  aux0 ← 0
  for j ∈ 0..N - 1
    ω1j ←  $-\left(\frac{w1}{2}\right) + \Delta1 \cdot j$ 
    ω2j ←  $-\left(\frac{w2}{2}\right) + \Delta2 \cdot j$ 
    for p ∈ 0..pf - 1
      auxp ←  $\frac{D1^p \cdot (i \cdot \omega1_j)^p}{2^p \cdot \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^2}$  if mod(p, 2) = 0
      auxp ← 0 otherwise
      OTF1j ←  $\sum_{p=0}^{pf-1} aux_p$ 
    for q ∈ 1..qf
      auxq ←  $\frac{D2^q \cdot (i \cdot \omega2_j)^q}{2^q \cdot \left[\left(\frac{q}{2}\right)!\right]^2}$  if mod(q, 2) = 0
      auxq ← 0 otherwise
      OTF2j ←  $\sum_{q=0}^{qf-1} aux_q$ 
  MTF ←  $\overrightarrow{OTF1} \cdot \overrightarrow{OTF2^T}$ 
  MTF

```

## Cortar

```
cortar(image, x1, x2, y1, y2) :=  $\left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ l \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in x1..x2 \\ \quad \text{for } j \in y1..y2 \\ \quad \quad B_{i-x1, j-y1} \leftarrow \text{image}_{i,j} \end{array} \right.$   
B
```