

U

P

T

**Reconstrucción de imágenes digitales  
usando funciones momento  
ortogonales**

por

**Lucía Gutiérrez Lazcano**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

**MAESTRO EN COMPUTACIÓN ÓPTICA**

en la

**Universidad Politécnica de Tulancingo**

**Febrero 2012**

**Tulancingo, Hidalgo**

Supervisado por:

**Dra. Carina Toxqui Quitl**

**M. en C. O. César Joel Camacho Bello**

@UPT 2012

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y distribuir  
copias en su totalidad o en partes de esta tesis





# Dedicatoria

A mis padres y hermanos por su apoyo incondicional.



# Agradecimientos



Al Laboratorio de Óptica y Visión por Computadora de la Universidad Politécnica de Tulancingo por las facilidades otorgadas para llevar a cabo esta Tesis.

A la Universidad Politécnica de Tulancingo por el apoyo otorgado a través de una beca Académica de Investigación y Posgrado.

A los Drs. Luis Téllez Reyes y César Santiago Tepantlán por todo el apoyo otorgado para la realización de esta Tesis.

A la Dra. Carina Toxqui Quitl y al M. en C.O. César Joel Camacho Bello por su invaluable asesoría y dirección durante el desarrollo de esta Tesis.



# Prefacio

Un área importante de investigación en el procesamiento digital de imágenes es la derivación de descriptores de una imagen para aplicaciones de reconocimiento de patrones, recuperación de información y codificación de imágenes. Para ello, las funciones momento han surgido en la literatura como eficientes descriptores de formas.

Esta Tesis está orientada al análisis de funciones momento. El método estudiado está basado en polinomios ortogonales discretos de dominio cartesiano tales como Krawtchouk; y continuos de dominio circular: Jacobi-Fourier y Bessel-Fourier. Cada una de las funciones momento está determinada por una combinación infinita de parámetros. Se proponen a los algoritmos heurísticos como métodos de búsqueda de parámetros, cuya función de aptitud es el Error de Reconstrucción de Imágenes Normalizado (NIRE) y la correlación entre imágenes.

En el capítulo uno, se plantean los objetivos y aportaciones del trabajo de Tesis. En el capítulo dos, se hace un análisis gráfico y analítico de los polinomios Armónicos, Krawtchouk, Jacobi y Bessel, en términos del número de raíces o ceros y su distribución en el intervalo de radio unidad. En el capítulo tres se definen los momentos ortogonales de una imagen digital y se analiza la reconstrucción de la imagen a partir de sus momentos, con el fin de establecer el nivel de eficiencia de los conjuntos. En el capítulo cuatro se determina la utilidad y áreas de aplicación para los momentos cartesianos y circulares en función de sus capacidades de descripción y tiempos de cómputo. Finalmente, en el capítulo cinco se establecen las conclusiones del trabajo de tesis.



# Resumen

Este trabajo de Tesis se encuentra ubicado en el área de procesamiento y análisis de imágenes digitales, para la descripción y reconocimiento de formas. Conjuntos de polinomios ortogonales son usados como base de funciones de transformación en el dominio cartesiano y circular. Estas funciones son llamadas funciones momento y nos llevan de un espacio imagen a un espacio de descriptores. Los momentos analizados son los momentos Krawtchouk, Armónicos Seno, Jacobi-Fourier y Bessel-Fourier.

Se implementó la reconstrucción de imágenes digitales como una medida de la capacidad de descripción y convergencia de los diferentes momentos. Esta medida fue a través del Error de Reconstrucción de la Imagen Normalizado (NIRE) y la correlación entre la imagen original y la reconstruida. Cada una de las funciones momento dependen de la combinación infinita de parámetros, tales como orden armónico, orden radial, especie, familia y umbral entre otros.

El método de búsqueda de parámetros óptimos propuesto está basado en algoritmos genéticos. Los resultados de reconstrucción muestran que los momentos cartesianos logran recuperar alrededor del 100 % y del 94 % de la información para imágenes binarias y en niveles de gris, respectivamente. Por otra parte los momentos circulares son adecuados para la descripción invariante a la rotación, escala, traslación e intensidad del objeto en la imagen. Aunado a esto los tiempos de cómputo, determinan la aplicación de los momentos en áreas como fusión de imágenes, codificación, compresión y reconocimiento de patrones.



# Abstract

This thesis is oriented to the digital image processing for shape description and pattern recognition. Orthogonal basis functions are used as moment weighting kernel or the basis set. Several classes of orthogonal moments such as Krawtchouk, Armónicos, Jacobi-Fourier and Bessel-Fourier are analyzed. Image Reconstruction from moments measures the performance of moments for shape description as well as the convergence of them to the solution. This is through the Normalized Image Reconstruction Error (NIRE) and the correlation between the original and the reconstructed images. The variation of parameters, such as angular order, radial order, kind, threshold, form various types of orthogonal moments. Genetic algorithms (GA) are used to seek the optimal parameter values for image reconstruction. Reconstruction results shown that cartesian moments recover 100 % and 94 % of the binary and gray level images, respectively. On the other hand, circular moments are suitable for rotation and scale invariant shape description. Moreover, the computing time of the algorithms determines the application area of the moment functions as pattern recognition, image fusion, codification and compression.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Estado del Arte de la reconstrucción de momentos . . . . .	3
1.4. Aportaciones . . . . .	3
1.5. Bibliografía . . . . .	4
<b>2. Análisis de polinomios ortogonales</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Polinomios Genéricos de Jacobi . . . . .	7
2.2.1. Función radial generadora de los polinomios de Jacobi . . . . .	8
2.3. Polinomios Bessel . . . . .	16
2.3.1. Función Bessel de primer tipo . . . . .	16
2.4. Polinomios Krawtchouk . . . . .	22
2.5. Polinomios Armónicos . . . . .	23
2.6. Conclusiones . . . . .	26
2.7. Bibliografía . . . . .	27
<b>3. Reconstrucción de Imágenes a partir de funciones momento</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Momentos de una imagen . . . . .	30
3.2.1. Momentos Cartesianos . . . . .	31
3.2.2. Momentos Circulares . . . . .	33
3.3. Reconstrucción de Imágenes . . . . .	34
3.3.1. Reconstrucción usando momentos cartesianos . . . . .	34
3.3.2. Reconstrucción usando momentos circulares . . . . .	35
3.4. Determinación de parámetros . . . . .	37
3.5. Análisis de Error . . . . .	40
3.6. Resultados . . . . .	40
3.7. Conclusiones . . . . .	48

3.8. Bibliografía . . . . .	49
<b>4. Aplicaciones para el reconocimiento de patrones y fusión de imágenes</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. Fusión de Imágenes . . . . .	51
4.2.1. Fusión usando momentos Armónicos Seno . . . . .	52
4.2.2. Fusión de imágenes usando momentos Jacobi-Fourier, Bessel- Fourier y Krawtchouk . . . . .	57
4.2.3. Frecuencia espacial . . . . .	66
4.3. Clasificación de objetos . . . . .	66
4.3.1. Medida de la capacidad de descripción de los momentos . . . . .	66
4.3.2. Clasificación de imágenes binarias . . . . .	68
4.4. Conclusiones . . . . .	73
4.5. Bibliografía . . . . .	74
<b>5. Conclusiones Generales</b>	<b>75</b>
<b>A. Algoritmos Genéticos</b>	<b>79</b>
<b>B. Método de búsqueda de la sección de oro</b>	<b>81</b>
<b>C. Ecuación del histograma</b>	<b>83</b>
<b>D. Modelo HSI</b>	<b>85</b>
<b>E. Trabajos de Investigación</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

2.1.	<b>Polinomio radial de Jacobi <math>J_n(\alpha, \beta = 2, r)</math>. Cerca del origen y para órdenes <math>n \geq 7</math>, la función tiende a infinito. El número de raíces del polinomio es igual a su orden <math>n</math>, y la distribución de ceros es uniforme en el intervalo <math>1 \leq r \leq 0</math>.</b> . . . . .	10
2.2.	<b>Polinomio Radial de Jacobi <math>J_n(\alpha, \beta, r)</math>, <math>n = 0, 1, 2, 9, 10</math> para a) <math>\alpha = \beta = 3</math> y b) <math>\alpha = \beta = 4</math>. Como se puede observar, conforme <math>\alpha</math> y <math>\beta</math> se incrementan, la amplitud de la función cerca del origen se decremента.</b> . . . . .	10
2.3.	<b>Polinomio Radial de Jacobi <math>J_n(\alpha = 5, \dots, 10 = \beta, \beta, r)</math> para a) <math>\alpha = \beta = 5</math>, b) <math>\alpha = \beta = 6</math>, c) <math>\alpha = \beta = 7</math>, d) <math>\alpha = \beta = 8</math>, e) <math>\alpha = \beta = 9</math> y f) <math>\alpha = \beta = 10</math>. Para valores <math>\alpha = \beta \geq 8</math>, la amplitud de la función es cero en el origen, reduciendo con ello el intervalo radial en el cual está definido el polinomio.</b> . . . . .	11
2.4.	<b>Polinomio Radial de Jacobi <math>J_n(\alpha = 12, \dots, 22 = \beta, \beta, r)</math> para a) <math>\alpha = \beta = 12</math>, b) <math>\alpha = \beta = 14</math>, c) <math>\alpha = \beta = 16</math>, d) <math>\alpha = \beta = 18</math>, e) <math>\alpha = \beta = 20</math> y f) <math>\alpha = \beta = 22</math>. Para valores <math>\alpha = \beta \geq 8</math>, el intervalo radial <math>r</math> en el cual están distribuidas la raíces del polinomio, es cada vez más pequeño.</b> . . . . .	12
2.5.	<b>Polinomio Radial de Jacobi <math>J_n(\alpha = 14, \dots, 24 = \beta, \beta, r)</math> para a) <math>\alpha = \beta = 14</math>, b) <math>\alpha = \beta = 16</math>, c) <math>\alpha = \beta = 18</math>, d) <math>\alpha = \beta = 20</math>, e) <math>\alpha = \beta = 22</math> y f) <math>\alpha = \beta = 24</math>. Cuando se asignan valores numéricos grandes a <math>\alpha = \beta \geq 14</math>, y al orden <math>n \geq 16</math>, entonces la función tiene oscilaciones aleatorias cerca de <math>r = 1</math>.</b> . . . . .	13
2.6.	<b>Máximos ordenes <math>n</math> en los Polinomios Radiales de Jacobi <math>J_n(\alpha, \beta, r)</math> para <math>\alpha = \beta = 1, 3, 5, 7, 9</math> respectivamente; <math>n = 18, 19, 20, 21</math> y <math>22</math></b> . . . . .	15
2.7.	<b>Gráfica de la función Bessel a) tipo 0, b) tipo 1, c) tipo 2 y d) tipo 3</b> . . . . .	21
2.8.	<b>Polinomios de Krawtchouk pesados <math>\overline{K}_n(x; p, N)</math>. Como se puede observar, los polinomios están desplazados una cantidad <math>p = 0,5</math> y <math>p = 0,7</math>, lo cual, más adelante permitirá un análisis local de funciones imagen.</b> . . . . .	24
2.9.	<b>Gráfica de la función Seno para diferentes órdenes <math>n</math>. Como se puede observar, la amplitud de los polinomios siempre es la misma para cualquier orden <math>n</math>. Además, las raíces están uniformemente distribuidas en el intervalo de <math>[0, \Pi]</math>. Lo cual las hace adecuadas para un análisis completo de funciones. Como en el caso anterior, el número de raíces es igual al orden <math>n</math>.</b> . . . . .	25

3.1. Coordenadas de transformación de una imagen a un círculo unitario: a) fuera; b) dentro del radio unidad. . . . .	31
3.2. Expansión de la función $f(x) = x^3$ en la base ortogonal de funciones seno usando a) $n = 20$ , b) $n = 30$ y c) $n = 50$ coeficientes. . . . .	32
3.3. a) Imagen Binaria de 32 x 32 px, b) Reconstrucción para $n = l = 32$ , c) Reconstrucción binarizada con un umbral= 50, d) Histograma de la imagen reconstruida. . . . .	35
3.4. a) Imagen original e histograma, b) Imagen reconstruida e histograma, c) Imagen resultante de ecualizar el histograma de b) e histograma. . . . .	36
3.5. Parámetros de las bases ortonormales analizados. . . . .	37
3.6. Ejemplo del comportamiento de los Algoritmos Genéticos para la búsqueda de los parámetros en la base de polinomios complejos Jacobi-Fourier $J_n(\alpha, \beta, r)e^{-il\theta}$ . . . . .	39
3.7. Imágenes binarias de prueba a) negativas y b) positivas. . . . .	40
3.8. Imágenes binarias negativas reconstruidas con momentos a) Jacobi-Fouier con $\alpha = 13$ , $\beta = 5$ y $n = l = 22$ , b) Armónicos Seno con $n = l = 32$ y c) Krawtchouk con $n = l = 32$ . . . . .	41
3.9. Gráficas de Error usando como métrica el a) NIRE y la b) Correlación. Como se puede observar, los conjuntos cartesianos de Krawtchouk y Armónicos Seno logran una reconstrucción completa. . . . .	42
3.10. Imágenes binarias positivas reconstruidas con momentos a) Jacobi-Fouier con $\alpha = 5$ , $\beta = 4$ y $n = l = 19$ , b) Armónicos Seno con $n = l = 32$ y c) Krawtchouk con $n = l = 32$ . . . . .	43
3.11. Gráficas de Error usando como métrica el a) NIRE y la b) Correlación. Como se puede observar, los conjuntos cartesianos de Krawtchouk y Armónicos Seno logran una reconstrucción completa. . . . .	44
3.12. Imágenes de prueba en escala de gris de tamaño a) 64 x 64 px, b) 128 x 128 px, c) 256 x 256 px. . . . .	44
3.13. Imágenes en escala de gris de tamaño 64 x 64 px reconstruidas con momentos a) Armónicos Seno con $n = l = 64$ , b) Krawtchouk con $p = 0,1$ , $n = l = 64$ , c) Jacobi-Fourier con $\alpha = \beta = 6$ y $n = l = 20$ y d) Bessel con $n = l = 35$ y $v = 1$ . Las imágenes c) y d) son el resultado de ecualizar su histograma. . . . .	45
3.14. Gráfica de correlación de imágenes original y reconstruidas en escala de gris con tamaño de 64 x 64 px. . . . .	45
3.15. Imágenes en escala de gris de tamaño 128 x 128 px reconstruidas con momentos a) Armónicos Seno con $n = l = 128$ , b) Jacobi-Fourier con $\alpha = \beta = 4$ y $n = l = 21$ y c) Bessel con $n = l = 47$ . . . . .	46
3.16. Gráfica de correlación de imágenes a escala de gris con tamaño de 128 x 128 px. . . . .	46
3.17. Imágenes en escala de gris de tamaño 256 x 256 px reconstruidas con momentos a) Armónicos Seno con $n = l = 256$ , b) Jacobi-Fourier con $\alpha = \beta = 4$ y $n = l = 21$ y c) Bessel con $n = l = 50$ . . . . .	47

3.18. Gráfica de correlación de imágenes original y reconstruida en escala de grises con tamaño de  $256 \times 256$  px. . . . . 48

4.1. Esquema de fusión de imágenes usando funciones momento Seno. . . . . 53

4.2. Imágenes de entrada con el objeto enfocado en el a) primer plano y b) en el segundo plano. . . . . 54

4.3. Resultado de la fusión de imágenes usando como imágenes de entrada las de la Figura 4.2. Se calculó la frecuencia espacial  $FS=8.548$  para evaluar la fusión. . . . . 54

4.4. Esquema de la fusión de imágenes a color. . . . . 55

4.5. Fusión de imágenes a Color, en los incisos (a) y (b) se muestran diferentes partes enfocadas de las imágenes y c) Fusión de las dos imágenes usando momentos armónicos seno. . . . . 56

4.6. Imagen  $I$  de tamaño  $M \times N$  dividida en 4 bloques de tamaño  $\frac{M}{2} \times \frac{N}{2}$  . . . . . 57

4.7. Esquema de fusión de imágenes usando funciones momento. . . . . 58

4.8. Filtrado frecuencial de la imagen a) fusionada usando 128 particiones y orden  $n = 2$ . b) Espectro de Fourier de la imagen a), c) filtrado pasabajas donde sólo se dejan pasar las frecuencias que están dentro del círculo azul. d) Transformada inversa de Fourier de d). En este método existe una alta dependencia del radio del círculo también llamado frecuencia de corte. . . . . 60

4.9. Fusión de imágenes usando momentos de Bessel-Fourier de orden  $n = 1$  y especie  $\nu = 1$  cambiando el número de particiones a)32, b)64, c)128 y d)256. La frecuencia espacial como medida del contraste da como el mejor resultado de fusión a la imagen d). . . . . 61

4.10. Fusión de imágenes usando momentos de Bessel-Fourier con número de partición  $p = 256$  y cambiando el orden a)2, b)4, c)8 y d)16. La frecuencia espacial como medida del contraste da como el mejor resultado de fusión a las imágenes c) y d). . . . . 62

4.11. Fusión de imágenes usando momentos de Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 2$ , órdenes  $n = l = 2$  y particiones de a)32, b)64, c)128 y d)256. Al igual que Bessel, la mejor fusión d) se obtuvo con 256 particiones. . . . . 63

4.12. Fusión de imágenes usando momentos de Krawtchouk con particiones  $p$  a)8, b)16, c)32 y d)64. De acuerdo a la Ec. 4.2.3 existe una equivalencia entre el número de particiones y orden. Razón por la cual, los resultados de fusión fueron igual. . . . . 64

4.13. Fusión de imágenes usando momentos de a)Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 2$  y órdenes  $n = l = 2$  y 256 particiones, b) Bessel-Fourier con  $\nu = 1$ , órdenes  $n = l = 2$  y 256 particiones c) Armónicos Seno con órdenes  $n = l = 512$  y 0 particiones, d) Krawtchouk con  $p = 1$  y órdenes  $n = l = 32$  y 8 particiones. Como se puede observar, la fusión con una mayor frecuencia espacial se logró usando los momentos de Krawtchouk. Esto es debido, a la propiedad de ortogonalidad discreta en el espacio de la imagen. . . . . 65

4.14. Conjunto de imágenes de prueba. . . . . 68

4.15. Conjunto de imágenes de la Figura 4.14 rotadas con una base mecánica y capturadas con una cámara digital. . . . .	69
4.16. Medida de la capacidad de descripción de los momentos de a) Jacobi-Fourier, b) Bessel-Fourier, c) Armónicos Seno y d) Krawtchouk. . . . .	70
4.17. Gráfica de clasificación de los objetos de la Figura 4.15 usando los descriptores de Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier y Armónicos Seno. . . . .	71
4.18. Gráfica de clasificación de los objetos de la Figura 4.15 usando momentos cartesianos discretos de Krawtchouk. . . . .	71
4.19. Espacio de descriptores de a) Jacobi-Fourier, b) Bessel-Fourier, c) Armónicos Seno y d) Krawtchouk. . . . .	72
5.1. Análisis de polinomios ortogonales. . . . .	76
5.2. Análisis de la reconstrucción de imágenes. . . . .	77
5.3. Análisis de la fusión de imágenes. . . . .	77
5.4. Resultados de clasificación de objetos. . . . .	78
A.1. Algoritmo Genético Simple. . . . .	80
C.1. a) Imagen Original, b) Histograma de (a), c) Imagen Ecuilizada y d) Histograma Ecuilizado de (c). . . . .	84
D.1. a) Modelo RGB y b) Tetraedro de color RGB. . . . .	85
D.2. a) Imagen original descompuesta en los tres canales (RGB), b) Canal Rojo, c) Canal Verde y d) Canal azul. . . . .	86
D.3. a) Imagen original, b) Hue, c) Saturación y d) Intensidad. . . . .	87

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

El primer artículo significativo sobre la aplicación de los momentos al análisis de imágenes fue publicado por Hu [1] en 1962. Él usó los momentos geométricos para generar un conjunto de invariantes que fueran útiles para el reconocimiento automático de caracteres. Subsecuentemente, el método basado en momentos geométricos invariantes fue usado en reconocimiento de patrones por Alt [2], identificación de barcos por Smith[3], identificación de aviones por Dudani [4], comparación de patrones de Diriltén [5] y comparación de escenas por Wong [6]. Sin embargo, los momentos geométricos no son ortogonales y como consecuencia tienen redundancia en información y alta sensibilidad al ruido.

En 1980, Teague [7] introduce los momentos ortogonales y provee los conceptos básicos de los momentos de Legendre y momentos de Zernike. Por el año de 1985, las funciones momento se habían establecido como una herramienta útil para la extracción de características en imágenes. En 1982, Reeves [8] calculó los momentos en forma paralela, Casasent [9] implementó un sistema óptico para el cálculo de los momentos de intensidad y Anderson [10] desarrolló un chip para la generación de momentos para el procesamiento de video en tiempo real.

En 1994 Sheng et al. [11] introduce los momentos ortogonales de Fourier-Mellin basados en un nuevo conjunto de polinomios radiales. Los momentos ortogonales discretos han sido propuestos recientemente. Mukundan et al. [12] propusieron un conjunto de funciones momento ortogonales basado en los polinomios discretos de Tchebycheff.

Otros conjuntos clásicos de momentos ortogonales discretos son los momentos de Krawtchouk [13]. Debido a que los polinomios de Krawtchouk normalizados son discretos, no existe aproximación numérica en el cálculo de los momentos y por tanto el error es nulo. Esto hace a los momentos de Krawtchouk adecuados para la extracción

de características locales en varias regiones de interés en una imagen. Esto se logra el variar el parámetro  $p$  de la distribución binomial asociada a los polinomios de Krawtchouk.

Los momentos ortogonales de Jacobi-Fourier [14] están basados en la función generadora de polinomios y en el factor complejo de Fourier. Al variar dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la función generadora de Jacobi, es posible obtener diferentes funciones momento, tales como: los momentos de Legendre-Fourier ( $\alpha = \beta = 1$ ); Chebyshev-Fourier ( $\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$ ), Mellin-Fourier ( $\alpha = \beta = 2$ ), momentos de Zernike y de Pseudo-Zernike. Además, los momentos definidos en un espacio circular son invariantes a cambios en la orientación y escala de la imagen.

Recientemente se propusieron los momentos de Beesel-Fourier [15]. Los cuales están basados en la función Bessel de primera especie. Al igual que los momentos ortogonales de Zernike y de Mellin, estos son adecuados para la reconstrucción de imágenes y el reconocimiento invariante. Sin embargo, estos tienen una mayor eficiencia debido a su buena ortogonalidad y a un mayor número de raíces.

## 1.2. Objetivos

Este trabajo de Tesis está enfocado en el análisis de funciones momento ortogonales para la descripción de imágenes digitales, con propósitos de reconocimiento de patrones y fusión de imágenes. Por tal motivo, las tareas realizadas fueron:

A. Analizar gráficamente diferentes bases ortogonales de polinomios circulares y cartesianos.

B. Implementar momentos de Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier, Armónicos Seno y Krawtchouk. La cuantificación de la cantidad y calidad de los diferentes conjuntos de momentos para la representación de una imagen fue usando la técnica de Reconstrucción de Imágenes.

C. Determinar los parámetros radiales  $\alpha, \beta$ , especie  $v$ , órdenes  $n, l$  y el umbral de los diferentes conjuntos de momentos mediante algoritmos de búsqueda como: Algoritmos Genéticos y Búsqueda Dorada.

D. Implementar dos medidas: Error de Reconstrucción de la Imagen Normalizado (NIRE) y Correlación entre la imagen original y la reconstruida para cuantificar la capacidad de descripción de los momentos analizados.

E. Implementar algoritmos de reconocimiento de patrones y fusión de imágenes basados en los conjuntos estudiados.

### 1.3. Estado del Arte de la reconstrucción de momentos

Por su eficiencia en la representación de características, las funciones momento han sido ampliamente usadas en el reconocimiento de objetos a partir de imágenes.

El método más común adoptado en los algoritmos de reconocimiento basado en momentos, es el de la comparación de vectores descriptores de un conjunto de imágenes de referencia, con el vector descriptor de una imagen dada de un objeto desconocido.

Estos vectores descriptores son construidos por momentos invariantes de diferentes órdenes que proporcionan tanto las características globales de una imagen como diferentes niveles de detalle.

El problema de reconstrucción está determinado por: a) la serie de números que pueden ser considerados como los momentos de una imagen, b) el número óptimo de momentos para la reconstrucción y c) el error de reconstrucción.

### 1.4. Aportaciones

Con este proyecto de Tesis, se pretende contribuir al desarrollo de algoritmos para la descripción, mejoramiento y análisis de imágenes digitales. Con aplicaciones en seguridad informática y reconocimiento de patrones.

Las aportaciones más importantes están en el análisis de las funciones momento para la descripción de información. Así como la determinación de los parámetros que las definen usando algoritmos genéticos. Los resultados obtenidos se encuentran publicados en las referencias [16,17].

En el contexto de la seguridad informática la fiabilidad de los algoritmos propuestos ha sido determinada, en función del tipo de información a codificar, y los tiempos de cómputo requeridos.

Los algoritmos propuestos logran una exactitud al menos del 94 % en tiempos de cómputo del orden de segundos para imágenes estándar de 256X256 px y 8 bits por pixel.

La eficiencia de los algoritmos para el reconocimiento de formas fue determinada en función de la resolución de las imágenes de entrada y las frecuencias que las componen.

Por lo tanto, el proyecto de Tesis propone,

1. Algoritmos basados en funciones momento para la descripción de imágenes.

2. Algoritmos genéticos para encontrar los parámetros óptimos de las funciones momento.
3. Métricas que miden la eficiencia de los algoritmos propuestos.

## 1.5. Bibliografía

[1] Hu M.K., "Visual pattern recognition by moment invariants", IRE Trans. on Information Theory, **8**. (1) (1962). 179-187.

[2] Alt F.L., "Digital pattern recognition by moments", Jnl. of the Assn. for Computing Machinery, **9**. (2) (1962). 240-258.

[3] Smith F.W. and Wright M.H., "Automatic ship photo interpretation by the method of moments", IEEE Trans. on Computers, **20**. (9) (1971). 351-354.

[4] Dudani S.A., "Aircraft identification by moment invariants", IEEE Trans. on Computers, **26**. (1) (1977). 39-45.

[5] Dirilten H., "Pattern matching under affine transformations", IEEE Trans. on Computers, **26**. (3) (1977). 314-317.

[6] Wong R. Y. and Hall E. L., "Scene matching with invariant moments", Computer Vision Graphics and Image Processing, **8**, (1) (1978). 16-24.

[7] Teague M.R., "Image analysis via the general theory of moments", Journal of the Optical Society of America, **70**. (8) (1980). 920-930.

[8] Reeves A. P., "A parallel mesh moment computer", Intl. Conf. on Pattern Recognition, (1982), 465-467.

[9] Casasent D. and Cheatham L., "Optical system to compute intensity moments: Design", Applied Optics, **21**. (19) (1982). 3292-3298.

[10] Anderson R. L., "Real time gray scale video processing using a moment generating chip", IEEE Trans. on Robotics and Automation, **1**. (2) (1985). 79-85.

[11] Y. Sheng, L. Shen, "Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition", Optical Society of America, **9**. (6) (1994). 1748-1757.

[12] R. Mukundan, S. H. Ong, P. A. Lee, "Image analysis by Tchebichef moments", IEEE Transactions on Image Processing, **10**, (9) (2001). 1357-1364.

[13] Pew-Thian Yap, Raveendran Paramesran, Senior Member and Seng-Huat Ong. "Image Analysis by Krawtchouk Moments", IEEE transactions on image processing, **12**, (11) (2003).

[14] Z. Ping, H. Ren, J. Zou, Y. Sheng and W. Bo. "Generic Orthogonal moments: Jacobi Fourier moments for invariant image description". Pattern Recognition, **40**, 1245-1254 (2007).

[15] X. Bin, M. Jiang-Feng, and Xuan W. "Image analysis by Bessel-Fourier moments", Pattern Recognition, **43**, 2620-2629 (2010).

[16] C. Toxqui-Quitl, L. Gutiérrez-Lazcano, A. Padilla-Vivanco and C. Camacho-Bello, "Gray-level image reconstruction using Bessel-Fourier moments". 22nd Congress of the international Commission for Optics. Proc. of SPIE Vol. 8011, 80112U. (2011).

[17] L. Gutiérrez-Lazcano, C. Toxqui-Quitl, C. Camacho-Bello y A. Padilla-Vivanco. "Análisis de la capacidad de reconstrucción de imágenes a partir de momentos ortogonales", Centro de Investigaciones en Matemáticas (CIMAT), Octubre 2011, Guanajuato, México.



# Capítulo 2

## Análisis de polinomios ortogonales

### 2.1. Introducción

Debido a que una base ortogonal de un espacio vectorial tiene propiedades numéricas favorables con respecto a otras bases, numerosos tipos de polinomios ortogonales han sido analizados en la literatura. Para su estudio se dividen en dos grupos: Los polinomios ortogonales en el plano cartesiano, donde la principal ventaja de los momentos ortogonales en un rectángulo es que preservan la ortogonalidad sobre la imagen muestreada. Y los polinomios ortogonales en un disco, los cuales son construidos como un producto de un factor radial y un factor angular. Cuando estos momentos se implementan, una imagen es mapeada a un disco, lo cual genera problemas de re-muestreo.

En este capítulo se analizan los polinomios genéricos de Jacobi y Bessel de primer tipo definidos en un dominio radial y los polinomios de Krawtchouk y Armónicos de dominio cartesiano. En todos ellos el número y la distribución de ceros en el intervalo  $[0, 1]$  así como los valores cerca del origen determinan su efectividad para la representación de funciones.

### 2.2. Polinomios Genéricos de Jacobi

En esta sección se analizan los polinomios radiales de Jacobi  $J(\alpha, \beta, r)$ , los cuales son expresiones genéricas que dependen de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , que al variarlos generan varios tipos de polinomios ortogonales: Legendre ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ), Chebyshev ( $\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$ ), Mellin ( $\alpha = 2, \beta = 2$ ), Zernike, entre otros.

### 2.2.1. Función radial generadora de los polinomios de Jacobi

El valor real de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  generan un polinomio radial diferente de Jacobi. Particularmente, la función radial  $J_n(\alpha, \beta, r)$  es ortogonal en el intervalo  $0 \leq r \leq 1$ , si,

$$\int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r) J_k(\alpha, \beta, r) r dr = \delta_{nk}. \quad (2.2.1)$$

Así, el polinomio de Jacobi radial  $G_n(\alpha, \beta, r)$  puede estar definido como,

$$G_n(\alpha, \beta, r) = \frac{n!(\beta - 1)!}{(\alpha + n - 1)!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(\alpha + n + s - 1)!}{(n - s)! s! (\beta + s - 1)!} r^s, \quad (2.2.2)$$

cuya relación de ortogonalidad es,

$$\int_0^1 G_n(\alpha, \beta, r) G_m(\alpha, \beta, r) w(\alpha, \beta, r) dr = b_n(\alpha, \beta) \delta_{nm}(\alpha, \beta), \quad (2.2.3)$$

donde, el factor de peso,

$$w(\alpha, \beta, r) = (1 - r)^{\alpha - \beta} r^{\beta - 1}, \alpha - \beta > -1, \beta > 0, \quad (2.2.4)$$

toma diferentes valores en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . La constante  $b_n$  de normalización es calculada por,

$$b_n(\alpha, \beta) = \frac{n![(\beta - 1)!]^2(\alpha - \beta + n)!}{(\beta + n - 1)!(\alpha + n - 1)!(\alpha + 2n)}. \quad (2.2.5)$$

Comparando las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.3, se obtiene el conjunto de funciones radiales  $J_n(\alpha, \beta, r)$ ,

$$J_n(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{w(\alpha, \beta, r)}{b_n(\alpha, \beta, r)r}} G_n(\alpha, \beta, r). \quad (2.2.6)$$

La función radial consiste de un polinomio de Jacobi y un coeficiente incluyendo a la variable radial  $r$  en el denominador. Para asegurar que el valor límite de la función  $r$

tienda a cero, se debe satisfacer  $\alpha \geq \beta$  y  $\beta \geq 2$ . De otra manera,  $J_n(\alpha, \beta, r)$  tenderá al infinito cuando  $r$  tiende a cero. Los polinomios de Legendre y de Chebyshev no satisfacen la condición, y por tanto la función radial  $J_n(\alpha, \beta, r)$  tiende a infinito en el origen.

Tomando en cuenta la diferencia de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , la Ec. 2.2.6 puede ser usada para generar diferentes tipos de Polinomios radiales de Jacobi.

Si  $\alpha = \beta = 2$  (polinomios ortogonales de Mellin) entonces,

$$J_n(2, 2, r) = (-1)^n \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s+1)!r^s}{(n-s)!s!(s+1)!}. \quad (2.2.7)$$

Si  $\alpha = 3$  y  $\beta = 2$  entonces,

$$J_n(3, 2, r) = (-1)^n \sqrt{\frac{(1-r)(2n+3)}{(n+1)(n+2)}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s+2)!r^s}{(n-s)!s!(s+1)!}. \quad (2.2.8)$$

Si  $\alpha = \beta = 3$  entonces,

$$J_n(3, 3, r) = (-1)^n \sqrt{(2n+3)r} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s+2)!r^s}{(n-s)!s!(s+2)!}. \quad (2.2.9)$$

Si  $\alpha = 4$  y  $\beta = 4$  entonces,

$$J_n(4, 4, r) = (-1)^n r \sqrt{2(n+2)} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s+3)!r^s}{(n-s)!s!(s+3)!}. \quad (2.2.10)$$

En las Figuras 2.1 a 2.6 se muestra la distribución de valores de diferentes funciones radiales  $J_n(\alpha, \beta, r)$  en el intervalo de  $0 \leq r \leq 1$ . El orden de las funciones radiales son  $n = 0, 1, 2, 9$  y  $10$  respectivamente. La distribución de ceros es casi uniforme en el intervalo de  $0 \leq r \leq 1$  para varios tipos de funciones radiales. Algunas de las funciones cerca del origen tienden a infinito mientras que otras toman valores limitados.

Las curvas de las Figuras 2.1 a 2.5 están vibrando y gradualmente decrecen conforme  $r$  tiende a 1. La distribución de ceros es casi uniforme en el intervalo  $0 \leq r \leq 1$  para las funciones radiales con valores  $\alpha \leq 10$  o  $\beta \leq 10$  de la Figura 2.3 . El número

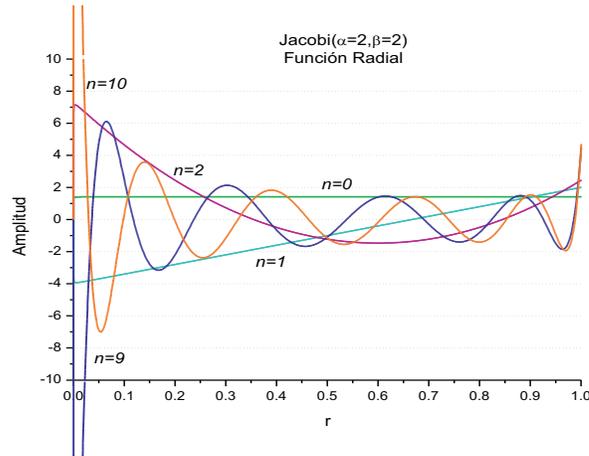


Figura 2.1: Polinomio radial de Jacobi  $J_n(\alpha, \beta = 2, r)$ . Cerca del origen y para órdenes  $n \geq 7$ , la función tiende a infinito. El número de raíces del polinomio es igual a su orden  $n$ , y la distribución de ceros es uniforme en el intervalo  $1 \leq r \leq 0$ .

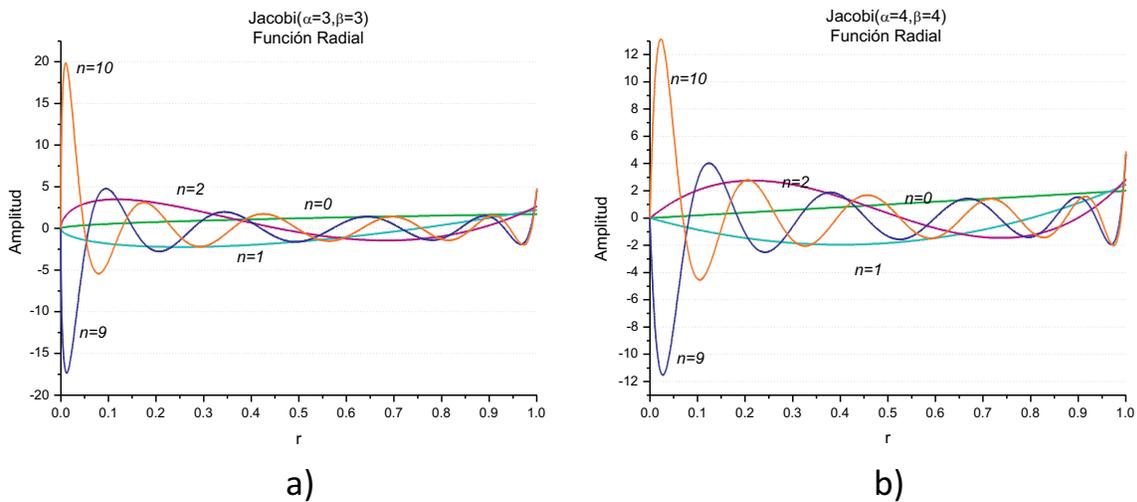


Figura 2.2: Polinomio Radial de Jacobi  $J_n(\alpha, \beta, r)$ ,  $n = 0, 1, 2, 9, 10$  para a)  $\alpha = \beta = 3$  y b)  $\alpha = \beta = 4$ . Como se puede observar, conforme  $\alpha$  y  $\beta$  se incrementan, la amplitud de la función cerca del origen se decremanta.

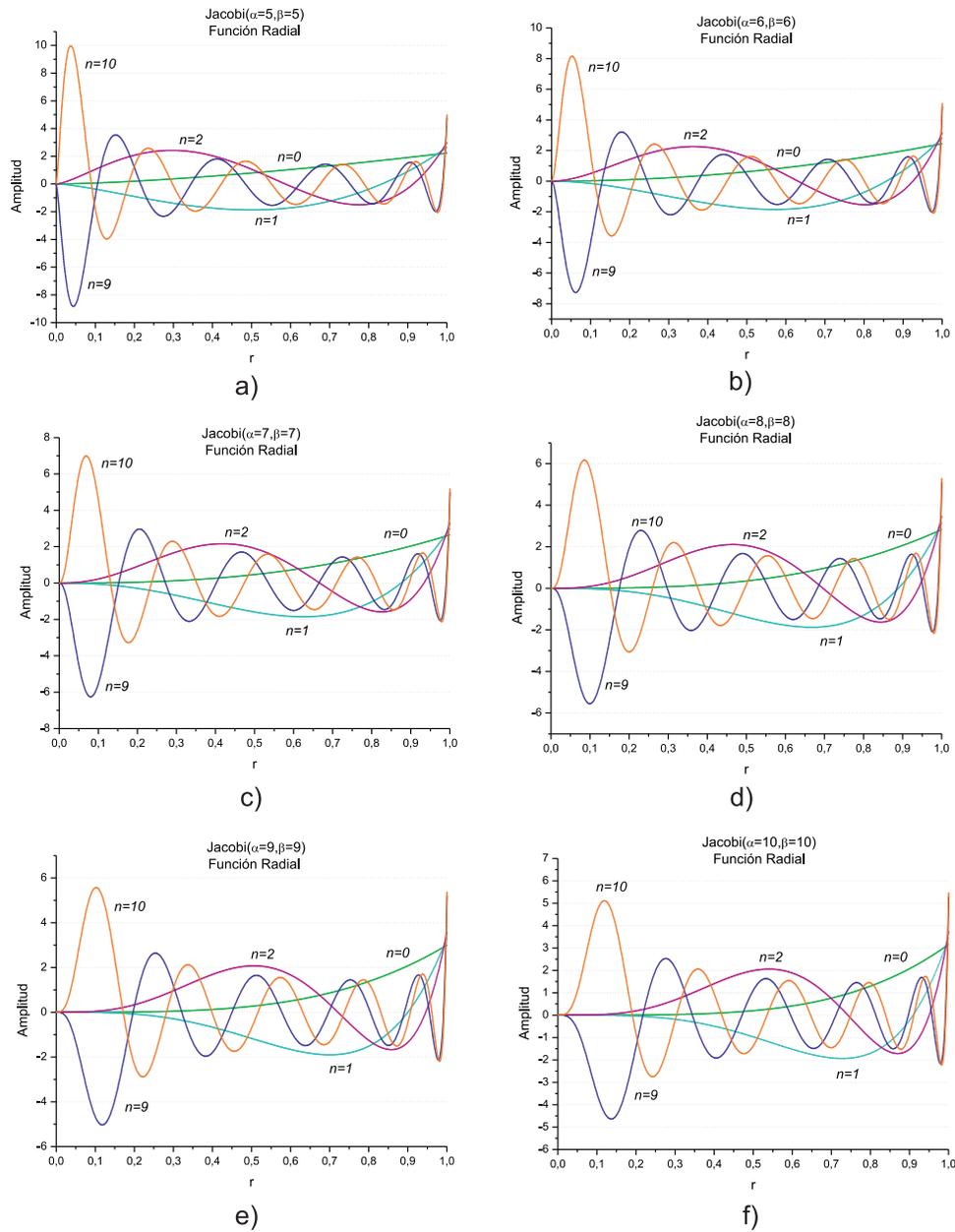


Figura 2.3: Polinomio Radial de Jacobi  $J_n(\alpha = 5, \dots, 10 = \beta, \beta, r)$  para a)  $\alpha = \beta = 5$ , b)  $\alpha = \beta = 6$ , c)  $\alpha = \beta = 7$ , d)  $\alpha = \beta = 8$ , e)  $\alpha = \beta = 9$  y f)  $\alpha = \beta = 10$ . Para valores  $\alpha = \beta \geq 8$ , la amplitud de la función es cero en el origen, reduciendo con ello el intervalo radial en el cual está definido el polinomio.

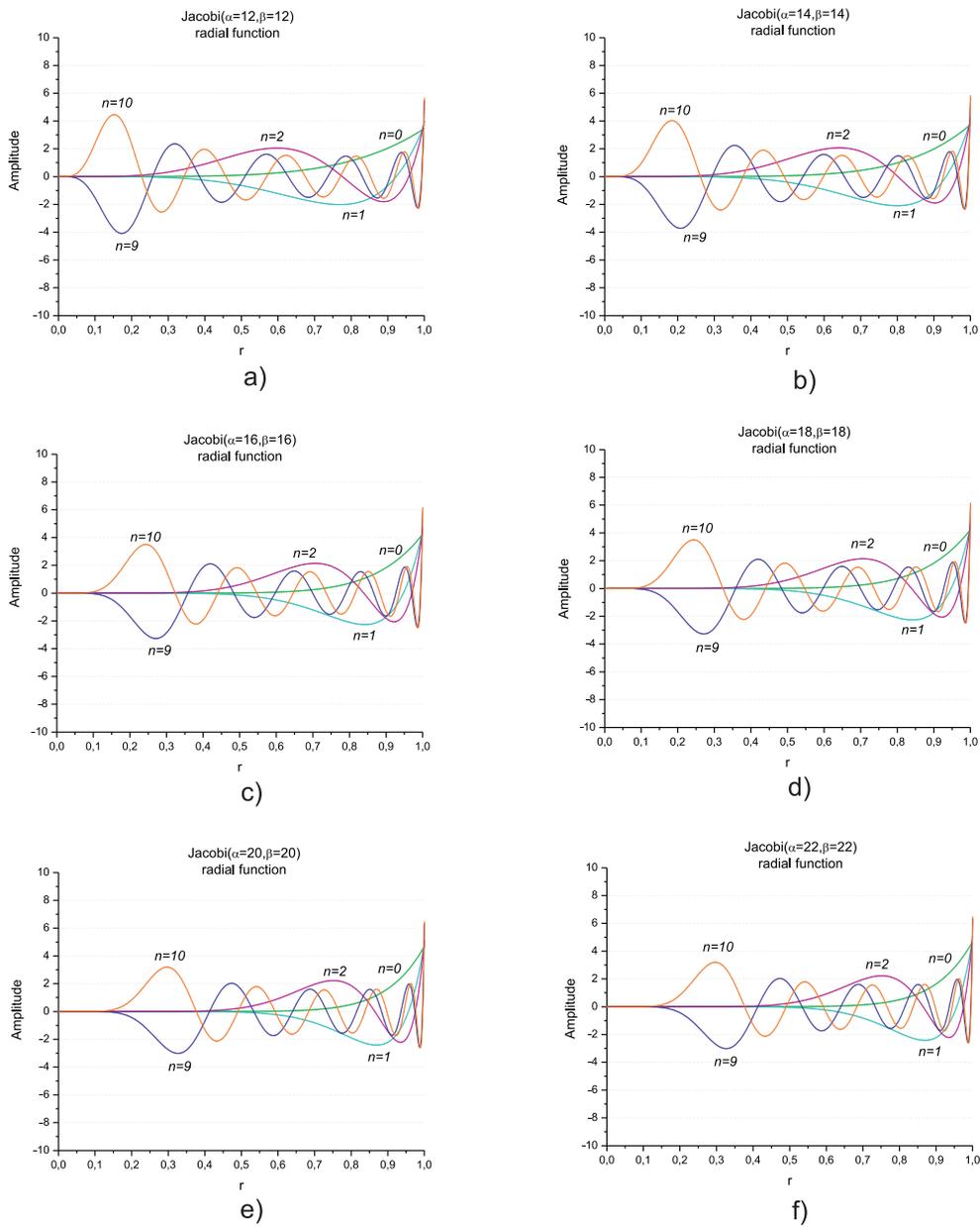


Figura 2.4: Polinomio Radial de Jacobi  $J_n(\alpha = 12, \dots, 22 = \beta, \beta, r)$  para a)  $\alpha = \beta = 12$ , b)  $\alpha = \beta = 14$ , c)  $\alpha = \beta = 16$ , d)  $\alpha = \beta = 18$ , e)  $\alpha = \beta = 20$  y f)  $\alpha = \beta = 22$ . Para valores  $\alpha = \beta \geq 8$ , el intervalo radial  $r$  en el cual están distribuidas las raíces del polinomio, es cada vez más pequeño.

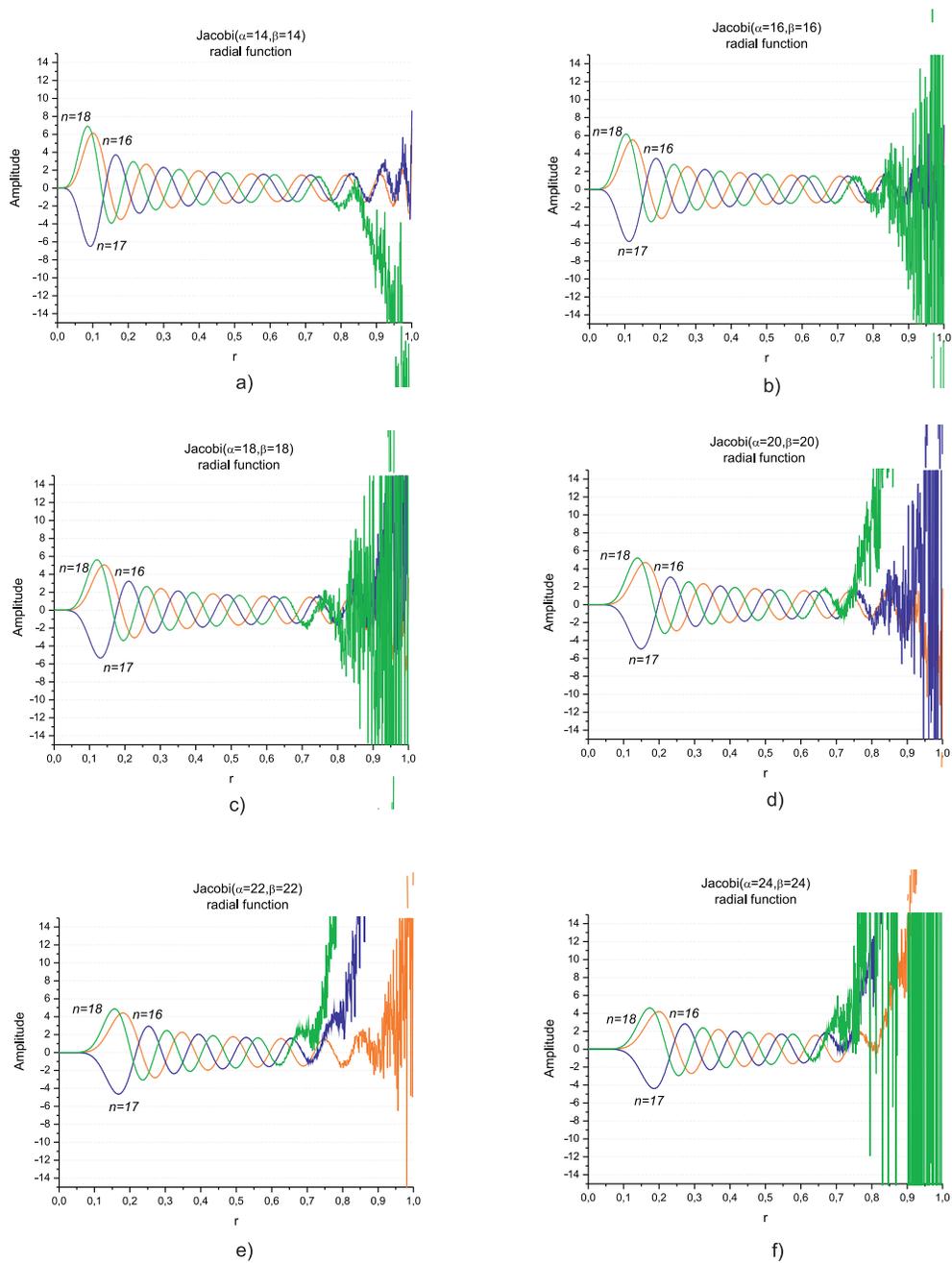


Figura 2.5: Polinomio Radial de Jacobi  $J_n(\alpha = 14, \dots, 24 = \beta, \beta, r)$  para a)  $\alpha = \beta = 14$ , b)  $\alpha = \beta = 16$ , c)  $\alpha = \beta = 18$ , d)  $\alpha = \beta = 20$ , e)  $\alpha = \beta = 22$  y f)  $\alpha = \beta = 24$ . Cuando se asignan valores numéricos grandes a  $\alpha = \beta \geq 14$ , y al orden  $n \geq 16$ , entonces la función tiene oscilaciones aleatorias cerca de  $r = 1$ .

de ceros en las funciones radiales es igual al orden de los polinomios de Jacobi. Como consecuencia del análisis gráfico llevado a cabo, se puede aseverar que aunque las curvas son similares entre ellas, su distribución cerca del origen es diferente. Para  $\alpha$  y  $\beta$  pequeños, la función radial tiende a infinito. Los valores asignados a  $\alpha$  y  $\beta$  son inversamente proporcionales a la amplitud en el origen.

Para la descripción de una imagen es recomendable una distribución uniforme de ceros en el intervalo radial  $r$  y una amplitud limitada de la función radial en el origen. Comparando las distribuciones de la función radial de las Figuras 2.1 a 2.5 se puede ver que para  $\alpha = 4, 5, \dots, 10$  y  $\beta = 4, 5, \dots, 10$  se tiene valores pequeños cerca del origen y una distribución uniforme de ceros en el intervalo radial  $r$ .

Después de un análisis gráfico, se encuentra que el orden máximo  $n_{max}$  radial para evitar el desbordamiento depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , tal como,

$$n_2 = 21$$

$$n_\alpha = n_{\alpha-1} - 1$$

para  $\alpha = \beta = 4, 6, 8, \dots$ . Las gráficas de la figura 2.6 muestran el orden radial máximo de los polinomios, los cuales empiezan a fluctuar cuando  $r \rightarrow 1$ .

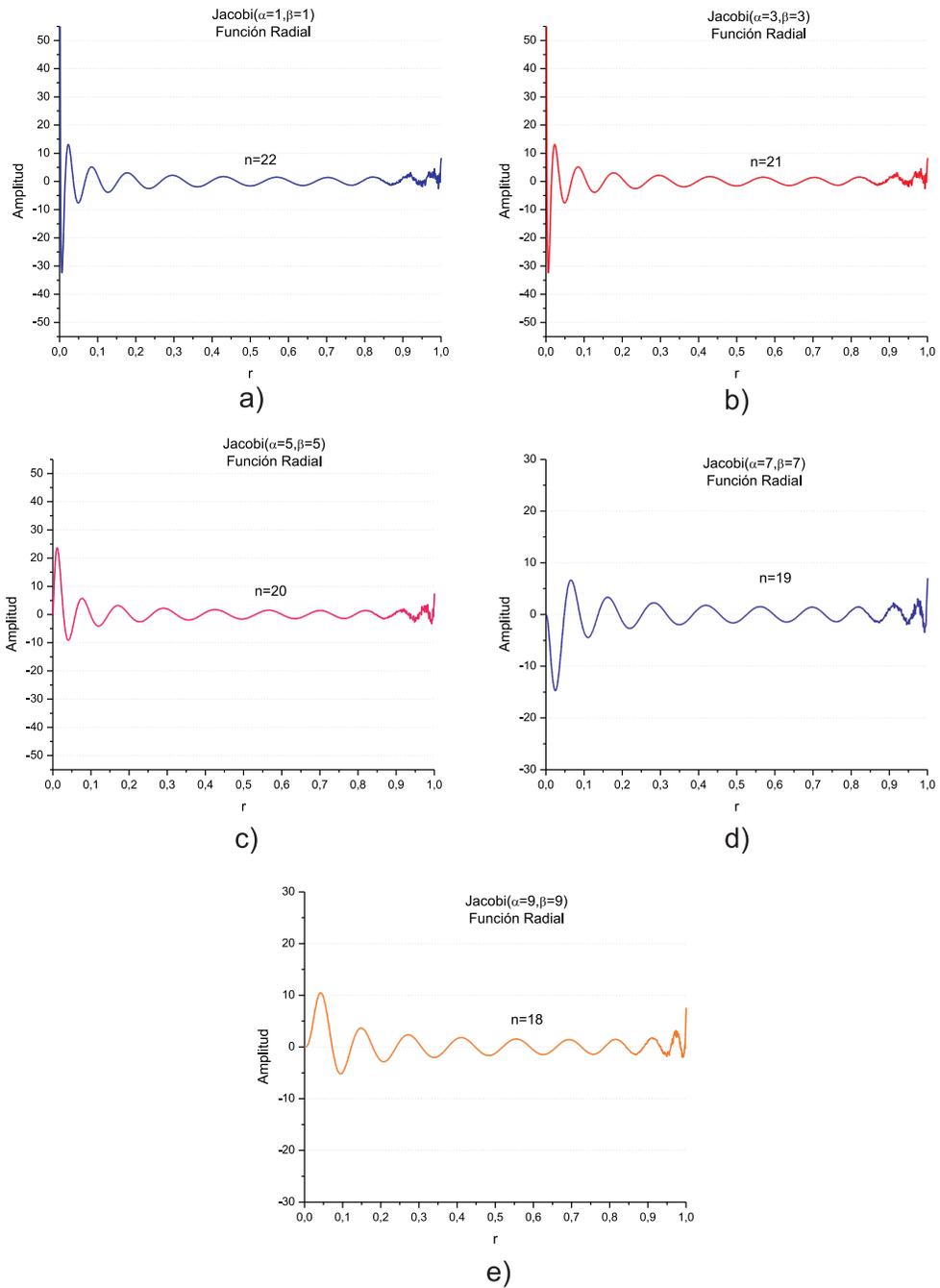


Figura 2.6: Máximos ordenes  $n$  en los Polinomios Radiales de Jacobi  $J_n(\alpha, \beta, r)$  para  $\alpha = \beta = 1, 3, 5, 7, 9$  respectivamente;  $n = 18, 19, 20, 21$  y  $22$

## 2.3. Polinomios Bessel

Los polinomios radiales ortogonales Bessel al ser comparados con polinomios de Mellin y Zernike del mismo orden, tienen  $n + 1$  ceros y estos están distribuidos uniformemente en el intervalo radial  $0 \leq r \leq 1$ .

### 2.3.1. Función Bessel de primer tipo

Se define la función Bessel de primer tipo como,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu+2k}, \quad (2.3.1)$$

donde  $\nu$  es una constante real,  $\Gamma(a)$  es la función gamma. Tiene la siguiente relación de recurrencia,

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x). \quad (2.3.2)$$

La función de Bessel es la solución de la ecuación de Bessel,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (2.3.3)$$

o bien,

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (2.3.4)$$

y

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + n(n + 1) y = 0. \quad (2.3.5)$$

las ecuaciones de Bessel de tipo  $\nu$  y de Legendre de orden  $n$ , respectivamente. Cuando se resuelve la Ec. 2.3.4 se supone que  $\nu \geq 0$ .

Debido a que  $\nu = 0$  es un punto singular regular de la ecuación de Bessel, se sabe que existe por lo menos una solución de la forma  $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ .

Si aplicamos primera y segunda derivada en  $y$ , se obtiene,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}.$$

Sustituyendo los valores de  $y, y', y''$  en la Ec.2.3.4,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0,$$

evaluando para  $n = 0$  y factorizando para  $x^r$

$$c_0(r^2 - r + r - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2] x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0,$$

$$c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(n+r)^2 - \nu^2] x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0. \quad (2.3.6)$$

De 2.3.6 se ve que la ecuación indicial es  $r^2 - \nu^2 = 0$ , de modo que las raíces iniciales son  $r_1 = \nu$  y  $r_2 = -\nu$ . Cuando  $r_1 = \nu$ , la Ec. 2.3.6 se transforma en,

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Factorizando  $x^\nu$  y evaluando  $n = 1$ ,

$$x^\nu [(1+2\nu)c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}] = 0.$$

haciendo cambio de variable  $k = n - 2$  y factorizando la sumatoria y  $x^{k+2}$ ,

$$x^\nu [(1+2\nu)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k] x^{k+2}] = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son,

$$(1 + 2\nu)c_1 = 0,$$

y

$$(k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k = 0,$$

despejando,

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k + 2)(k + 2 + 2\nu)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.7)$$

La elección  $c_1 = 0$  en 2.3.7 indica que  $c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$ , así que para  $k = 0, 2, 4, \dots$  se encuentra, después de establecer  $k + 2 = 2n, n = 1, 2, 3, \dots$ , que

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n + \nu)}. \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)} \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(2 + \nu)} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(1 + \nu)(2 + \nu)} \\ c_6 &= -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3(3 + \nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (n + \nu)}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.9)$$

Es práctica común elegir  $c_0$  como valor específico, a saber,

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

donde  $\Gamma(1 + \nu)$  es una función gamma. Puesto que esta última función posee la propiedad conveniente  $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$  se puede reducir el producto indicado en el denominador de 2.3.9 a un término. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\Gamma(1 + \nu + 1) &= (1 + \nu)\Gamma(1 + \nu) \\ \Gamma(1 + \nu + 2) &= (2 + \nu)\Gamma(2 + \nu) = (2 + \nu)(1 + \nu)\Gamma(1 + \nu).\end{aligned}$$

Por consiguiente, la ecuación 2.3.9 se puede escribir como

$$c_{2n} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! (1 + \nu)(2 + \nu) \dots (n + \nu) \Gamma(1 + \nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(1 + \nu + n)},$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$

La definición de la integral de Euler de la función gamma es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (2.3.10)$$

para  $x > 0$ . Evaluando para  $x = 1, 2, 3, \dots$  Si  $x = 1$ , entonces,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} [-e^{-T} + 1] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{-1}{e^T} + 1 \right] = 1,$$

$$\Gamma(1) = 1.$$

De la misma manera, si evaluamos para  $x = 2, 3$  y  $4$ .

$$\Gamma(2) = 1 = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2 = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 6 = 3!.$$

Se tiene la propiedad para la función gamma,

$$\Gamma[1 + (\nu + 1)] = (\nu + 1)\Gamma(\nu + 1), \quad (2.3.11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma[1 + (\nu + 2)] &= (\nu + 2)\Gamma(\nu + 2) \\ &= (\nu + 2)\Gamma(1 + (\nu + 1)) \\ &= (\nu + 2)(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1). \end{aligned}$$

Entonces la Ec.2.3.9 y la propiedad 2.3.11

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(1+\nu+n)},$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$  La solución en serie de  $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} X^{2n+\nu}$  es,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(1+\nu+n)} X^{2n+\nu}.$$

Por tanto, la solución es la función Bessel,

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma[1 + (\nu + n)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad (2.3.12)$$

Para la evaluación de  $r_2 = -\nu$  se tiene,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma[1 + (n - \nu)]}. \quad (2.3.13)$$

Las gráficas de la Figura 2.7 muestran la distribución de los polinomios  $J_{\nu}(\lambda_n r)$  de diferentes tipos  $\nu$ .

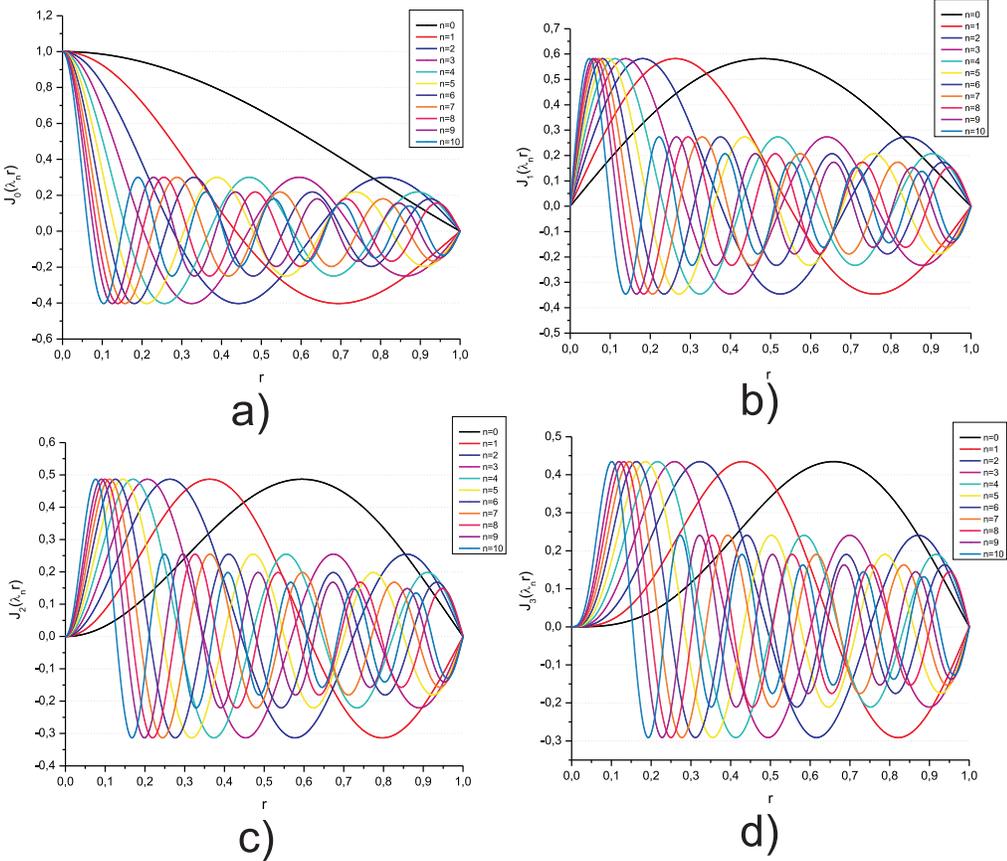


Figura 2.7: Gráfica de la función Bessel a) tipo 0, b) tipo 1, c) tipo 2 y d) tipo 3

## 2.4. Polinomios Krawtchouk

Los polinomios de Krawtchouk son ortogonales en el intervalo discreto del espacio de coordenadas de la imagen. Esta propiedad hace a los momentos ortogonales discretos superiores a los momentos ortogonales continuos, gracias a que preservan la propiedad analítica de ortogonalidad, y con ello el error de cálculo debido a la discretización es nulo. Por otro lado, los polinomios de Krawtchouk tienen asociado a ellos, un parámetro  $p$  de distribución binomial que permite un análisis local en funciones.

La definición de los polinomios Krawtchouk de  $n$ -ésimo orden es,

$$K_n(x; p, N) = \sum_{k=0}^N a_{k,n,p} x^k = {}_2F_1\left(-n, -x; -N; \frac{1}{p}\right), \quad (2.4.1)$$

donde  $x, n = 0, 1, 2, \dots, N, N > 0, p \in (0, 1)$ .  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica definida por,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.4.2)$$

y  $(a)_k$  es el símbolo de Pochhammer dado por,

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}. \quad (2.4.3)$$

El conjunto de  $(N+1)$  polinomios de Krawtchouk  $\{K_n(x; p, N)\}$  forma un conjunto completo de funciones de base discreta, cuya función peso es,

$$w(x; p, N) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \quad (2.4.4)$$

y cumple con la condición de ortogonalidad

$$\sum_{x=0}^N w(x; p, N) K_n(x; p, N) K_m(x; p, N) = \rho(n; p, N) \delta_{nm}, \quad (2.4.5)$$

donde  $n, m = 1, 2, \dots, N$  y

$$\rho(n; p, N) = (-1)^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{n!}{(-N)_n}.$$

Ejemplos de polinomios Krawtchouk hasta orden  $n=2$  son,

$$\begin{aligned} K_0(x; p, N) &= 1 \\ K_1(x; p, N) &= 1 - \left[\frac{1}{Np}\right]x \\ K_2(x; p, N) &= 1 - \left[\frac{2}{Np} + \frac{1}{N(N-1)p^2}\right]x + \left[\frac{1}{N(N-1)p^2}\right]x^2. \end{aligned}$$

Para lograr estabilidad numérica, se definen los polinomios de Krawtchouk. Donde, además de la normalización de los polinomios, se introduce la raíz cuadrada del peso. El conjunto de Polinomios de Krawtchouk pesados  $\{\bar{K}_n(x; p, N)\}$  está definido por,

$$\bar{K}_n(x; p, N) = K_n(x; p, N) \sqrt{\frac{w(x; p, N)}{\rho(n; p, N)}}. \quad (2.4.6)$$

Donde la condición de ortogonalidad está dada por,

$$\sum_{x=0}^N \bar{K}_n(x; p, N) \bar{K}_m(x; p, N) = \delta(n; p, N). \quad (2.4.7)$$

En la Figura 2.8 se muestran las distribuciones de los polinomios de Krawtchouk pesados para diferentes órdenes  $n$ , probabilidades  $p$  y tamaño  $N$ .

## 2.5. Polinomios Armónicos

Los polinomios Armónicos están definidos en el plano cartesiano como,

$$P_n(x) = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.5.1)$$

los cuales cumplen con la condición de ortogonalidad,

$$\int_0^1 \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) dx dy = \delta_{nl} \quad (2.5.2)$$

En la figura 2.9 se muestran algunas gráficas de estos polinomios para diferentes órdenes  $n$ .

En el siguiente capítulo se analizarán los momentos de una imagen digital, cuyo kernel de transformación está basado en los conjuntos ortogonales estudiados y un componente complejo de Fourier. Lo anterior, con el fin de medir la capacidad de descripción de los momentos.

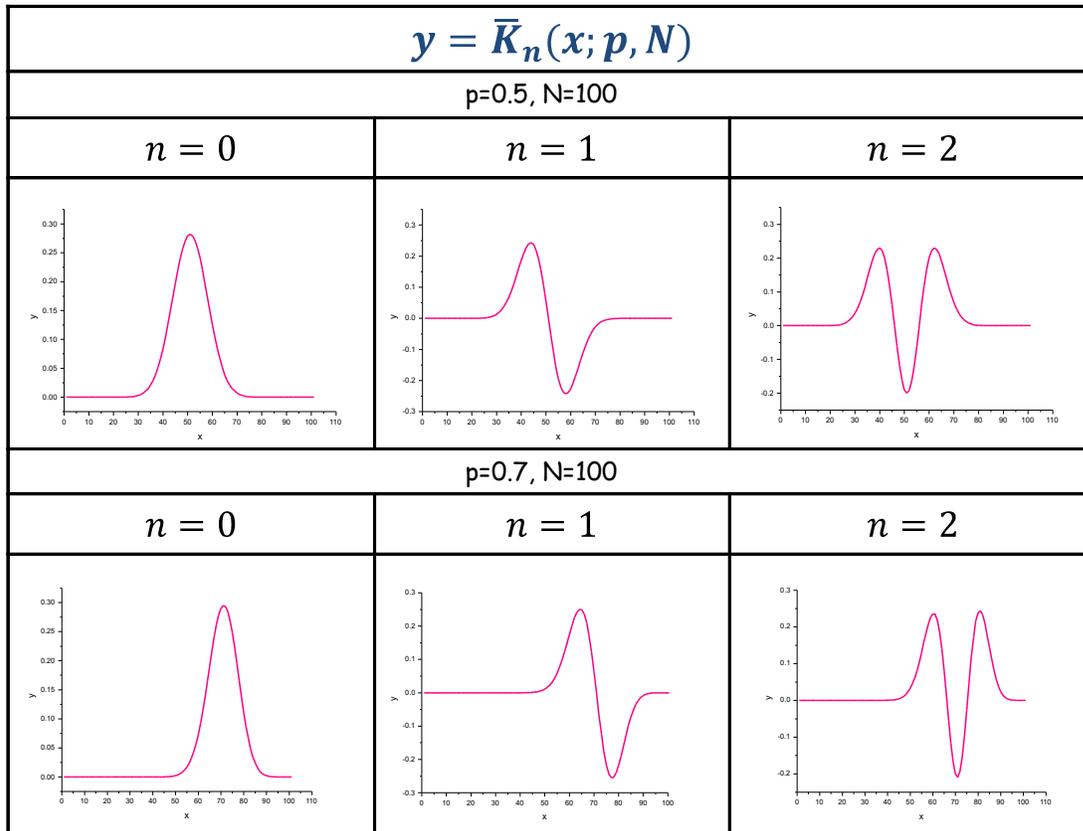


Figura 2.8: Polinomios de Krawtchouk pesados  $\bar{K}_n(x; p, N)$ . Como se puede observar, los polinomios están desplazados una cantidad  $p = 0,5$  y  $p = 0,7$ , lo cual, más adelante permitirá un análisis local de funciones imagen.

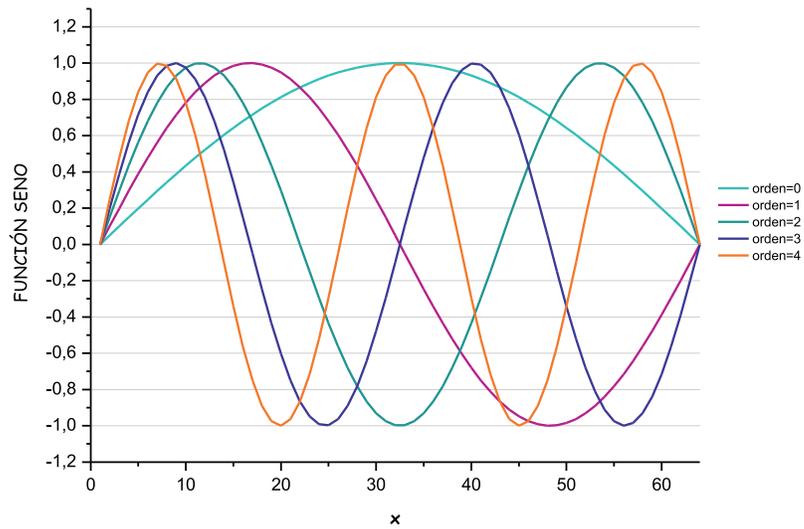


Figura 2.9: Gráfica de la función Seno para diferentes órdenes  $n$ . Como se puede observar, la amplitud de los polinomios siempre es la misma para cualquier orden  $n$ . Además, las raíces están uniformemente distribuidas en el intervalo de  $[0, \pi]$ . Lo cual las hace adecuados para un análisis completo de funciones. Como en el caso anterior, el número de raíces es igual al orden  $n$ .

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se presentó una revisión de los polinomios ortogonales en el círculo unitario: Jacobi y Bessel, y de los polinomios ortogonales cartesianos: Armónicos y Krawtchouk, para la descripción de funciones.

Como se vió, una herramienta matemática común para comparar entre los diferentes conjuntos es la función generadora de los polinomios de Jacobi. A través de la cual, al variar los parámetros de  $\alpha$  y  $\beta$  se consigue obtener a los conjuntos de Legendre, Chebyshev, Jacobi, Mellin y Zernike. Se determinaron los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  entre  $4 \leq \alpha = \beta \leq 10$ , por su distribución de ceros y los valores de la función acotados al origen.

Los polinomios Bessel al ser comparados con polinomios de Mellin y Zernike del mismo orden, tienen  $n + 1$  ceros y estos están distribuidos uniformemente en el intervalo radial  $0 \leq r \leq 1$ .

Los polinomios ortogonales pesados de Krawtchouk dependen de un parámetro  $p$  asociado a una distribución binomial lo cual permite un análisis local de funciones. La ventaja principal de este conjunto es su ortogonalidad en el dominio discreto lo cual, anula el error de discretización.

En el caso de los polinomios Armónicos la ventaja que existe en ellos en comparación con los polinomios antes mencionados, es que están acotados al origen, tienen una buena distribución de ceros y su amplitud es uniforme .

## 2.7. Bibliografía

- [1] Z. Ping, H. Ren, J. Zou, Y. Sheng and W. Bo. "Generic Orthogonal moments: Jacobi Fourier moments for invariant image description," *Pattern Recognition* **40**, 1245-1254 (2007).
- [2] A. Padilla-Vivanco., G. Urcid-Serrano., F. Granados-Agustín., and A. Cornejo-Rodriguez. "Comparative analysis of pattern reconstruction using orthogonal moments," *Optical Engineering*, **46** (1), 017002-1 a 017002-15, (2007).
- [3] A. B. Bathia and E. Wolf. "On circular polynomials of Zernike and related orthogonal sets," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 40-48 (1954).
- [4] X. Bin, M. Jiang-Feng, and Xuan W. "Image analysis by Bessel-Fourier moments," *Pattern Recognition* **43**, 2620-2629 (2010).
- [5] Pew-Thian Yap, Raveendran Paramesran, and Seng-Huat Ong. "Image Analysis by Krawtchouk Moments," *IEEE transactions on image processing*, **12** (11), (2003).



# Capítulo 3

## Reconstrucción de Imágenes a partir de funciones momento

### 3.1. Introducción

Las funciones momento tienen un amplio espectro de aplicaciones en análisis de imágenes, tales como reconocimiento de patrones, clasificación de objetos, codificación de imágenes y reconstrucción. Un conjunto de momentos calculados a partir de una imagen digital generalmente representan características de la forma de la imagen, y proveen información de las diferentes geometrías que la componen. Los momentos geométricos fueron los primeros en ser aplicados a imágenes, además de ser computacionalmente simples [1]. Los momentos de bajo orden representan características globales de la imagen, los momentos de mayor orden contienen información de las orillas y detalles de la imagen [2].

En el dominio continuo, el teorema de unicidad dice que cualquier función imagen puede ser reconstruida a partir de sus momentos geométricos. Usando la equivalencia entre las diferentes bases de polinomios, este teorema es válido para otras bases. En el dominio discreto, el teorema de unicidad dice que una imagen puede ser reconstruida por un mismo número de píxeles en la imagen [3]. En el procesamiento digital de imágenes, el problema de reconstrucción abarca dos preguntas. ¿Cuál es el número óptimo de momentos para reconstruir una imagen? y ¿Cuál es el error de reconstrucción?.

En este capítulo se analiza la capacidad de descripción de los momentos ortogonales cartesianos y circulares. Donde la reconstrucción de imágenes es un método que permite evaluarlos a través de la calidad de la imagen reconstruida y el número de momentos usados. Cada conjunto de momentos depende de parámetros tales como los órdenes de reconstrucción, el tipo o familia de polinomio, entre otros.

El método para la determinación de parámetros usa algoritmos genéticos. En el caso de imágenes binarias un parámetro es el umbral, el cual es encontrado con la búsqueda dorada. La evaluación de la imagen reconstruida es a través del Error de Reconstrucción Normalizado de la Imagen (NIRE) y la correlación.

## 3.2. Momentos de una imagen

El conjunto de momentos ofrece generalmente la representación global de las características de una imagen. Sea  $\zeta$  la región en el plano  $x - y$ , una definición general de las funciones momento  $m_{nl}$  de orden  $(n + l)$ , de la función  $f(x, y)$  está dada por,

$$m_{nl} = \int \int_{\zeta} f(x, y) \Psi_{nl}(x, y) dx dy, \quad (3.2.1)$$

donde  $n, l = 0, 1, 2, \dots$  y  $\Psi_{nl}(x, y)$  es una función continua de  $(x, y)$  en  $\zeta$  llamada kernel de la transformada momento o conjunto base. Para una imagen, la función intensidad  $f(x, y)$  es finita y tiene soporte compacto en  $\zeta$ , y por tanto la integral de la Ec. 3.2.1 es finita. Variaciones en la Ec. 3.2.1 dependen del tipo de conjunto base usado. Por ejemplo, funciones base en coordenadas polares  $(r, \theta)$  requiere reescribir la Ec. 3.2.1 en representación polar del espacio de coordenadas imagen como,

$$\phi_{nl} = \int \int_{\zeta} f(r, \theta) \Psi_{nl}(r, \theta) r dr d\theta, \quad (3.2.2)$$

Las funciones base ortogonales válidas dentro del círculo de radio unidad, requieren escalar el espacio de coordenadas  $\zeta$  a la región  $[-1, 1]$  o de  $[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ , como se muestra en la Fig. 3.1.

Las ecuaciones de transformación son,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.2.3)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (3.2.4)$$

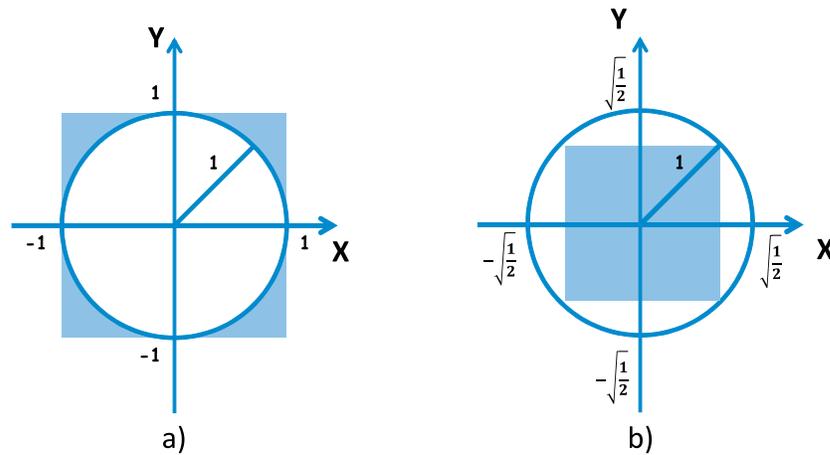


Figura 3.1: Coordenadas de transformación de una imagen a un círculo unitario: a) fuera; b) dentro del radio unidad.

### 3.2.1. Momentos Cartesianos

#### Momentos Armónicos Seno

Una función  $f(x)$  puede ser expandida en términos de una base ortogonal  $\psi(x)$  como,

$$f(x) \cong \sum_n^{\infty} S_n \psi_n(x) \tag{3.2.5}$$

donde  $S_n$  son los coeficientes. Si  $\psi_n = \text{sen}(nx\pi)$  entonces  $S_n$  son los coeficientes seno de Fourier.

En la Fig. 3.2 se muestra la función  $f(x) = x^3$  y su expansión en coeficientes seno.

Sea  $f(x, y)$  una función 2D que se expande en términos de una base ortogonal,  $\psi_{nl}(x, y) = \text{sen}(nx\pi)\text{sen}(ly\pi)$  como,

$$f(x, y) = \sum_n^N \sum_l^M S_{nx\pi} \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) \tag{3.2.6}$$

multiplicando la Ec. 3.2.6 por  $\text{sen}(nx\pi)\text{sen}(ly\pi)$ ,

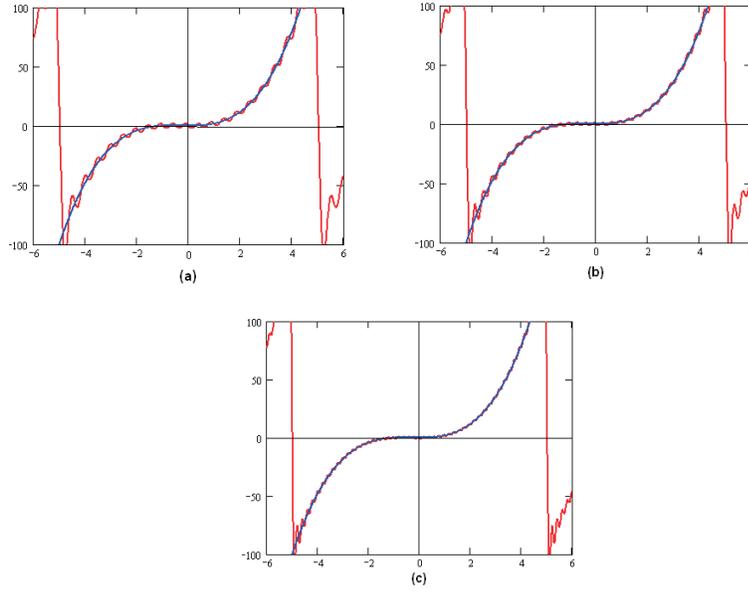


Figura 3.2: Expansión de la función  $f(x) = x^3$  en la base ortogonal de funciones seno usando a)  $n = 20$ , b)  $n = 30$  y c)  $n = 50$  coeficientes.

$$f(x, y) \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) = \sum_n \sum_l S_{nl} \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(lx\pi) \text{sen}(ly\pi) \text{sen}(ny\pi) \quad (3.2.7)$$

integrando la Ec. 3.2.7,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_n \sum_l S_{nl} \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(lx\pi) \text{sen}(ny\pi) \text{sen}(ly\pi) dx dy \quad (3.2.8)$$

$$= \sum_n \sum_l S_{nl} \int_0^1 \text{sen}(\pi nx) \text{sen}(\pi lx) dx \int_0^1 \text{sen}(\pi ly) \text{sen}(\pi ny) dy \quad (3.2.9)$$

Usando la propiedad de ortogonalidad,

$$\langle \text{sen}(nx\pi), \text{sen}(lx\pi) \rangle = \int_0^1 \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(lx\pi) dx = \delta_{nl} = \begin{cases} 0 & n \neq l \\ 1 & n = l \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) dx dy = \sum_n \sum_l S_{nl} \delta_{nl} \delta_{ln} = S_{nl} \quad (3.2.11)$$

$$\implies \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \text{sen}(nx\pi) \text{sen}(ly\pi) dx dy = S_{nl} = A_{nl}^s \quad (3.2.12)$$

Los coeficientes  $A_{nl}^s$  los llamaremos los momentos Armónicos Seno, y serán usados para la descripción de formas en una imagen  $f(x, y)$ .

### Momentos Krawtchouk

Los momentos Krawtchouk son un conjunto de momentos formados por los polinomios Krawtchouk y tienen la propiedad de extraer las características locales de una imagen. Los momentos Krawtchouk de orden  $(n+l)$  en términos de los polinomios pesados de Krawtchouk para una imagen con la función de intensidad  $f_{x,y}$ , se definen como [4],

$$A_{n,l}^K = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{L-1} \bar{K}_n(x; p_1, N-1) \bar{K}_l(y; p_2, L-1) f_{x,y} \quad (3.2.13)$$

donde  $M$  y  $L$  son los pixeles de la imagen  $f_{x,y}$ ,  $p_1$  y  $p_2$  son parámetros de probabilidad de los polinomios de Krawtchouk  $\bar{K}_n(x; p, N-1)$  definidos por la Ec.2.4.6.

### 3.2.2. Momentos Circulares

#### Momentos Jacobi-Fourier

Los momentos de Jacobi-Fourier son momentos ortogonales genéricos. Los momentos  $A_{nl}^J$  de orden radial  $n$  y armónico  $l$  para una función  $f(r, \theta)$  en coordenadas polares, pueden ser calculados como [5],

$$A_{nl}^J = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(\alpha, \beta, r) e^{-il\theta} r dr d\theta \quad (3.2.14)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que determinan el tipo de polinomios ortogonales.

Los momentos de Jacobi-Fourier en forma discreta están dados por,

$$A_{nl}^J = \sum_r \sum_\theta f(r_{i,j}, \theta_{i,j}) J_n(\alpha, \beta, r) e^{-il\theta_{i,j}} \quad (3.2.15)$$

donde  $J_n(\alpha, \beta, r)$  son los polinomios de Jacobi definidos por la Ec.2.2.6.

### Momentos Bessel Fourier de primer tipo

Definimos los momentos de Bessel-Fourier usando la función Bessel de primer tipo en coordenadas polares como [6],

$$A_{n,l}^B = \frac{1}{2\pi a_n} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) B_n(\lambda_n r) e^{-jl\theta} r dr d\theta \quad (3.2.16)$$

donde  $f(r, \theta)$  es la imagen y  $n = 0, 1, 2, \dots, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es el orden del momento,  $a_n = [J_{v+1}(\lambda_n r)]^2 / 2$  es la constante de normalización.  $J_v(\lambda_n r)$  es el polinomio de Bessel en  $r$  de grado  $n$  y  $\lambda_n$  es el  $n$ -ésimo cero de  $J_v(r)$ , definido en la Ec.2.3.1.

## 3.3. Reconstrucción de Imágenes

Las imágenes digitales pueden ser reconstruidas a partir de un número suficientemente grande de momentos ortogonales de su distribución de intensidades, usando la transformada inversa respectiva. Los momentos ortogonales de una imagen binaria generan una reconstrucción con valores de intensidad que serán umbralizados. En el caso de imágenes con niveles de gris, métodos de eualización del histograma descrito en el Apéndice C serán empleados para transformar los valores de intensidad a un rango válido de niveles de intensidad. La reconstrucción de la imagen puede ayudar a examinar el desempeño de los momentos para la representación de información así como su convergencia a través del número de momentos necesarios para la reconstrucción de la imagen.

### 3.3.1. Reconstrucción usando momentos cartesianos

La teoría de funciones ortogonales dice que una imagen  $f(x, y)$  puede ser aproximada por la suma pesada de sus momentos ortogonales como,

$$f_R(x_i, y_j) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} A_{nl} \left[ \begin{array}{c} \text{sen}\left(\frac{nx_i\pi}{N}\right) \text{sen}\left(\frac{ly_j\pi}{L}\right) \\ \bar{K}_n(x, p1, N-1) \bar{K}_l(y, p2, L-1) \end{array} \right] \quad (3.3.1)$$

donde  $N, L$  representan los ordenes máximos de los momentos  $A_{nl}$  usados en la reconstrucción de imágenes.

La función  $f_R(x, y)$  es la suma parcial de los primeros polinomios y su distribución de amplitud se obtiene a partir de  $|f_R|$ . En la Figura 3.3 se muestra una imagen binaria y su reconstrucción usando los polinomios Armónicos Seno para  $n = 32; l = 32$ .

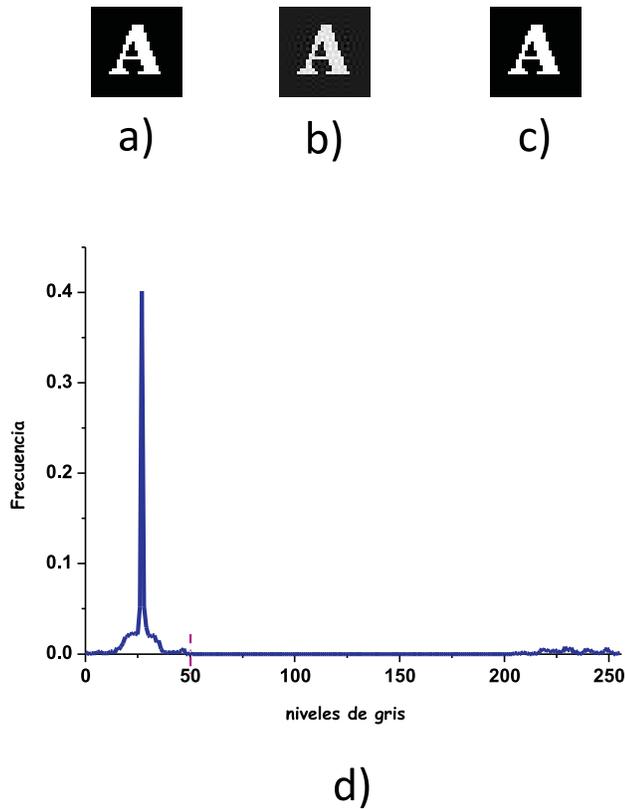


Figura 3.3: a) Imagen Binaria de 32 x 32 px, b) Reconstrucción para  $n = l = 32$  , c) Reconstrucción binarizada con un umbral= 50, d) Histograma de la imagen reconstruida.

### 3.3.2. Reconstrucción usando momentos circulares

La función imagen  $f(r, \theta)$  puede ser reconstruida por la suma de sus momentos circulares  $A_{n,l}$  como,

$$f_R(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} A_{nl} \left[ \begin{matrix} J_n(\alpha, \beta, r_{i,j}) \\ B_v(\lambda_n r_{i,j}) \end{matrix} \right] [ e^{-il\theta_{i,j}} ] \quad (3.3.2)$$

donde N y L son los órdenes máximos de los momentos.

En la Figura.3.4 se muestra una imagen en nivel de gris y su reconstrucción usando polinomios de Bessel para  $n = 50; l = 50; v = 1$ .

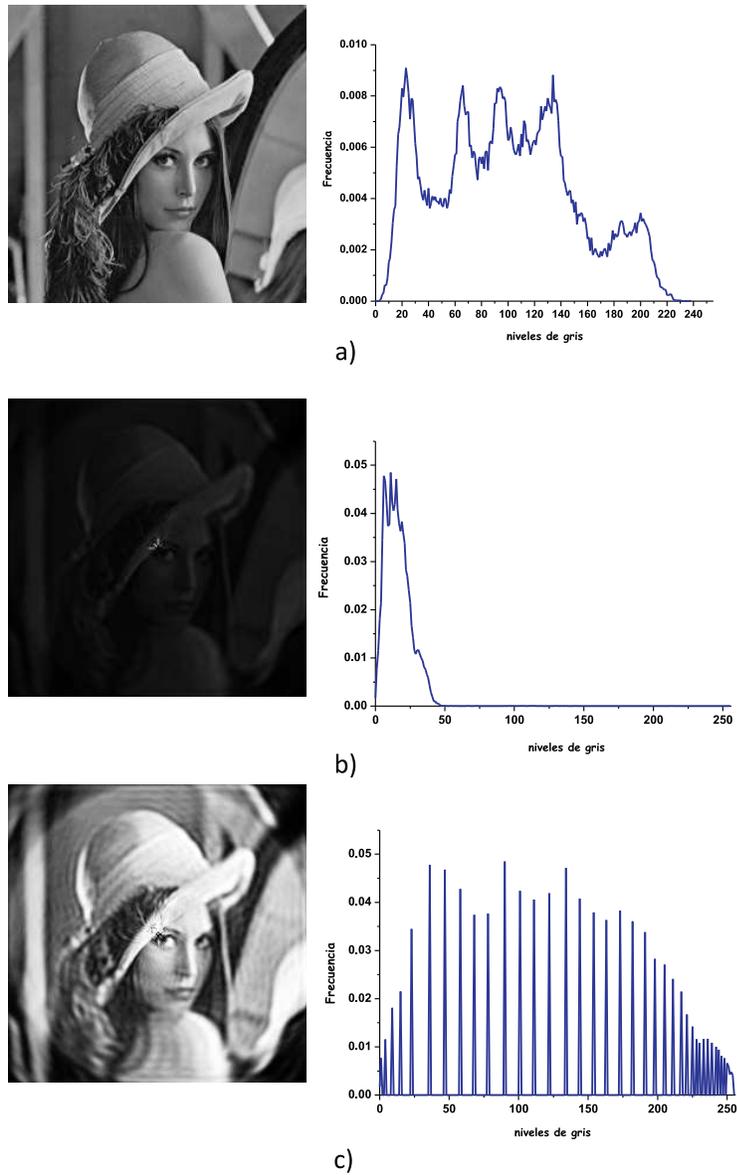


Figura 3.4: a) Imagen original e histograma, b) Imagen reconstruida e histograma, c) Imagen resultante de eualizar el histograma de b) e histograma.

### 3.4. Determinación de parámetros

Una de las problemáticas es la determinación de los parámetros que generan las bases de polinomios ortogonales usados en el cálculo de momentos. Dado que la eficiencia de los algoritmos de reconstrucción depende de la elección de éstos, se proponen métodos de búsqueda y elección de parámetros, que generen polinomios adecuados para la representación y reconstrucción de imágenes. Los conjuntos de polinomios analizados se muestran en la Fig. 3.5.

Dominio	Base Ortogonal	Parámetros
Cartesianos	$\bar{K}_n(x; p, N - 1)$ Krawtchouk	$n, l, p, umbral$
	$sen(n\pi x)sen(l\pi y)$ Armónico Seno	$n, l, umbral$
Circulares	$J_n(\alpha, \beta, r)e^{-il\theta}$ Jacobi-Fourier	$\alpha, \beta, n, l, umbral$
	$B_v(\lambda_n)e^{-il\theta}$ Bessel Fourier	$v, n, l, umbral$

Figura 3.5: Parámetros de las bases ortonormales analizados.

Si se evalúan los parámetros  $\alpha, \beta, n$  y  $l$  de la base de polinomios de Jacobi-Fourier el número de combinaciones resulta en,

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{3.4.1}$$

para,

$\alpha$	$\beta$	$n$	$l$
1	1	1	1
1	1	1	2
...	...	...	...
22	22	22	22

donde  $n = 22$  y  $r = 4$ .

Por lo tanto, las 7315 combinaciones consumirían un tiempo de cómputo de 203 hrs 20 min aproximadamente, equivalentes a 9 días utilizando imágenes de 64 x 64 px y un equipo de cómputo a 2,67 GHz ,12 GB en RAM y 500 GB en disco duro.

Teniendo en cuenta los puntos antes mencionados se proponen métodos que ayudaran a hacer el cálculo de los parámetros de una forma más rápida. Para ello se eligieron los siguientes métodos,

1. Algoritmos Genéticos. (Apéndice A)
2. La búsqueda dorada. (Apéndice B)

El primero de los métodos se empleó para obtener los valores de los parámetros correspondientes a cada conjunto y el segundo para encontrar el umbral en el caso de las imágenes binarias.

Los Algoritmos Genéticos se encuentran dentro de los Algoritmos Meta-Heurísticos los cuales buscan soluciones factibles en dominios donde la tarea es compleja. Un ejemplo de la aplicación de los Algoritmos Genéticos en el conjunto de polinomios complejos de Jacobi-Fourier se muestra en la Fig. 3.6.

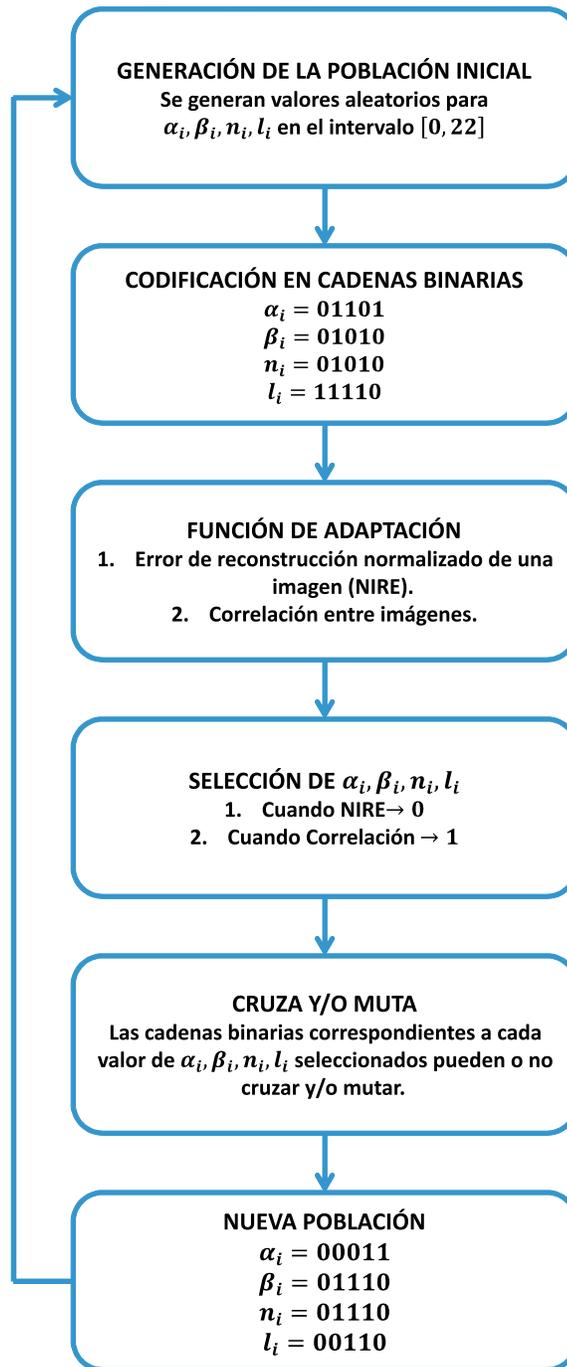


Figura 3.6: Ejemplo del comportamiento de los Algoritmos Genéticos para la búsqueda de los parámetros en la base de polinomios complejos Jacobi-Fourier  $J_n(\alpha, \beta, r)e^{-il\theta}$ .

### 3.5. Análisis de Error

Para evaluar la eficiencia de los momentos se tienen dos medidas la primera es la correlación entre la imagen original  $f$  y la reconstruida  $f_R$ , definida como,

$$C = 1 - \frac{\sum_i \sum_j [f(x_{ij}, y_{ij}) - \mu_f][f_R(x_{ij}, y_{ij}) - \mu_{f_R}]}{\sum_i \sum_j \sqrt{\sum_i \sum_j [f(x_{ij}, y_{ij}) - \mu_f]^2 \sum_i \sum_j [f_R(x_{ij}, y_{ij}) - \mu_{f_R}]^2}}. \quad (3.5.1)$$

donde  $\mu_f$  es la media de la imagen original,  $\mu_{f_R}$  es la media de la imagen reconstruida y el Error de Reconstrucción de la Imagen Normalizado (NIRE) definido por,

$$NIRE = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(x_{ij}, y_{ij}) - f_R(x_{ij}, y_{ij}))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [f(x_{ij}, y_{ij})]^2} \quad (3.5.2)$$

donde  $M, N$  es el tamaño de la imagen,  $f_R$  es la imagen reconstruida y  $f$  es la imagen original.

### 3.6. Resultados

En la Fig.3.7 se tienen un conjunto de imágenes binarias de prueba de tamaño  $32 \times 32$  px del alfabeto castellano. Se analizan los casos de fondo negro y blanco.

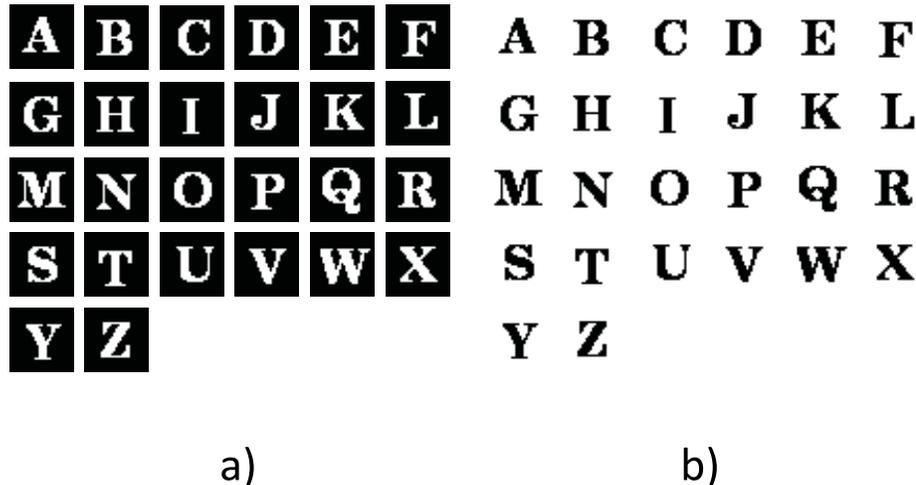
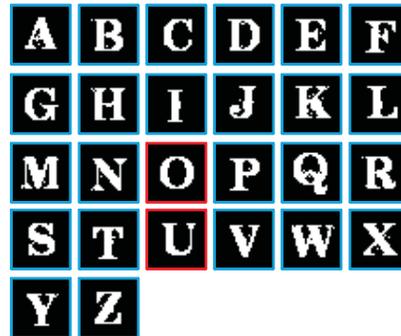


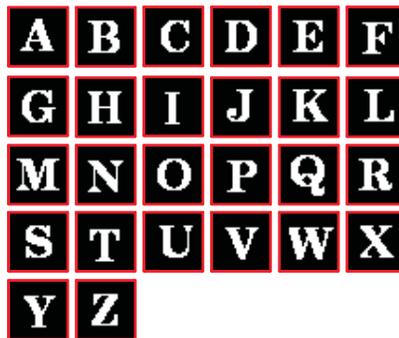
Figura 3.7: Imágenes binarias de prueba a) negativas y b) positivas.

En la Fig. 3.8 se muestra el resultado de reconstrucción de las imágenes de la Fig. 3.7(a) a partir de momentos cartesianos y circulares. Y en la Figura 3.9 se muestran las

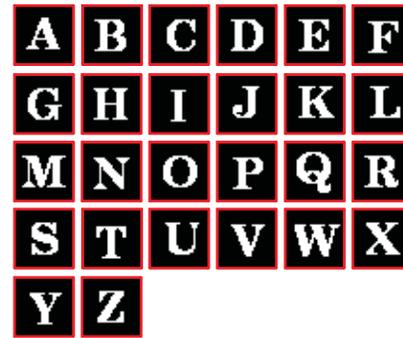
gráficas de error de reconstrucción que evalúan la eficiencia de los conjuntos analizados.



a)



b)



c)

Figura 3.8: **Imágenes binarias negativas reconstruidas con momentos a) Jacobi-Fouier con  $\alpha = 13$ ,  $\beta = 5$  y  $n = l = 22$ , b) Armónicos Seno con  $n = l = 32$  y c) Krawtchouk con  $n = l = 32$ .**

En la Fig. 3.10 se muestra el resultado de reconstrucción de las imágenes de la Fig. 3.7(b) a partir de momentos cartesianos y circulares. Y en las gráficas de la Fig.3.11 se muestran los resultados de evaluación de la calidad de reconstrucción de los tres conjuntos analizados.

La evaluación de las funciones momento para la descripción de imágenes se extiende a imágenes en niveles de gris y con cambios en su resolución espacial. En la Fig. 3.12 se tienen un conjunto de imágenes a escala de gris con tamaños de  $64 \times 64$  px,  $128 \times 128$  px y  $256 \times 256$  px.

En la Fig. 3.13 se muestran los resultados de reconstrucción de la imagen de Lena

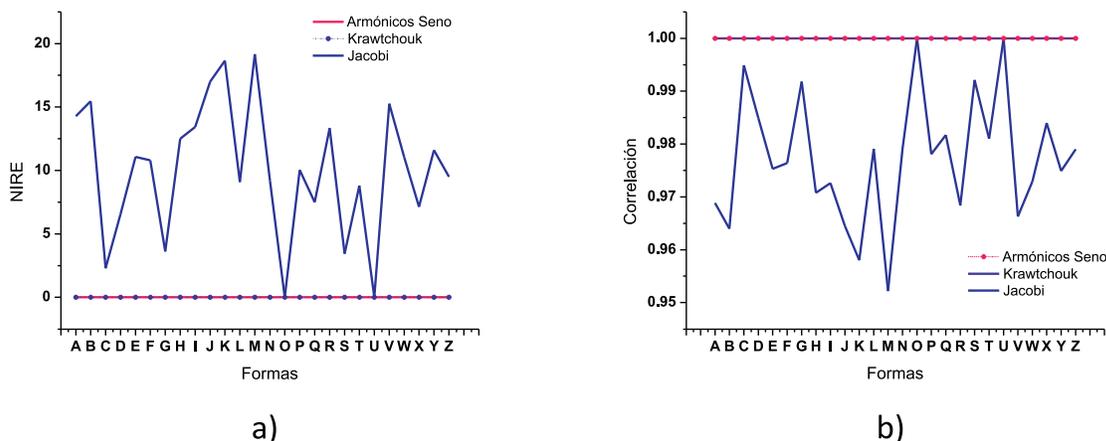


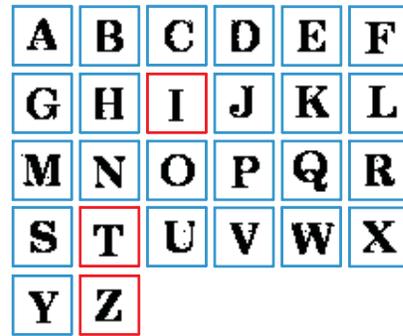
Figura 3.9: Gráficas de Error usando como métrica el a) NIRE y la b) Correlación. Como se puede observar, los conjuntos cartesianos de Krawtchouk y Armónicos Seno logran una reconstrucción completa.

de  $64 \times 64$  px usando los conjuntos cartesianos y circulares. La gráfica de la Fig.3.14 muestra los resultados de correlación de la imagen original y las reconstruidas.

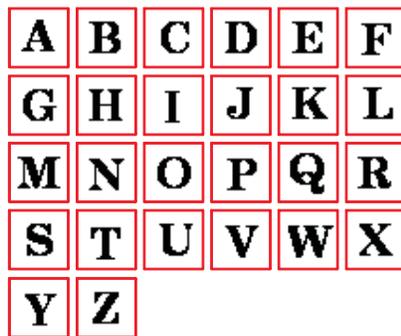
En la Fig.3.15 se muestran los resultados de reconstrucción de imágenes de  $128 \times 128$  px usando momentos Armónicos Seno, Jacobi-Fourier y Bessel Fourier. En este caso, los momentos de Krawtchouk no fueron analizados debido a su límite de  $n = l = 96$ . La gráfica de la Fig.3.16 muestra los resultados de correlación de la imagen original y las reconstruidas de tamaño  $128 \times 128$ . La mejor reconstrucción se obtuvo usando los momentos Armónicos Seno para  $n = l = 128$ . Los tiempos de cómputo para el conjunto Bessel fue de 22 hrs aproximadamente.

En la Fig.3.17 se muestran los resultados de reconstrucción de imágenes de  $256 \times 256$  px usando momentos Armónicos Seno, Jacobi-Fourier y Bessel Fourier. Nuevamente los momentos de Krawtchouk no fueron analizados debido a su límite de  $n = l = 96$ . La gráfica de la Fig.3.18 muestra los resultados de correlación de la imagen original y las reconstruidas de tamaño  $256 \times 256$ . La mejor reconstrucción se obtuvo usando los momentos Armónicos Seno para  $n = l = 256$ . Otra vez los tiempos de cómputo para el conjunto Bessel fue de 22 hrs aproximadamente.

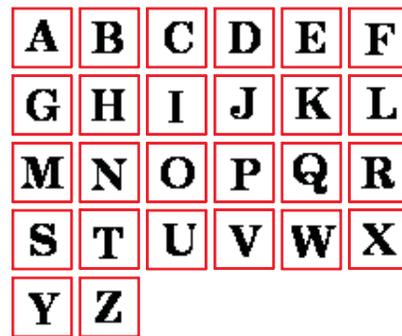
En el siguiente Capítulo se usarán las funciones momento analizadas, en problemas de fusión de imágenes y clasificación de objetos. El objetivo es establecer las áreas de aplicación de cada uno de los conjuntos en función de la eficiencia, exactitud, viabilidad computacional y tiempos de respuesta.



a)



b)



c)

Figura 3.10: Imágenes binarias positivas reconstruidas con momentos a) Jacobi-Fouier con  $\alpha = 5, \beta = 4$  y  $n = l = 19$ , b) Armónicos Seno con  $n = l = 32$  y c) Krawtchouk con  $n = l = 32$ .

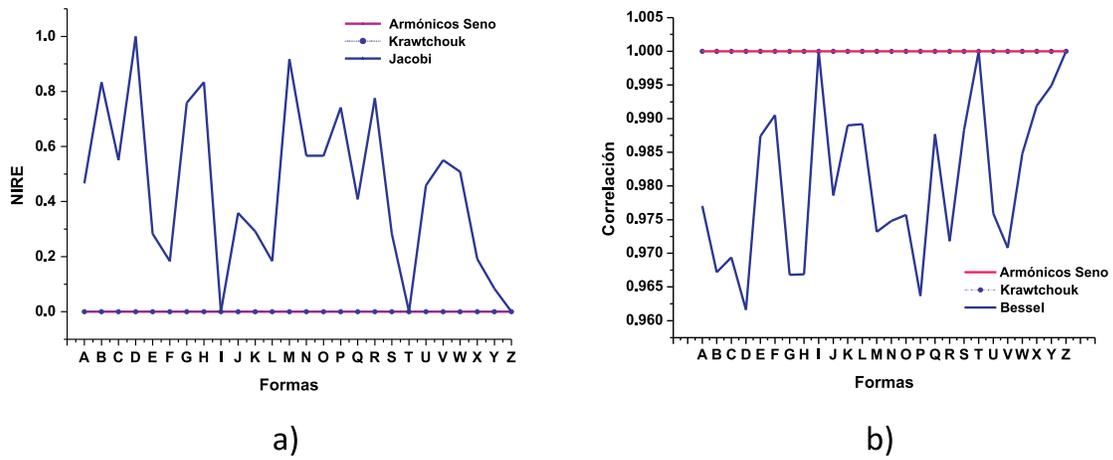


Figura 3.11: Gráficas de Error usando como métrica el a) NIRE y la b) Correlación. Como se puede observar, los conjuntos cartesianos de Krawtchouk y Armónicos Seno logran una reconstrucción completa.

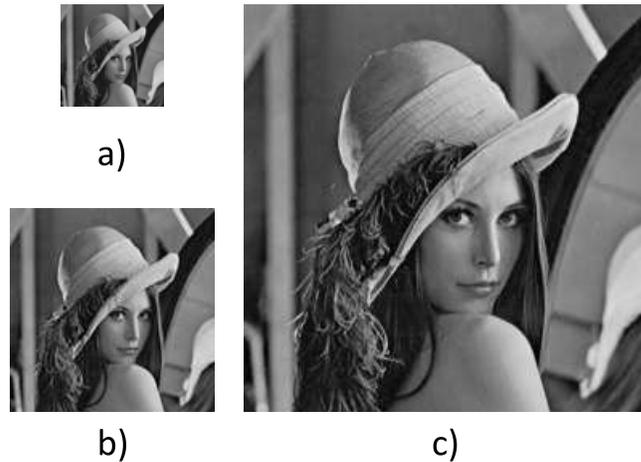


Figura 3.12: Imágenes de prueba en escala de gris de tamaño a)  $64 \times 64$  px, b)  $128 \times 128$  px, c)  $256 \times 256$  px.

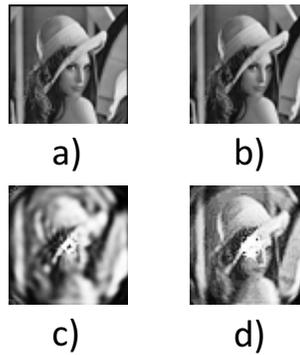


Figura 3.13: Imágenes en escala de gris de tamaño  $64 \times 64$  px reconstruidas con momentos  
 a) Armónicos Seno con  $n = l = 64$ , b) Krawtchouk con  $p = 0,1, n = l = 64$ , c) Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 6$  y  $n = l = 20$  y d) Bessel con  $n = l = 35$  y  $v = 1$ . Las imágenes c) y d) son el resultado de ecualizar su histograma.

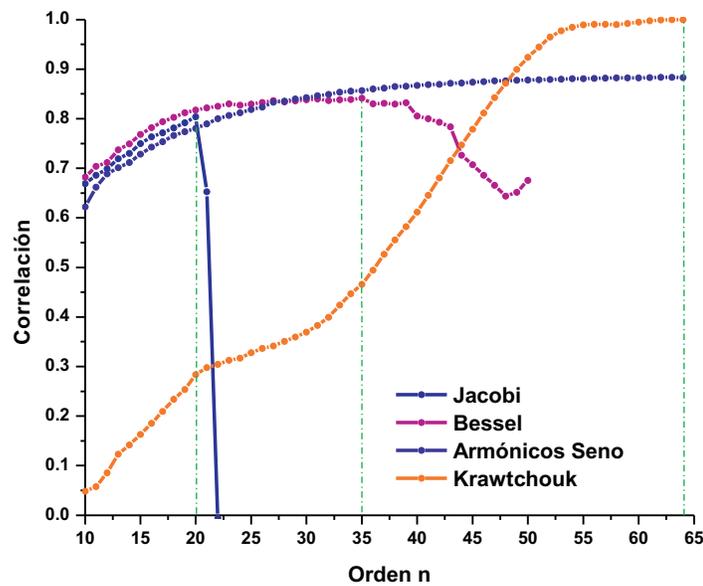


Figura 3.14: Gráfica de correlación de imágenes original y reconstruidas en escala de gris con tamaño de  $64 \times 64$  px.



Figura 3.15: Imágenes en escala de gris de tamaño  $128 \times 128$  px reconstruidas con momentos a) Armónicos Seno con  $n = l = 128$ , b) Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 4$  y  $n = l = 21$  y c) Bessel con  $n = l = 47$ .

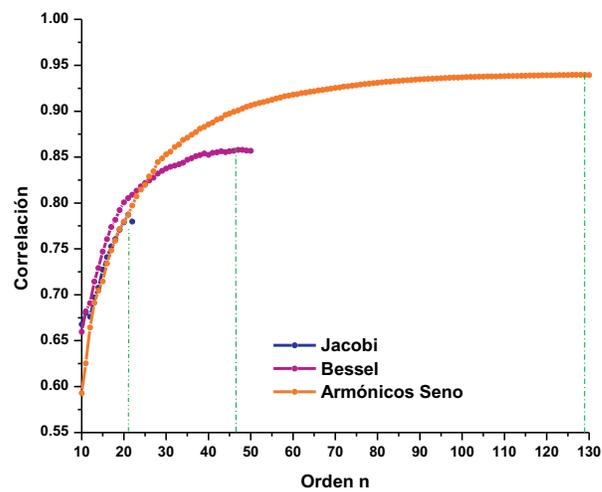


Figura 3.16: Gráfica de correlación de imágenes a escala de gris con tamaño de  $128 \times 128$  px.



Figura 3.17: Imágenes en escala de gris de tamaño  $256 \times 256$  px reconstruidas con momentos a) Armónicos Seno con  $n = l = 256$ , b) Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 4$  y  $n = l = 21$  y c) Bessel con  $n = l = 50$ .

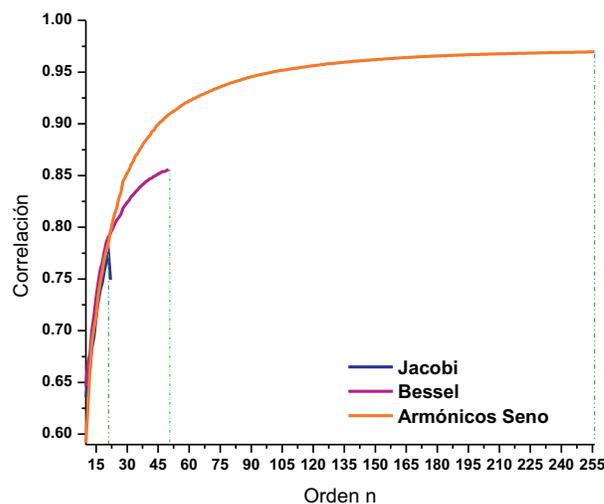


Figura 3.18: Gráfica de correlación de imágenes original y reconstruida en escala de grises con tamaño de  $256 \times 256$  px.

### 3.7. Conclusiones

Se evaluó la capacidad de descripción de los momentos Armónicos Seno, Krawtchouk, Jacobi-Fourier y Bessel-Fourier en imágenes binarias y en escala de grises, para tamaños de  $2^n$ ,  $n = 5, 8$ .

Se mostró que el funcionamiento de cada conjunto depende de sus parámetros particulares. La solución propuesta para la determinación de estos parámetros fue usando algoritmos genéticos, la cual garantiza la mejor reconstrucción. Un parámetro en común en todos los conjuntos es el umbral adecuado para la binarización de imágenes. Este último se determinó usando el método de la búsqueda dorada. Las métricas de evaluación de reconstrucción fueron el NIRE y la correlación entre la imagen original y la reconstruida.

Para el caso binario, las gráficas de error y correlación de las Figuras 3.9 y 3.11 nos muestran que los momentos cartesianos logran recuperar al 100 % de la información usando un orden de reconstrucción igual al tamaño de la imagen. La reconstrucción de imágenes en niveles de gris a partir de momentos Armónicos Seno fue alcanzada en todos los tamaños y con un orden igual al tamaño de la imagen, como se mostró en las Fig. 3.13, 3.15 y 3.17. La reconstrucción de estas imágenes a partir de momentos de Krawtchouk sólo fue posible para el tamaño de  $64 \times 64$ , debido a una limitante en el orden  $n = l = 96$ .

### 3.8. Bibliografía

[1] M.K. Hu, "Visual pattern recognition by moment invariants," *IRE. Trans. Inform. Theory* **8**, 179-187 (1962).

[2] A. Padilla-Vivanco., G. Urcid-Serrano., F. Granados-Agustín., and A. Cornejo-Rodriguez. "Comparative analysis of pattern reconstruction using orthogonal moments," *Optical Engineering*, **46** (1), 017002-1 a 017002-15,(2007).

[3] Flusser J. *Moments and Invariants in Pattern Recognition*, John Wiley and Sons Ltd. (2009).

[4] Pew-Thian Yap, Raveendran Paramesran, and Seng-Huat Ong. "Image Analysis by Krawtchouk Moments," *IEEE transactions on image processing*, **12** (11), (2003).

[5] Z. Ping, H. Ren, J. Zou, Y. Sheng and W. Bo. "Generic Orthogonal moments: Jacobi Fourier moments for invariant image description," *Pattern Recognition* **40**, 1245-1254 (2007).

[6] X. Bin, M. Jiang-Feng, and Xuan W. "Image analysis by Bessel-Fourier moments," *Pattern Recognition* **43**, 2620-2629 (2010).



# Capítulo 4

## Aplicaciones para el reconocimiento de patrones y fusión de imágenes

### 4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es dar una noción de la aplicación práctica de los momentos ortogonales. Se analizan dos problemas: la fusión de imágenes digitales con defoco y la clasificación de objetos degradados por ruido gaussiano. La fusión de imágenes se lleva a cabo en el espacio de las funciones momento, donde se encuentra representada una imagen en términos de sus frecuencias componentes. Mientras que la clasificación de objetos hace uso de los de descriptores invariantes a la rotación y escalamiento de la imagen.

En cualquier caso, es importante tener en cuenta sus limitaciones. Alta sensibilidad al error de segmentación, especialmente en los momentos de alto orden y con los momentos de bajo orden, que están relacionados con sus características globales, se tienen implicaciones negativas sobre imágenes con oclusión y fondo no uniforme [1].

### 4.2. Fusión de Imágenes

La fusión de imágenes digitales es el proceso de combinar dos o más imágenes en una sola que integre información complementaria, tal como orillas o regiones de interés, de cada una de las imágenes de entrada. Dicha fusión es frecuentemente requerida para imágenes obtenidas en diferentes modalidades o técnicas de captura de una misma escena u objetos. Por lo que, el objetivo de la fusión es hacer que muchas características surjan en la nueva imagen para propósitos de percepción visual humana y procesamiento por computadora [2].

Entre los métodos más simples para la fusión de imágenes se encuentran el promedio y el máximo valor píxel a píxel de dos imágenes. Pero el primero fusiona las imágenes con una reducción en el contraste y el segundo introduce artefactos en la imagen de salida. Se propone la fusión de imágenes usando momentos, el cual es un método general en el que fusionando los coeficientes bajo una regla de fusión específica y después calculando la inversa de los coeficientes ya fusionados, resulta en una mejor preservación tanto de orillas como de información complementaria de los objetos u escenas de las imágenes de entrada en la nueva imagen fusionada.

### 4.2.1. Fusión usando momentos Armónicos Seno

Sean  $A(i, j)$  y  $B(i, j)$  dos imágenes digitales cuyos momentos armónicos seno  $m_A(i, j)$  y  $m_B(i, j)$  respectivamente, están dados por la Ec.3.2.12. La regla de fusión consiste en la suma de los valores momento como,

$$m_C(i, j) = m_A(i, j) + m_B(i, j) \quad (4.2.1)$$

Partiendo de los momentos ya fusionados  $m_C(i, j)$ , se calcula la reconstrucción de la imagen  $C(i, j)$  usando la Ec. 3.3.1. Este proceso se muestra esquemáticamente en la Figura 4.1.

En la Figura 4.2 se muestran dos imágenes de prueba en niveles de gris para evaluar la eficiencia de los momentos Armónicos Seno en la fusión de imágenes y en la Figura 4.3 los resultados.

Para el caso de imágenes a color, se realizó una transformación del espacio Rojo-Verde-Azul (RGB) al espacio Tono-Saturación-Intensidad (HSI) descrito en el Apéndice D. Se fusionaron sólo los canales de Intensidad usando el algoritmo de la Figura 4.4. Los resultados de fusión se muestran en la Figura 4.5. Como se puede observar, el método es capaz de extraer las altas frecuencias, pero con la desventaja de la alteración del tono en la imagen de salida.

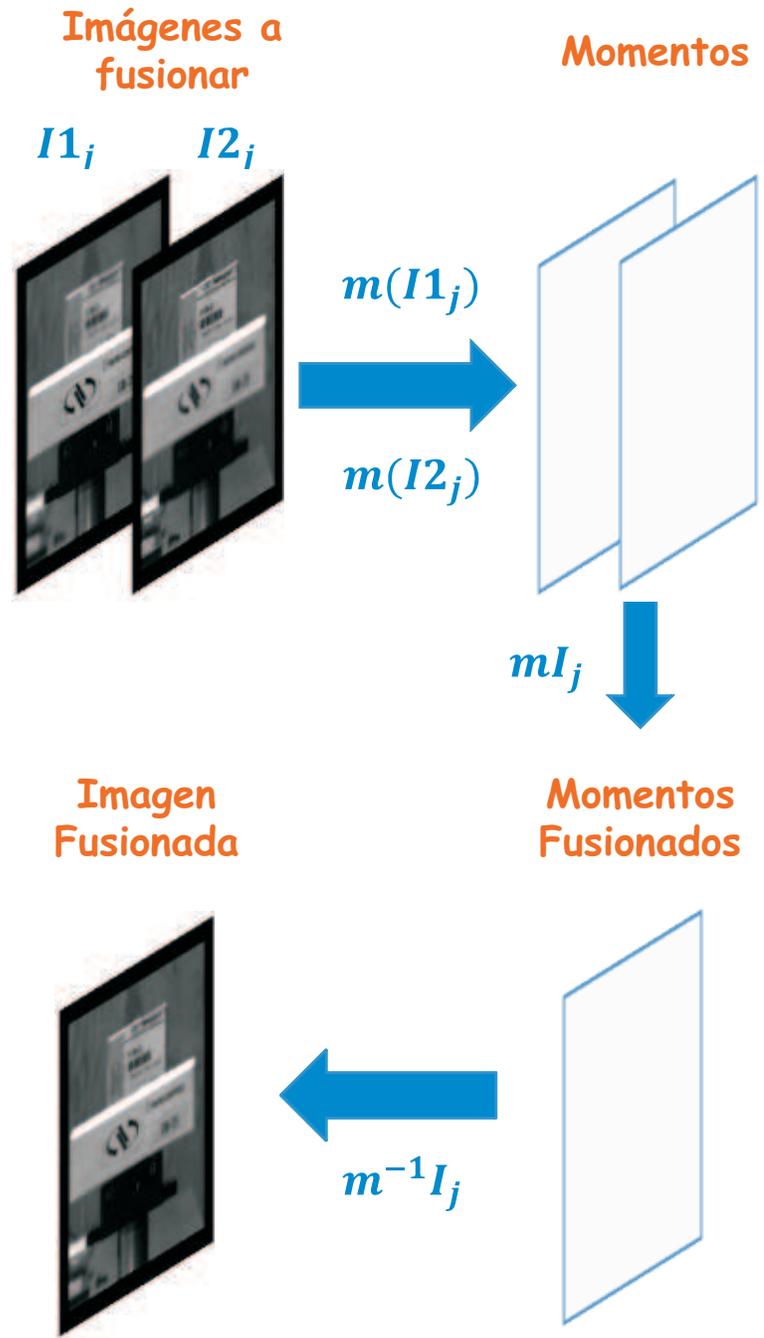


Figura 4.1: Esquema de fusión de imágenes usando funciones momento Seno.

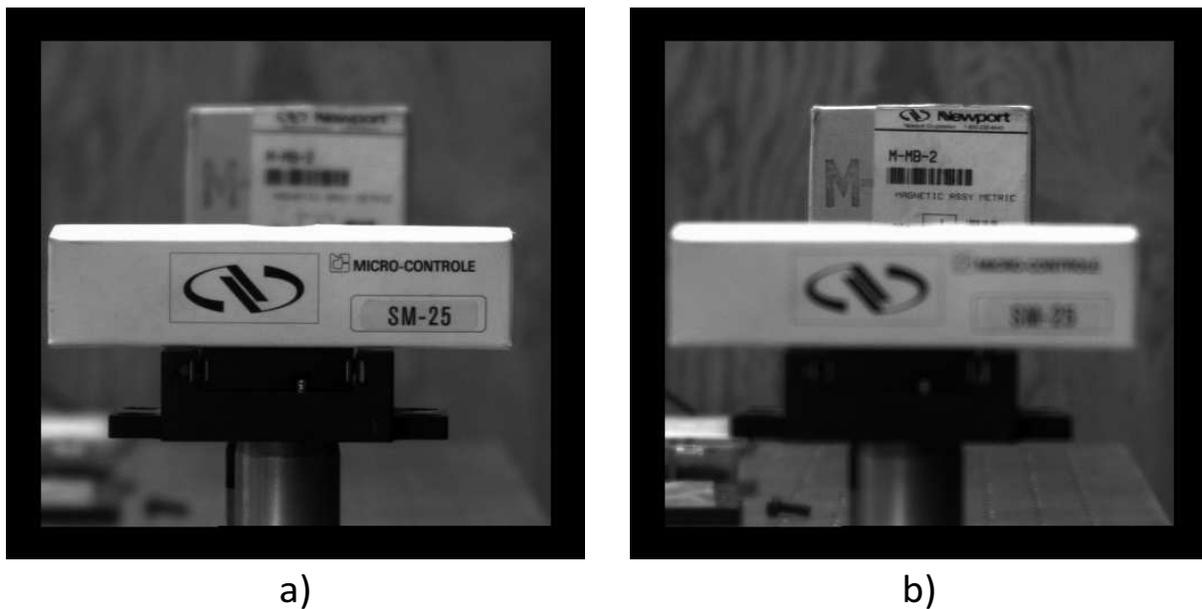


Figura 4.2: Imágenes de entrada con el objeto enfocado en el a) primer plano y b) en el segundo plano.

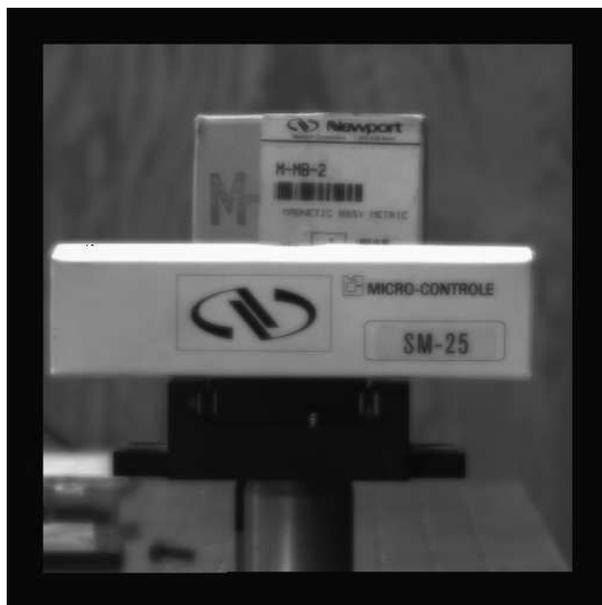


Figura 4.3: Resultado de la fusión de imágenes usando como imágenes de entrada las de la Figura 4.2. Se calculó la frecuencia espacial  $FS=8.548$  para evaluar la fusión.

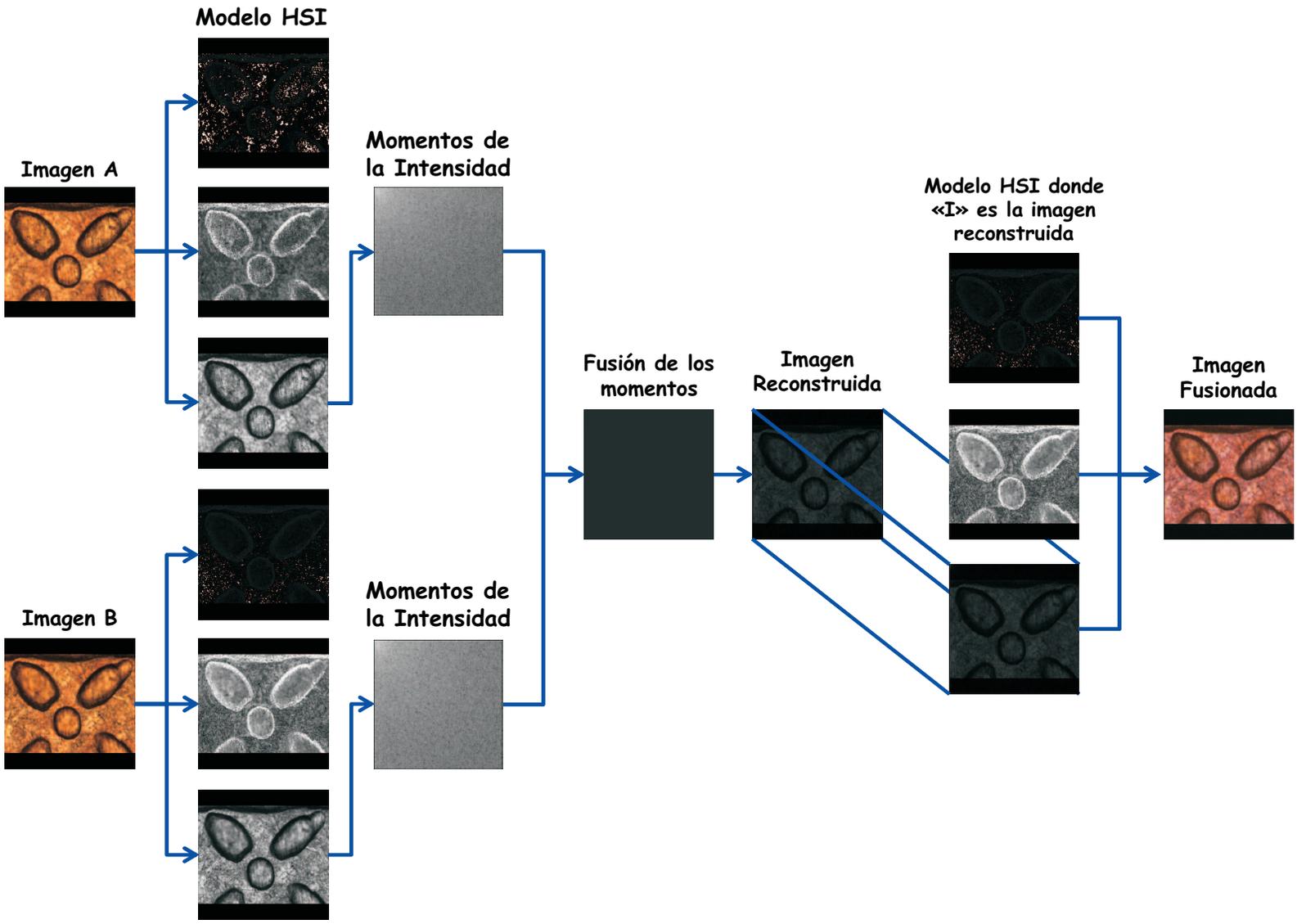


Figura 4.4: Esquema de la fusión de imágenes a color.

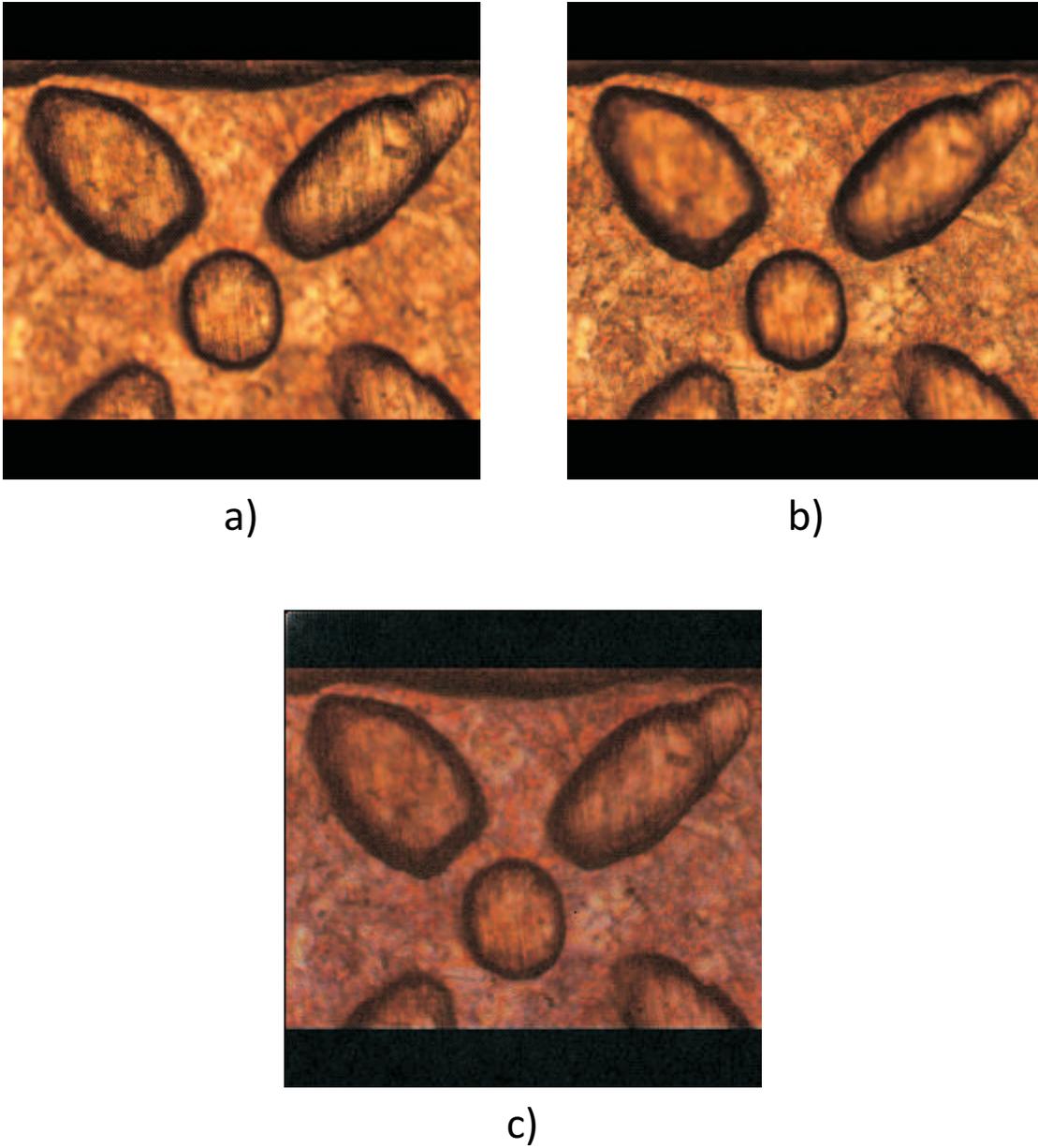


Figura 4.5: Fusión de imágenes a Color, en los incisos (a) y (b) se muestran diferentes partes enfocadas de las imágenes y c) Fusión de las dos imágenes usando momentos armónicos seno.

### 4.2.2. Fusión de imágenes usando momentos Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier y Krawtchouk

Sea  $I$  una imagen de tamaño  $MXN$ , con  $M = 2^p$ , divida en  $2^p \times 2^p$  bloques cuadrados, para  $p = 0, 1, 2, \dots$  número de particiones sobre la imagen. Si una imagen es particionada en  $p = 1$ , entonces, el número de renglones y columnas quedarán dividido en  $2^1 = 2$ , formando así, 4 bloques cuadrados  $I_j$  para  $j = 1, 2, 3, 4$ , como se ve en la Figura 4.6.

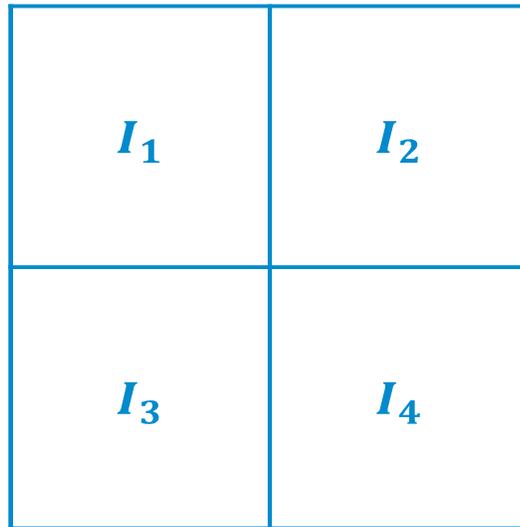


Figura 4.6: Imagen  $I$  de tamaño  $MXN$  dividida en 4 bloques de tamaño  $\frac{M}{2} \times \frac{N}{2}$

Una vez particionadas las imágenes de entrada  $I_1$  e  $I_2$  por la ecuación de los momentos, podemos calcular sus momentos  $mI_{1j}$  y  $mI_{2j}$ , de cada uno de los bloques  $I_1$  e  $I_2$ , con el objetivo de sumar los bloques de momentos como,

$$mI_j = mI_{1j} + mI_{2j} \quad (4.2.2)$$

donde  $mI_j$  son los bloques de momentos de las imágenes ya fusionadas, como se muestra en la Figura 4.7.

Como se observó en el Capítulo anterior, el orden de reconstrucción máximo para los momentos de Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier y Krawtchouk es menor a 96. Por lo tanto, la fusión de imágenes usando estos conjuntos requiere de imágenes con tamaños menores a 96. Usando el algoritmo de división en bloques, la imagen será particionada en bloques menores al orden máximo de reconstrucción de cada conjunto. Con ello, será posible realizar la fusión usando momentos cartesianos de Krawtchouk y momentos circulares de Jacobi-Fourier y Bessel-Fourier.

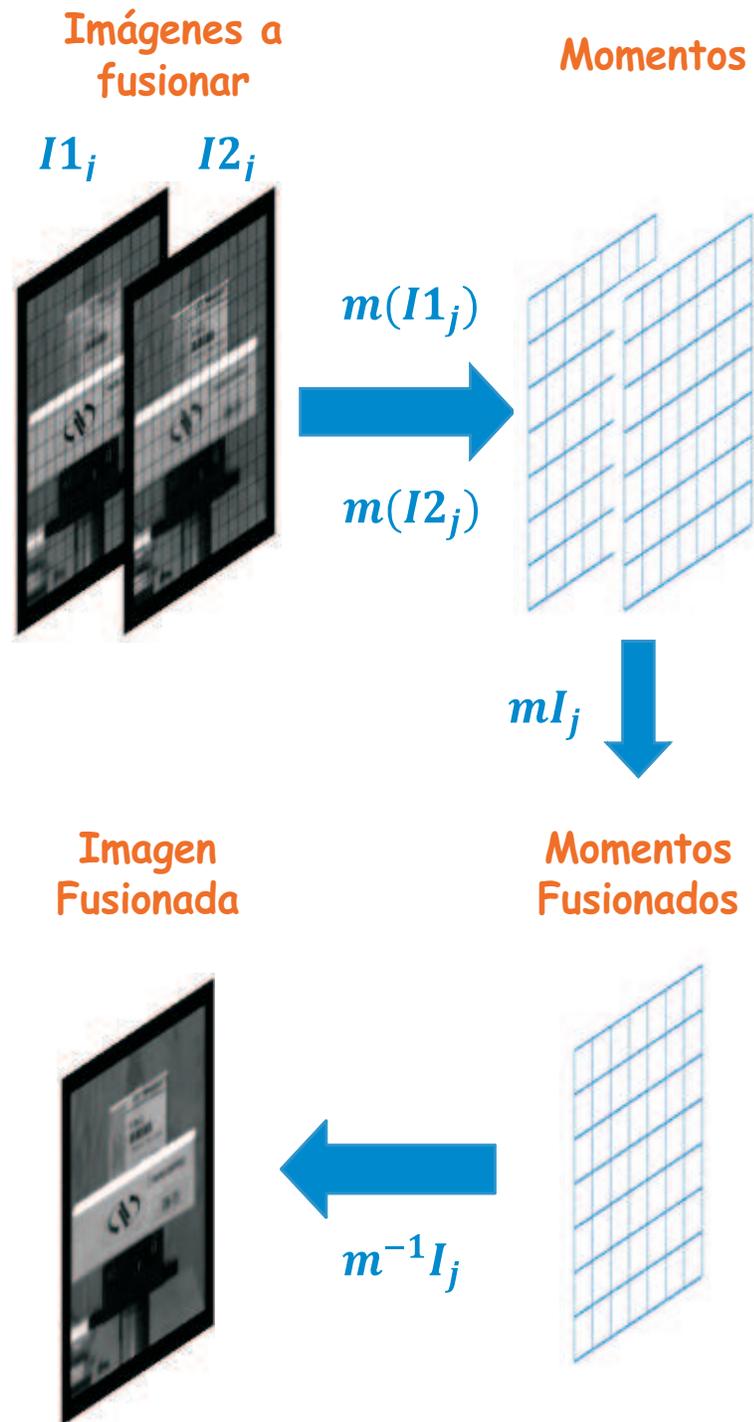


Figura 4.7: Esquema de fusión de imágenes usando funciones momento.

### **Fusión de imágenes usando momentos Bessel-Fourier**

La fusión de imágenes a partir de los momentos de Bessel-Fourier, presenta ruido periódico que reduce la visibilidad o el contraste en la imagen fusionada, como se puede ver en la Figura 4.8a. Por lo anterior, se filtraron las imágenes en el dominio de Fourier con un filtro pasabajas de radio variable, Figuras 4.8b y c, y los resultados del filtraje se muestran en la Figura 4.8d. Como se puede observar en las Figuras 4.9 y 4.10, la fusión es dependiente del número de particiones en la imagen y del orden de los momentos.

### **Fusión de imágenes usando momentos Jacobi-Fourier**

Para el caso de la fusión de imágenes a partir de momentos de Jacobi-Fourier, se muestran los resultados en la Figura 4.11. Los tiempos de cómputo para altos órdenes son de aproximadamente 1 hr. La elección de  $2 \leq \alpha = \beta \leq 4$  está determinada por el análisis gráfico del Capítulo 2.

### **Fusión de imágenes usando momentos Krawtchouk**

Los resultados de fusión de imágenes usando momentos cartesianos de Krawtchouk se muestran en la Figura 4.12. A diferencia de los conjuntos anteriores, éstos sólo dependen del número de particiones. El orden  $n$  de reconstrucción de los momentos está determinado por,

$$n = \frac{M}{p}. \quad (4.2.3)$$

donde  $M \times M$  es el tamaño de la imagen y  $p$  es el número de particiones. En la Figura 4.13 se tienen una comparación de la fusión de imágenes con los conjuntos estudiados.

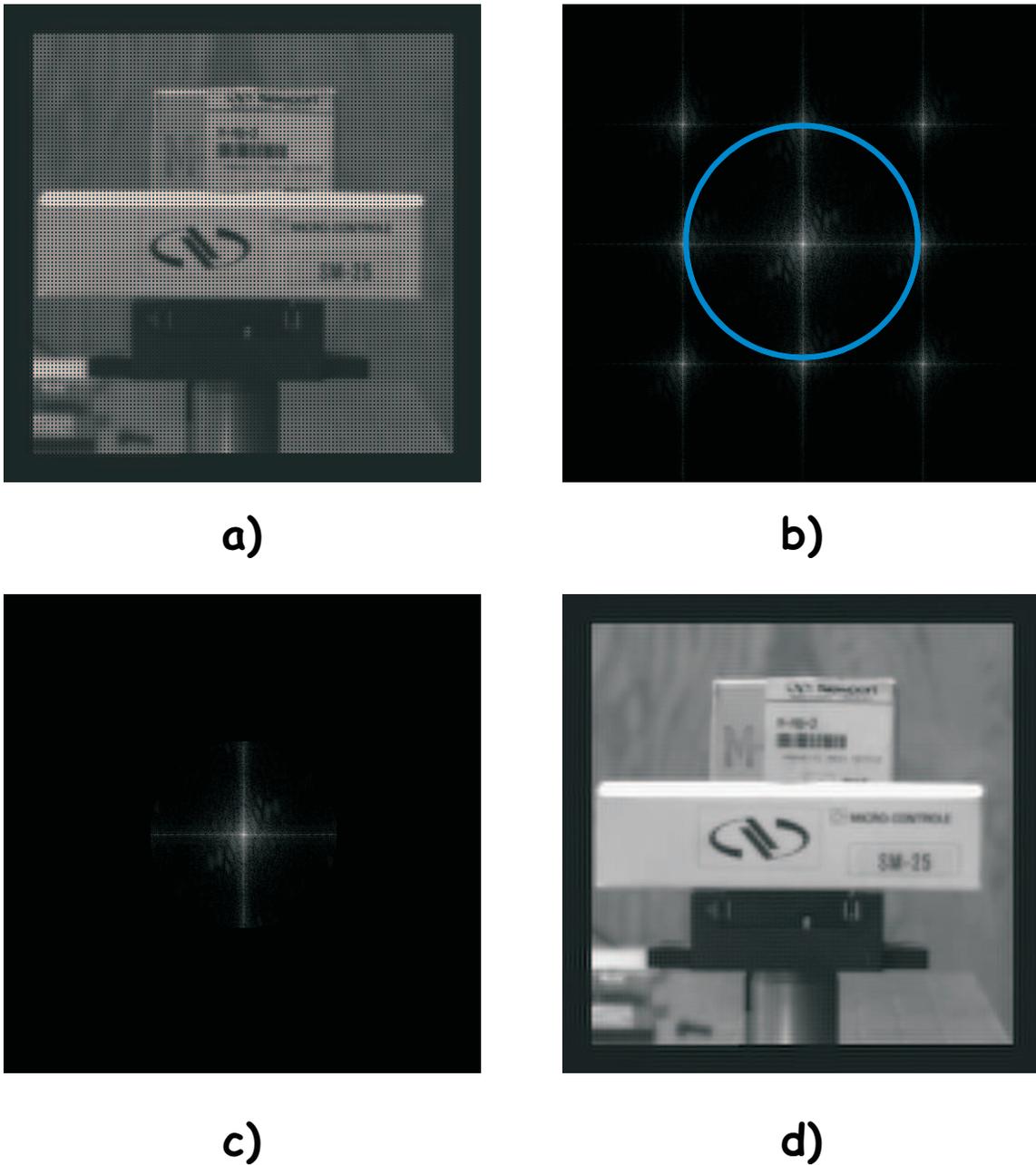
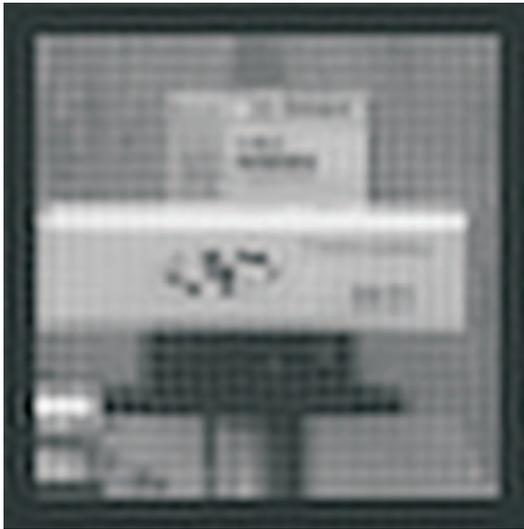


Figura 4.8: Filtraje frecuencial de la imagen a) fusionada usando 128 particiones y orden  $n = 2$ . b) Espectro de Fourier de la imagen a), c) filtraje pasabajos donde sólo se dejan pasar las frecuencias que están dentro del círculo azul. d) Transformada inversa de Fourier de d). En este método existe una alta dependencia del radio del círculo también llamado frecuencia de corte.



**FE=3.735**

a)



**FE=5.427**

b)



**FE=6.042**

c)



**FE=7.704**

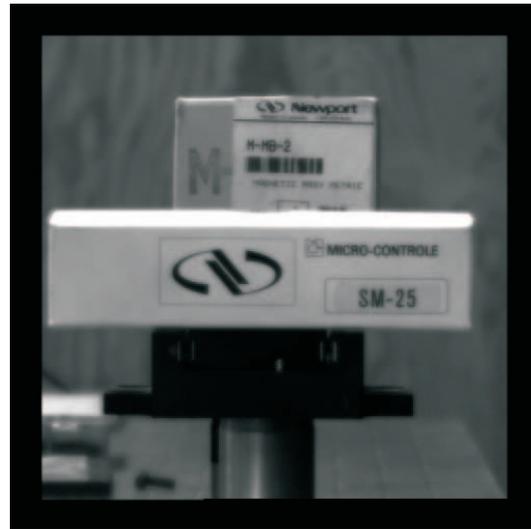
d)

Figura 4.9: Fusión de imágenes usando momentos de Bessel-Fourier de orden  $n = 1$  y especie  $\nu = 1$  cambiando el número de particiones a)32, b)64, c)128 y d)256. La frecuencia espacial como medida del contraste da como el mejor resultado de fusión a la imagen d).



**FE=7.79**

a)



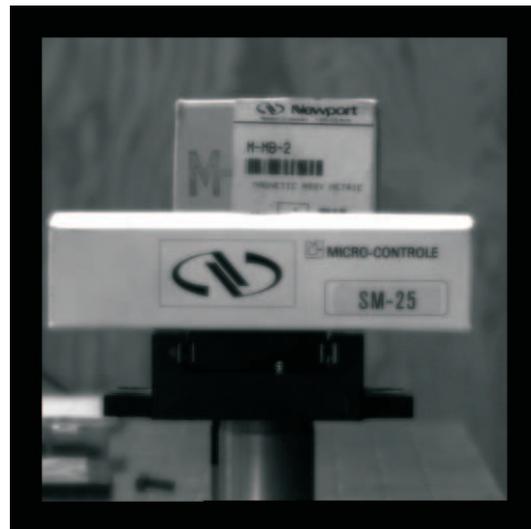
**FE=7.718**

b)



**FE=8.139**

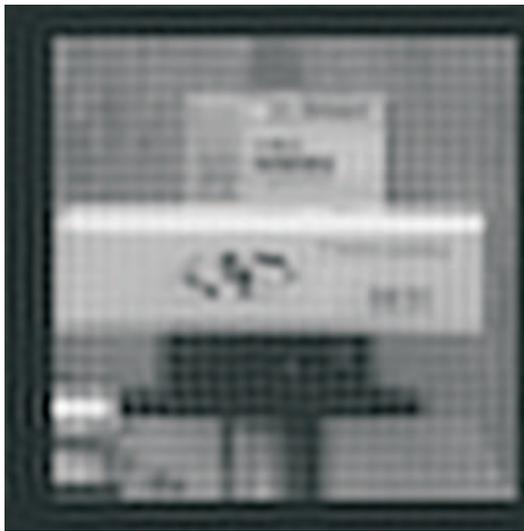
c)



**FE=8.139**

d)

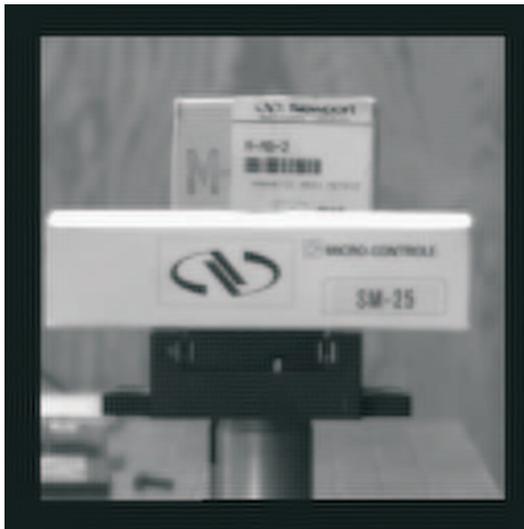
Figura 4.10: Fusión de imágenes usando momentos de Bessel-Fourier con número de partición  $p = 256$  y cambiando el orden a)2, b)4, c)8 y d)16. La frecuencia espacial como medida del contraste da como el mejor resultado de fusión a las imágenes c) y d).

**FE=3.97**

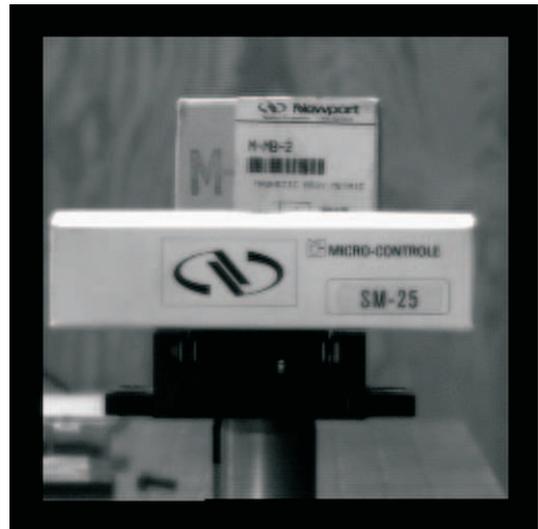
a)

**FE=5.61**

b)

**FE=6.427**

c)

**FE=8.573**

d)

Figura 4.11: Fusión de imágenes usando momentos de Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 2$ , órdenes  $n = l = 2$  y particiones de a)32, b)64, c)128 y d)256. Al igual que Bessel, la mejor fusión d) se obtuvo con 256 particiones.



**FE=8.869**

a)



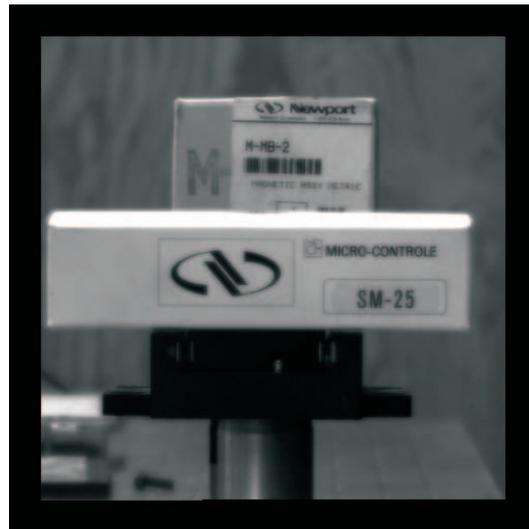
**FE=8.869**

b)



**FE=8.869**

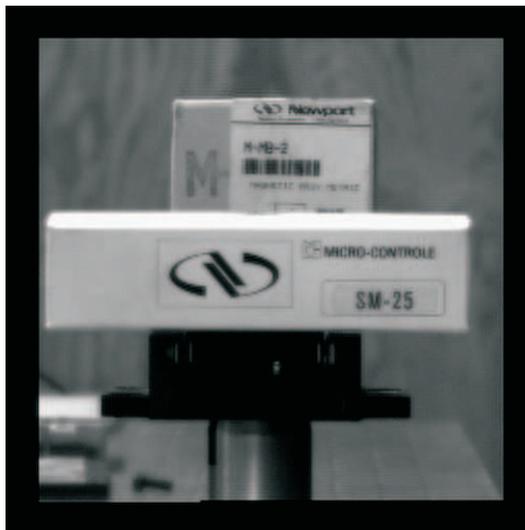
c)



**FE=8.869**

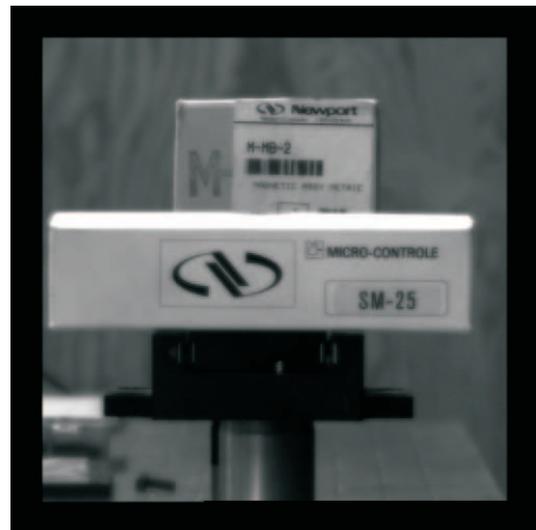
d)

Figura 4.12: Fusión de imágenes usando momentos de Krawtchouk con particiones  $p$  a)8, b)16, c)32 y d)64. De acuerdo a la Ec. 4.2.3 existe una equivalencia entre el número de particiones y orden. Razón por la cual, los resultados de fusión fueron igual.



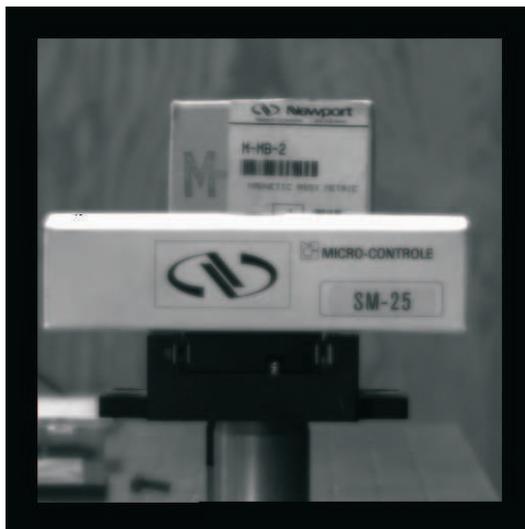
**FE=8.573**

a)



**FE=7.79**

b)



**FE=8.548**

c)



**FE=8.869**

d)

Figura 4.13: Fusión de imágenes usando momentos de a) Jacobi-Fourier con  $\alpha = \beta = 2$  y órdenes  $n = l = 2$  y 256 particiones, b) Bessel-Fourier con  $\nu = 1$ , órdenes  $n = l = 2$  y 256 particiones c) Armónicos Seno con órdenes  $n = l = 512$  y 0 particiones, d) Krawtchouk con  $p = 1$  y órdenes  $n = l = 32$  y 8 particiones. Como se puede observar, la fusión con una mayor frecuencia espacial se logró usando los momentos de Krawtchouk. Esto es debido, a la propiedad de ortogonalidad discreta en el espacio de la imagen.

### 4.2.3. Frecuencia espacial

Sea  $f(x, y)$  una imagen de  $M \times N$  píxeles, para la cual las frecuencias renglón (FR) y columna (FC) están definidas como,

$$FR = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=1}^{N-1} [f(x, y) - f(x, y-1)]^2}, \quad (4.2.4)$$

y

$$FC = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - f(x-1, y)]^2}. \quad (4.2.5)$$

La frecuencia espacial total es entonces,

$$FE = \sqrt{(FR)^2 + (FC)^2}. \quad (4.2.6)$$

La frecuencia espacial es una medida del nivel de actividad total en una imagen.

## 4.3. Clasificación de objetos

Los algoritmos de clasificación de objetos analizados en esta sección, están basados en la matriz de momentos de una imagen digital [3]. Con los momentos de bajo orden se obtiene la información de la forma global de los objetos. Conforme se incrementa el orden de los momentos, se suma información de los detalles. A partir de esta matriz es posible generar descriptores de imágenes que podrán ser comparados con un vector de referencia que permita determinar la clase a la cual pertenece el objeto.

### 4.3.1. Medida de la capacidad de descripción de los momentos

La selección de los descriptores es un paso crucial en cualquier sistema de reconocimiento de formas. Los descriptores que recuperan aspectos globales de un objeto son a menudo sensibles al ruido. Es importante diseñar procedimientos de alto rango de discriminación de tal forma que la varianza intraclasses sea pequeña y la separación entre clases sea grande. Shen [4] desarrolló una medida discriminatoria para dos clases, para encontrar la máxima separación dada por,

$$Q(|A_{nl}|, C_1^i, C_2^j) = [\sigma(C_1^i, |A_{nl}|) + \sigma(C_2^j, |A_{nl}|)] - |\mu(C_1^i, |A_{nl}|) - \mu(C_2^j, |A_{nl}|)|, \quad (4.3.1)$$

la cual puede diferenciar entre las  $\gamma = 1, 2$  clases de objetos con  $i, j$  elementos, para  $i = 1, \dots, \xi$  y  $j = 1, \dots, \xi$ . El valor de la media  $\mu$  para los invariantes  $\log|A_{nl}^C|$  está dado por,

$$\mu(|A_{nl}^C|) = \frac{\sum_{s=1}^i \log|A_{nl}^C|}{i}, \quad (4.3.2)$$

y la desviación estándar  $\sigma$  es,

$$\sigma(|A_{nl}^C|) = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^i [\log|A_{nl}^C|]^2}{i} - \frac{[\sum_{s=1}^i \log|A_{nl}^C|]^2}{i^2}}. \quad (4.3.3)$$

Se usó el *logaritmo* del módulo de los momentos para reducir el rango dinámico, así como los índices  $i$  e  $j$  se usan para enumerar un conjunto de imágenes de prueba, en algunos casos ambos pueden ser cambiados recíprocamente. Con el fin de establecer el criterio de selección, se propone al valor numérico relativo más grande que tome  $\Gamma$ . Con lo que se indica que los discriminantes  $|A_{nl}^C|$  se han encontrado adecuados para clasificar entre las dos clases de formas. En otras palabras, cuando  $\Gamma$  es grande el descriptor correspondiente  $|A_{nl}^C|$  garantizará la diferencia entre las dos clases de objetos a ser clasificados. Esto es evidente tal que no todas las características son seleccionadas. Sólo algunas alcanzan los valores discriminantes para la selección. Consecuentemente, una evaluación del conjunto de características discriminantes se lleva a cabo usando el método de clasificación de la distancia mínima. El conjunto se denota como  $|A_{nl}^k|$  para  $k = 1, 2, \dots, \chi$ , donde  $\chi$  es el número de discriminantes seleccionados, los cuales se derivan de los momentos invariantes circulares, estudiados anteriormente.

Para comparar la eficacia de los momentos se establece la notación como  $|A_{nl}^k|$  para los discriminantes Armónicos Seno seleccionados,  $|J(\alpha, \beta)_{nl}^k|$  para Jacobi-Fourier Genéricos,  $|K_{nl}^k|$  para Krawtchouk y  $|B_{nl}^k|$  para Bessel-Fourier, donde el número  $\chi$  toma diferentes valores de acuerdo con el conjunto seleccionado. Cada clase de imágenes de prueba se representa por un vector media seleccionado,  $Media_{clase}^k$ ;  $k = 1, 2, \dots, \chi$  y por un vector varianza seleccionado  $Varianza_{clase}^k$ ;  $k = 1, 2, \dots, \chi$ .

Los vectores media y varianza están definidos como,

$$Media_{clase}^k = \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{\xi} |A_{nl}^k(imagen^i_{clase})|, \quad (4.3.4)$$

$$Varianza_{clase}^k = \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{\xi} [|A_{nl}^k(imagen^i_{clase})| - Media_{clase}^k]^2, \quad (4.3.5)$$

donde  $|A_{nl}^k|$  son los discriminantes seleccionados del conjunto de discriminantes  $|A_{nl}|$  para la  $i$ -ésima imagen. Cuando un objeto desconocido con vector discriminante

$X = X_k$  es clasificado, se realiza la correlación con un vector de descriptores  $D = A_k$  dados por el mapa Q. Definida como,

$$c_{X,D} = \sum_{k=1}^K \frac{(X_k - Media_X^k)(D_k^{clase} - media_{clase}^k)}{(Varianza_X^k)(Varianza_{clase}^k)}. \quad (4.3.6)$$

Entonces el objeto desconocido  $X$  es clasificado dentro de la clase la cual satisface la condición de la distancia mínima,

$$d(X, D, k) = \min_{clase} d(X, clase, k). \quad (4.3.7)$$

### 4.3.2. Clasificación de imágenes binarias

En la Figura 4.14 se muestra un conjunto de 7 imágenes de prueba para el reconocimiento y la clasificación usando momentos. Las imágenes son binarias de tamaño  $200 \times 200$ . Se generaron versiones rotadas de las originales usando una base mecánica y se capturaron con una cámara CCD. Lo anterior, con el propósito de probar la invariancia a la rotación y la robustez al ruido. Ejemplos de las imágenes distorsionadas se muestran en la Figura 4.15

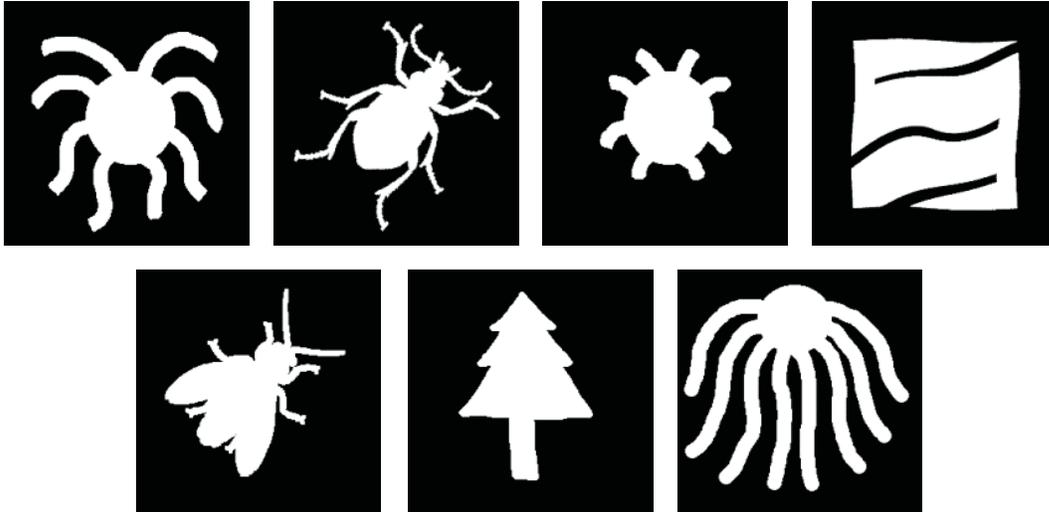


Figura 4.14: Conjunto de imágenes de prueba.

Se evaluó la capacidad de descripción de los momentos de Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier, Armónicos Seno y Krawtchouk y los resultados se muestran en la Figura 4.16. Los resultados de clasificación de la Figura 4.17 nos muestran que los conjuntos Jacobi y Seno logran clasificar al 100 % usando  $k = 10$  y  $k = 20$  descriptores, respectivamente. Así como los descriptores Bessel-Fourier que logran clasificar al 95 % usando

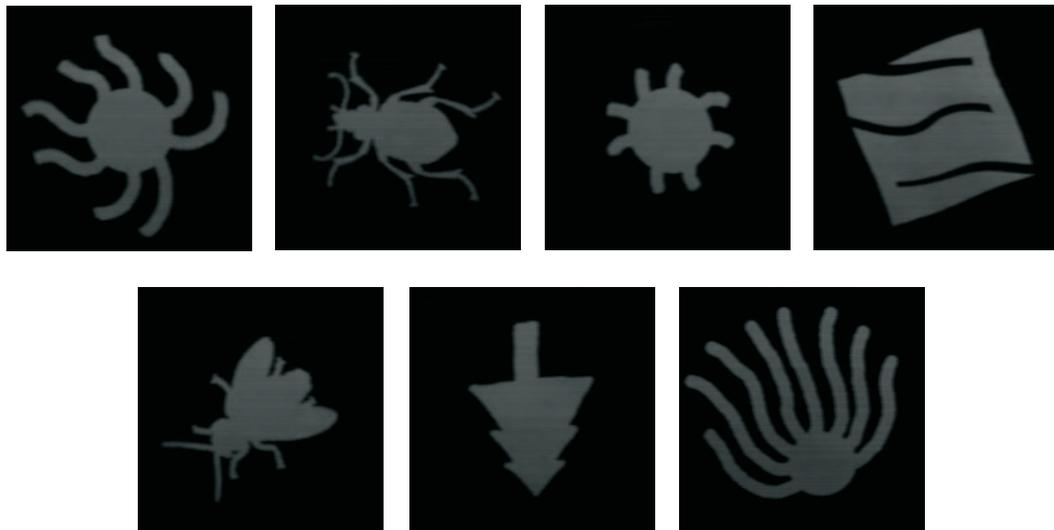


Figura 4.15: Conjunto de imágenes de la Figura 4.14 rotadas con una base mecánica y capturadas con una cámara digital.

$k = 17$  descriptores. Por el contrario, los momentos de Krawtchouk sólo alcanzan el 50 % usando  $k = 20$  descriptores, debido a su análisis local, Figura 4.19.

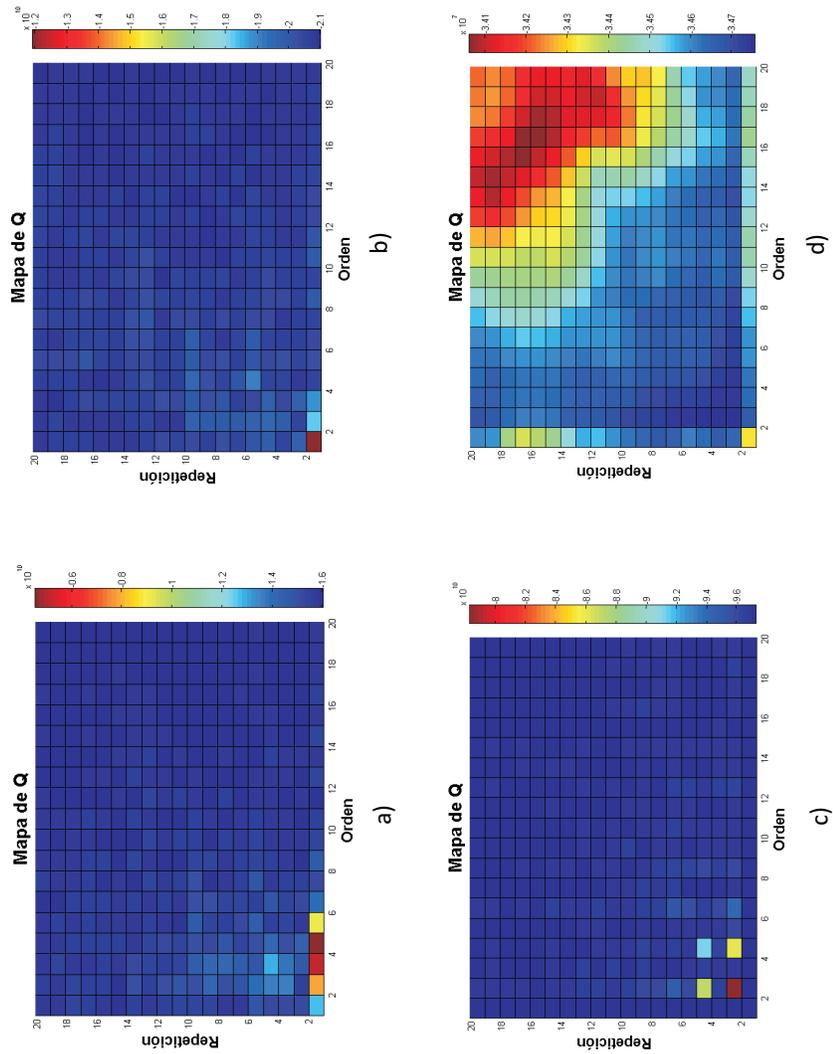


Figura 4.16: Medida de la capacidad de descripción de los momentos de a) Jacobi-Fourier, b) Bessel-Fourier, c) Armónicos Seno y d) Krawtchouk.

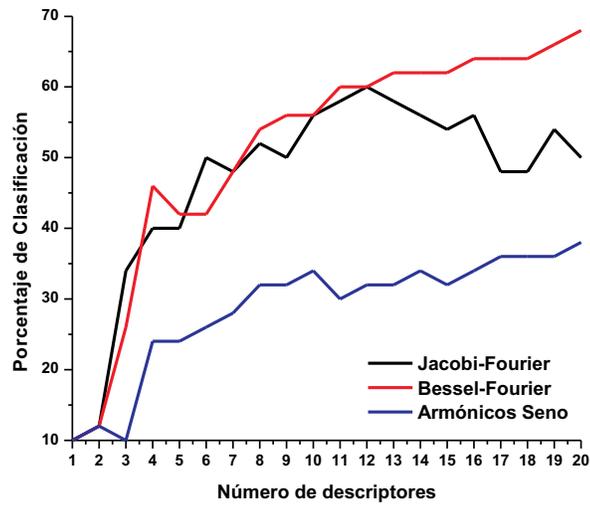


Figura 4.17: Gráfica de clasificación de los objetos de la Figura 4.15 usando los descriptores de Jacobi-Fourier, Bessel-Fourier y Armónicos Seno.

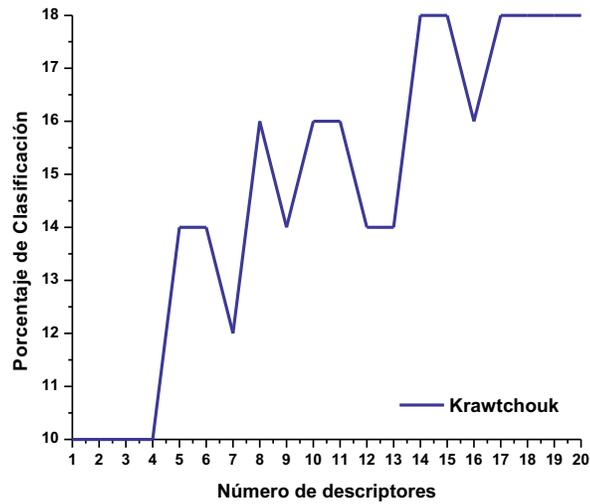


Figura 4.18: Gráfica de clasificación de los objetos de la Figura 4.15 usando momentos cartesianos discretos de Krawtchouk.

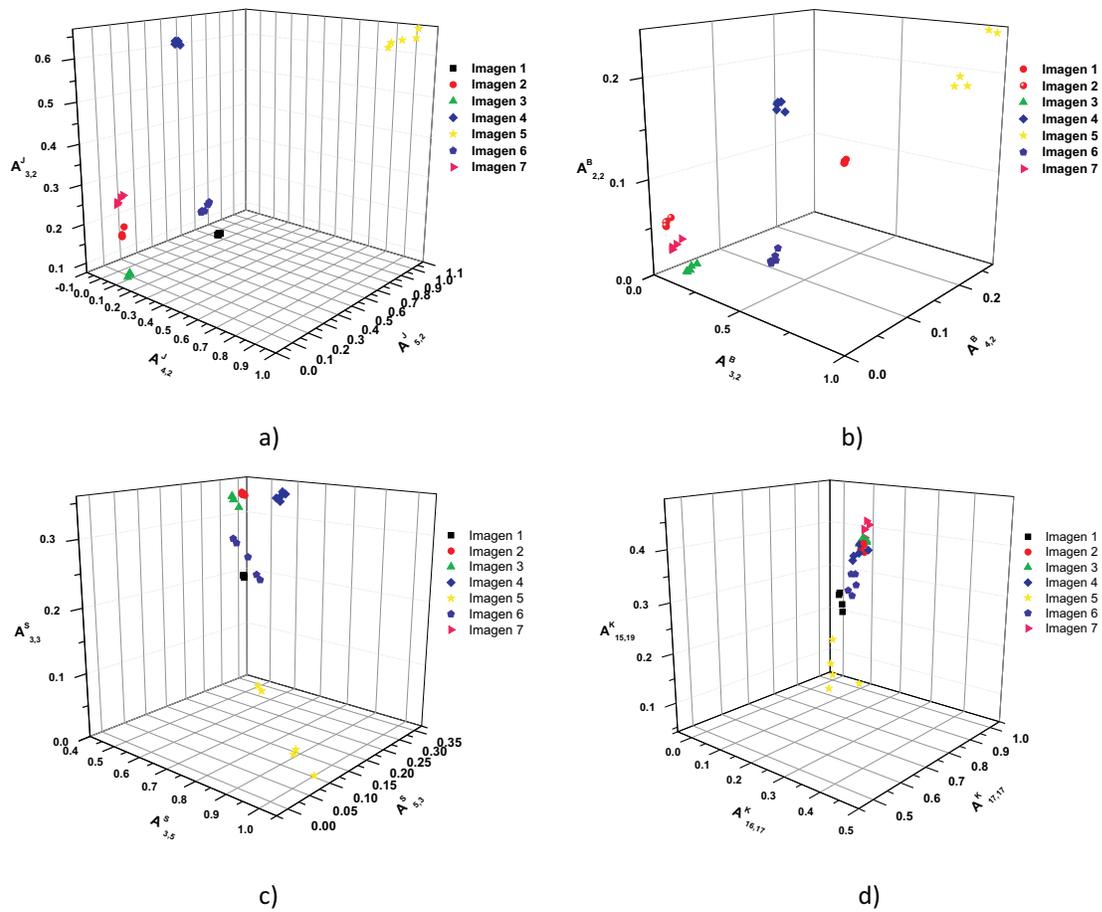


Figura 4.19: Espacio de descriptores de a) Jacobi-Fourier, b) Bessel-Fourier, c) Armónicos Seno y d) Krawtchouk.

## 4.4. Conclusiones

Se analizó la efectividad de los momentos en aplicaciones de Fusión de imágenes y Clasificación de objetos. La primera tarea se llevo a cabo en el plano cartesiano de la imagen, mientras que la segunda en un dominio circular.

En el caso de la fusión de imágenes, se implementó como medida de contraste a la frecuencia espacial. Los resultados de la Figura 4.13 muestran que los momentos de Krawtchouk son los más adecuados por la propiedad de ortogonalidad discreta en el espacio de la imagen. Además de que no depende la eficiencia de la reconstrucción de parámetros tales como el número de particiones o el orden de reconstrucción, como se mostró en la Figura 4.12.

El porcentaje de clasificación mide la efectividad de los momentos como descriptores de formas. Las gráficas de la Figura 4.17 y 4.18 nos muestran que los conjuntos Jacobi y Bessel logran clasificar al 60 % y 70 % usando  $k = 12$  y  $k = 20$  descriptores, respectivamente. No importando los cambios en la orientación y ruido en las imágenes capturadas. Los descriptores Armónicos seno lograron clasificar al 39 % usando  $k = 20$  descriptores y los momentos de Krawtchouk sólo alcanzan el 18 % usando  $k = 14$  descriptores, debido a su análisis local, Figura 4.19.

## 4.5. Bibliografía

- [1] A. Padilla-Vivanco, C. Toxqui-Quitl, and C. Santiago-Tepantlán, “Gray level image reconstruction using Jacobi-Fourier moments,” *Optical and Digital Image Processing. Proceedings of SPIE*. Vol. 7000. 70001M. (2008)
- [2] C. Toxqui-Quitl, A. Padilla-Vivanco and G. Urcid-Serrano, ”Multifocus image function using the Haar wavelet transform,”*Proc. of SPIE* 6748, 555812-112 (2004).
- [3] C. Toxqui - Quitl, A. Padilla - Vivanco y F. Granados - Agustín, “Classification of motion blurred images using Zernike and Wavelet Fourier moments,” *Proc. of SPIE* 6748, 67481L-1 - 67481L-10 (2007).
- [4] Dinggang Shen, Horace H. S. Ip, “Discriminative wavelet shape descriptors for recognition of 2 D patterns,” *Pattern Recognition* **32**, 151-165 (1999).

# Capítulo 5

## Conclusiones Generales

A lo largo de esta Tesis se analizaron diferentes funciones momento, en términos de sus propiedades matemáticas, viabilidad computacional y áreas de aplicación. En la Tabla 5.1 resumimos las características más relevantes de los conjuntos analizados en el Capítulo 2.

Con los conjuntos anteriores, se implementaron algoritmos para el cálculo de los momentos y a partir de ellos su reconstrucción. La tarea de reconstrucción por sí misma tiene aplicaciones en la codificación de información, pero también es un método adecuado para medir el poder de descripción de las funciones momento. En el Capítulo 3 se analizó la reconstrucción de imágenes binarias y en escala de gris, y con cambios en la resolución espacial. Los resultados están resumidos en la Tabla 5.2.

Una de las áreas de aplicación analizadas fue la de fusión de imágenes. Sólo los momentos Armónicos Seno generaron un espacio de momentos igual al tamaño de la imagen. Para los conjuntos restantes no fue posible porque los tiempos de cómputo eran muy grandes o bien por las altas vibraciones de los polinomios para órdenes grandes  $n$ . Por ello, se decidió dividir la imagen en subimágenes que permitieran la fusión en el espacio de momentos. Los resultados se resumen en la Tabla 5.3. La fusión con una mayor frecuencia espacial se logró usando los momentos de Krawtchouk. Esto es debido, a la propiedad de ortogonalidad discreta en el espacio de la imagen. Por lo anterior, como trabajo a futuro se pretende ortonormalizar las bases estudiadas en un dominio discreto.

Figura 5.1: Análisis de polinomios ortogonales.

Base	Dominio	Intervalo de ortogonalidad	# de raíces	Distribución de raíces	Amplitud	Parámetros	Invariancia a cambios en la escala	Invariancia a la rotación	Ventajas
Armónicos Seno	Circular Continúo	$x \in [0, \pi]$ $y \in [0, \pi]$	$n+1$	Uniforme	Acotada en el intervalo $[-1,1]$ para cualquier $n$ .	$n, l, \text{umbral}$	No	Dependen de los momentos geométricos	Fácil implementación computacional
Krawtchouk	Rectángular Discreto	$x \in [0, N]$ $y \in [0, N]$	$n$	Local	Para ordenes $n \geq 96$ tienen grandes oscilaciones	$p, N$ $n, l, \text{umbral}$	No	Dependen de los momentos geométricos	Adecuados para el análisis local
Jacobi-Fourier	Circular Continúo	$r \in [0,1]$ $\theta \in [0,2\pi]$	$n$	Depende de $\alpha$ y $\beta$ .	Para ordenes $n \geq 25$ tienen grandes oscilaciones	$\alpha, \beta$ $n, l, \text{umbral}$	Si	Si	Base generadora de polinomios ortogonales
Bessel-Fourier	Circular Continúo	$r \in [0,1]$ $\theta \in [0,2\pi]$	$n+1$	Uniforme	Decreciente	$\nu$ $n, l, \text{umbral}$	Si	Si	Para ordenes grandes no tienen oscilaciones

Resolución Funciones momento	32X32 px 1 bit	64X64 px 8 bits	128X128 px 8 bits	256X256 px 8 bits
Armónicos Seno	Orden=32 NIRE= 0 Tiempo= 1.5s	Orden=64 NIRE= 0.1 Tiempo= 2s	Orden=128 NIRE= 0.05 Tiempo= 4.6s	Orden=256 NIRE= 0.1 Tiempo= 10s
Krawtchouk	Orden=32 NIRE= 0 Tiempo= 2.3s	Orden=64 NIRE= 0 Tiempo= 3.2s	X	X
Jacobi-Fourier	Orden=32 NIRE= 0.03 Tiempo= 524s	Orden=20 NIRE= 0.17 Tiempo= 1803s	Orden=21 NIRE= 0.13 Tiempo= 5811s	Orden=21 NIRE= 0.13 Tiempo= 7001s
Bessel-Fourier	Orden=32 NIRE= 0 Tiempo= 632s	Orden=35 NIRE= 0.18 Tiempo= 1983s	Orden=47 NIRE= 0.15 Tiempo= 6881	Orden=50 NIRE= 0.15 Tiempo= 8559

Figura 5.2: Análisis de la reconstrucción de imágenes.

Momentos	Particiones	Orden n	Frecuencia espacial
Armónicos Seno	1	256	8.548
Krawtchouk	8	64	8.869
Jacobi-Fourier	256	2	8.573
Bessel-Fourier	256	2	8.139

Figura 5.3: Análisis de la fusión de imágenes.

Los mejores resultados de clasificación de la Tabla 5.4, se obtuvieron con los momentos de Bessel-Fourier, en la gráfica de la Figura 4.17 se muestra que éstos logran clasificar al 70 % usando  $n = 20$  momentos. Además de que muestran una estabilidad al aumentar el número de descriptores. Las razones son su invariancia a la rotación, la ortogonalidad de su base y la robustez al ruido. Por el contrario, los momentos de Krawtchouk sólo alcanzan el 18 % de clasificación, debido a su análisis local. Es por ello, que en un futuro se busca derivar invariantes a partir de los momentos cartesianos de Krawtchouk y armónicos seno.

Momentos	Muestras	Clases	Porcentaje de Clasificación	No. Descriptores
Jacobi-Fourier	5	7	60%	12
Bessel-Fourier	5	7	70%	20
Armónicos Seno	5	7	39%	20
Krawtchouk	5	7	18%	14

Figura 5.4: Resultados de clasificación de objetos.

Una de las desventajas en todos los algoritmos para el análisis y el procesamiento de imágenes es el tiempo de cómputo, razón por la cual se implementarán los momentos estudiados en tarjetas gráficas GPU que lleven a cabo el procesamiento paralelo de los datos.

# Apéndice A

## Algoritmos Genéticos

Los Algoritmos Genéticos (AGs) son métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Están basados en el proceso genético de los organismos vivos.

La representación apropiada, y los operadores; son un paso determinante en la conducta de los Algoritmos Genéticos. Con frecuencia, puede ser sumamente difícil de encontrar una representación que respeta la estructura del espacio de búsqueda, también es difícil encontrar operadores que sean coherentes y pertinentes, según las propiedades del problema.

La selección se realiza comparando cada individuo de la población a través de una función de aptitud. Cada cromosoma tiene un valor asociado que corresponde a una función de aptitud. La aptitud debe de corresponder a la evaluación de un candidato, para ver si es una buena solución. La selección puede adaptarse para buscar los individuos mas aptos, ya sea buscando los valores máximos o mínimos de un problema de optimización. Una vez que se ha definido apropiadamente la reproducción y la función de aptitud, el algoritmo genético evoluciona según su estructura básica. Empieza generando una población inicial de cromosomas. La población debe de ofrecer una gran diversidad de material genético. Generalmente, la población inicial se genera al azar.

En la Figura A.1 se muestra de forma general un Algoritmo Genético simple.



Figura A.1: Algoritmo Genético Simple.

# Apéndice B

## Método de búsqueda de la sección de oro

Este método requiere que la función sea de una sola variable y unimodal. Si el rango de incertidumbre original es  $a^{\circ} \leq X \leq b^{\circ}$ , al cual se le denotará por  $[a^{\circ}, b^{\circ}]$ , el proceso reduce este intervalo en cada evaluación, en un valor constante  $\tau$ .

Este valor constante, se calcula de la siguiente manera. Sea la  $k$ -ésima iteración, con el rango de incertidumbre  $[a^k, b^k]$  y los puntos a examinar  $X_1^k$  y  $X_2^k$ . Entonces,

$$\tau = \frac{X_2^k - a^k}{b^k - a^k} = \frac{b^k - X_1^k}{b^k - a^k} \quad (\text{B.0.1})$$

De esta relación se establece que,

$$X_2^k - a^k = b^k X_1^k \quad (\text{B.0.2})$$

$$X_1^k - a^k = b^k X_2^k \quad (\text{B.0.3})$$

Si se supone que se está minimizando la función  $f(X)$ , entonces, si  $f(X_2^k) > f(X_1^k)$ , se elimina del análisis el rango  $[X_2^k, b^k]$ . De otra manera es decir si,  $X_2^k < X_1^k$  se elimina  $[a^k, X_1^k]$ . En el primer caso  $f(X_2^k) > f(X_1^k)$  se tiene que los nuevos extremos del rango de incertidumbre son,

$$\begin{aligned} b^{k+1} &= X_2^k \\ a^{k+1} &= a^k \\ X_2^{k+1} &= X_1^k \end{aligned}$$

La constante de reducción  $\tau$  quedaría definida por,

$$\tau = \frac{X_2^{k+1} - a^k}{X_2^k - a^k} = \frac{X_1^k - a^k}{X_2^k - a^k} = \frac{X_2^k - a^k}{b^k - a^k} \quad (\text{B.0.4})$$

Tomando B.0.2, B.0.3 y B.0.4 se tiene,

$$X_1^k - a^k = b^k - X_2^k + a^k - a^k = b^k - a^k - (X_2^k - a^k)$$

ó

$$\frac{X_1^k - a^k}{X_2^k - a^k} = \frac{b^k - a^k}{X_2^k - a^k} - \left( \frac{X_2^k - a^k}{X_2^k - a^k} \right),$$

es decir,

$$\frac{X_1^k - a^k}{X_2^k - a^k} = \frac{1}{\tau} - 1 \quad (\text{B.0.5})$$

Pero de B.0.4 se tiene que B.0.5 puede escribirse como,

$$\tau = \frac{1}{\tau} - 1,$$

o sea

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0.$$

La solución de esta ecuación genera el siguiente valor de  $\tau$  ( $\tau \geq 0$ ),

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618^{19}.$$

# Apéndice C

## Ecualización del histograma

### Histograma

El histograma de una imagen es una función discreta que representa el número de píxeles en la imagen en función de los niveles de intensidad,  $g$ . La probabilidad  $P(g)$  de ocurrencia de un determinado nivel  $g$  se define como,

$$P(g) = \frac{N(g)}{M} \quad (\text{C.0.1})$$

donde  $M$  es el número de píxeles de la imagen y  $N(g)$  es el número de píxeles en el nivel de intensidad  $g$ . Como con cualquier distribución de probabilidad todos los valores de  $P(g)$  son menores o iguales que 1 y la suma de todos los valores de  $P(g)$  es 1.

### Ecualización del Histograma

Con la ecualización conseguimos obtener un histograma más uniforme, distribuyéndose las gamas de tonos que más aparecen por todo el histograma. Esto logra un aumento del contraste en ciertas zonas de la imagen, resaltando detalles que antes no se veía. En la Figura C.1 se puede ver, el contraste es mejorado al distribuir uniformemente los niveles de gris.

A partir de la Ec. C.0.1 se obtiene la función de probabilidad acumulada, dada por,

$$T(f) = S_g = \sum_{j=0}^g P(j) \quad (\text{C.0.2})$$

La ecuación de histograma está dada por la transformación,

$$f^e = T^{-1}(S_f) \quad (\text{C.0.3})$$

donde  $f$  es la imagen de entrada y  $f^e$  es la imagen ecualizada.

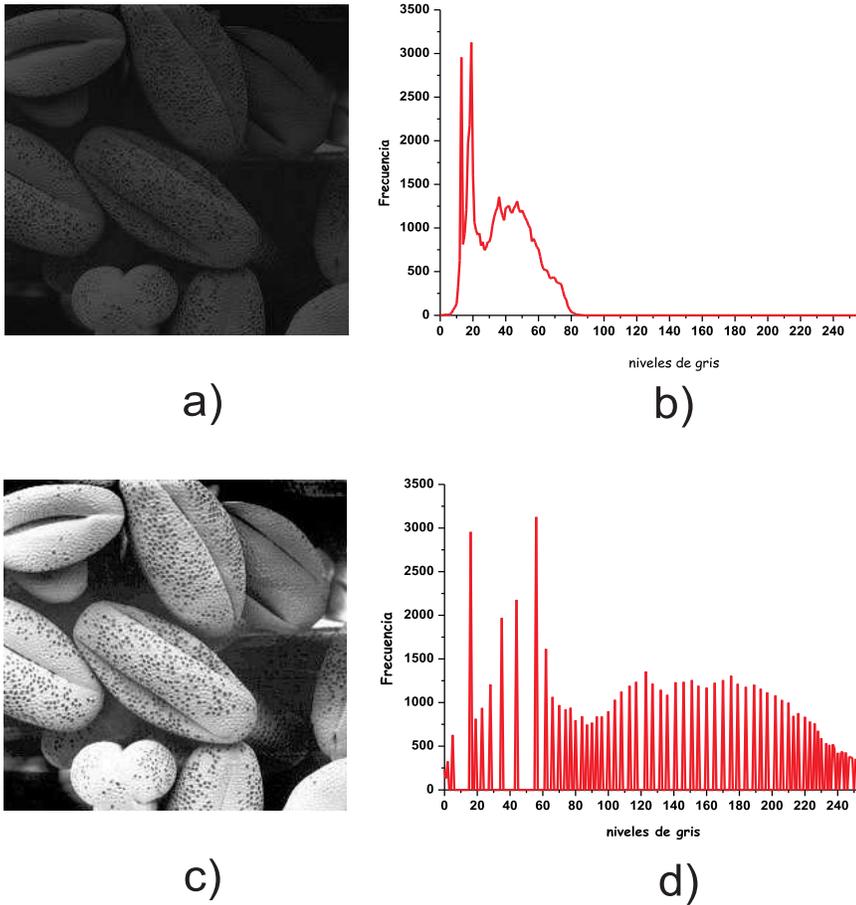


Figura C.1: a) Imagen Original, b) Histograma de (a), c) Imagen Ecualizada y d) Histograma Ecualizado de (c).

# Apéndice D

## Modelo HSI

Un modelo o espacio de color nos indica la manera en que un color está definido. En el modelo RGB, cada color aparece en sus componentes espectrales primarios rojo, verde y azul. Este modelo está basado en un sistema de coordenadas cartesianas. En el modelo HSI los colores se distinguen unos de otros por su tono, intensidad y saturación. El tono está asociado con la longitud de onda dominante en una mezcla de ondas luminosas, la intensidad representa la iluminación percibida y la saturación se refiere a la cantidad de luz blanca mezclada con el color dominante, es un atributo que nos diferencia un color intenso o pálido.

### Modelo RGB

En el modelo RGB cada color aparece en sus componentes espectrales primarios: rojo, verde y azul como se muestra en la Figura D.1 inciso a. Este modelo está basado en el sistema de coordenadas cartesianas. El subespacio de color de interés es el tetraedro mostrado en la Figura D.1 inciso b. En el cual los colores RGB están en tres vértices; cian, magenta y amarillo se sitúan en otros tres vértices, el negro corresponde al origen y el blanco en el vértice más alejado del origen.

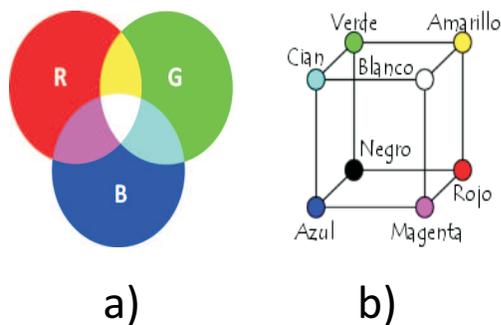


Figura D.1: a) Modelo RGB y b) Tetraedro de color RGB.

En la Figura D.2 se muestra un ejemplo de la descomposición de una imagen en los tres canales (RGB).

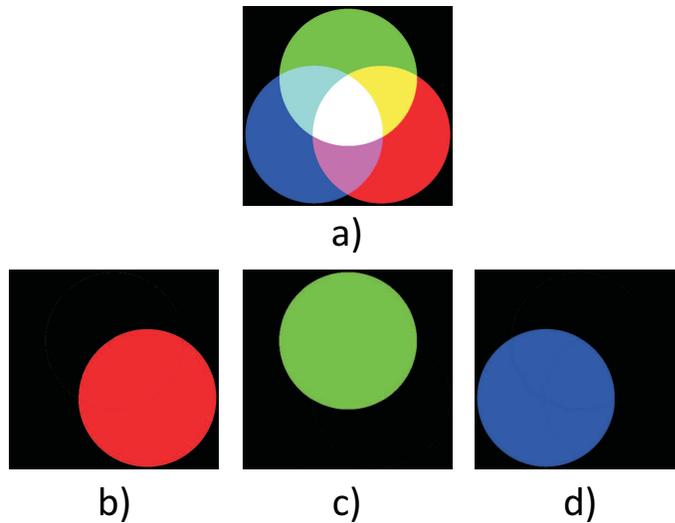


Figura D.2: a) Imagen original descompuesta en los tres canales (RGB), b) Canal Rojo, c) Canal Verde y d) Canal azul.

### Modelo HSI

El modelo de color HSI debe su utilidad a dos hechos fundamentales. Primero la componente de intensidad  $I$ , se puede separar de la información del color de la imagen, el segundo a las componentes del matiz y saturación están íntimamente relacionadas con el modo en que los humanos perciben el color. Estas características hacen del modelo HSI una herramienta ideal para desarrollar algoritmos de procesamiento de imágenes basados en alguna de las sensaciones de color del sistema visual humano.

En la Figura D.3 se muestra un ejemplo de la descomposición de una imagen en el modelo HSI.

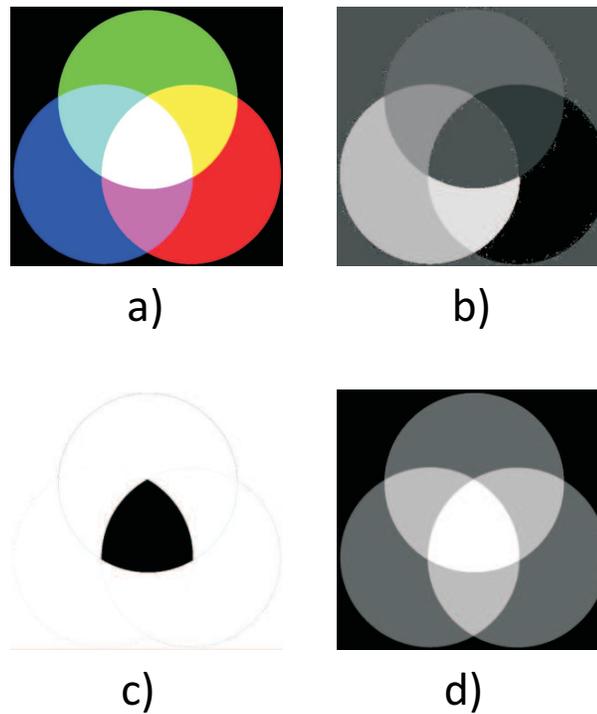


Figura D.3: a) Imagen original, b) Hue, c) Saturación y d) Intensidad.

### Conversión de RGB a HSI

Los colores en el modelo HSI se definen con respecto a los valores normalizados de rojo, verde y azul, dados en términos de los colores primarios RGB por,

$$r = \frac{R}{(R + G + B)} \quad (\text{D.0.1})$$

$$g = \frac{G}{(R + G + B)} \quad (\text{D.0.2})$$

$$b = \frac{B}{(R + G + B)} \quad (\text{D.0.3})$$

donde,

$$r + g + b = 1 \quad (\text{D.0.4})$$

La componente de Intensidad de HSI se define como,

$$I = 1/3(R + G + B) \quad (\text{D.0.5})$$

cuyos valores están de  $[0, 1]$ .

El componente  $H$  se calcula,

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}[(R - G) + (R - B)]}{[(R - G)^2 + (R - B)(G - B)]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{D.0.6})$$

El componente de saturación  $S$ :

$$S = 1 - \frac{3}{(R + B + G)} [\min R, G, B] \quad (\text{D.0.7})$$

### Conversión de HSI a RGB

Para volver de HSI en  $[0, 1]$ , se trata de encontrar la correspondencia de los valores RGB en el mismo rango.

Para el sector RG ( $0^\circ < H \leq 120^\circ$ ),

$$r = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \quad (\text{D.0.8})$$

$$g = 1 - (r + b) \quad (\text{D.0.9})$$

$$b = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{D.0.10})$$

Para el sector GB( $120^\circ < H \leq 240^\circ$ ),

$$r = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{D.0.11})$$

$$g = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right] \quad (\text{D.0.12})$$

$$b = 1 - (r + g) \quad (\text{D.0.13})$$

Para el sector GB( $240^\circ < H \leq 360^\circ$ ),

$$r = 1 - (g + b) \quad (\text{D.0.14})$$

$$g = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{D.0.15})$$

$$b = r = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right] \quad (\text{D.0.16})$$



# Apéndice E

## Trabajos de Investigación

[1] C.Toxqui-Quitl, L.Gutiérrez-Lazcano, A. Padilla-Vivanco and C. Camacho-Bello, "Gray-level image reconstruction using Bessel-Fourier moments," 22nd Congress of the international Commission for Optics. Proc. of SPIE Vol. 8011, 80112U. (2011).

[2] L.Gutiérrez-Lazcano, C.Toxqui-Quitl, C. Camacho-Bello y A. Padilla-Vivanco, "Análisis de la capacidad de reconstrucción de imágenes a partir de momentos ortogonales," Centro de Investigaciones en Matemáticas (CIMAT), Octubre 2011, Guanajuato, México.