

U

P

T

# **RECUPERACIÓN DE INTENSIDADES A PARTIR DE INTERFEROGRAMAS DE DOBLE HAZ DEL TIPO FOURIER**

Por

**Rosa Edith Farias Díaz**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado  
de

**MAESTRO EN COMPUTACIÓN ÓPTICA**

En la

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE  
TULANCINGO**

Enero 2012  
Tulancingo de Bravo, Hidalgo

Supervisada por

**Dr. Alfonso Padilla Vivanco**

©UPT

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y distribuir  
copias en su totalidad o en partes de esta tesis.



**UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE  
TULANCINGO**



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>XI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>XIII</b>
<b>Prefacio</b>	<b>XV</b>
<b>Resumen</b>	<b>XVII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes Históricos y Aplicaciones . . . . .	1
1.2. Objetivo general del trabajo . . . . .	3
1.2.1. Objetivos particulares . . . . .	3
1.3. Aportaciones . . . . .	4
<b>2. Principios de Difracción</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. El principio de Huygens - Fresnel en coordenadas rectangulares . . . . .	5
2.3. Teoría de la Difracción escalar . . . . .	8
2.3.1. Difracción de Fresnel . . . . .	8
2.3.2. Difracción de Fraunhofer . . . . .	14
2.4. Configuraciones para obtener la Transformada de Fourier mediante lentes convergentes . . . . .	21
2.5. Simulación . . . . .	24
2.5.1. Difracción de Fresnel . . . . .	24
2.5.2. Difracción de Fraunhofer . . . . .	24
<b>3. Interferogramas de doble haz</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Teoría de la Interferencia . . . . .	32
3.3. Interferometría de división de frente de onda . . . . .	34
3.3.1. Interferómetro de Young . . . . .	34
3.3.2. Experimento de la doble rendija . . . . .	37

3.4.	Holografía de Fourier . . . . .	43
3.5.	Reconstrucción por la aproximación de Fresnel . . . . .	46
3.6.	Simulación . . . . .	47
3.6.1.	Teoría de la Interferencia . . . . .	47
3.6.2.	Holografía de Fourier . . . . .	47
3.6.3.	Recuperación por medio de la aproximación de Fresnel . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Teoría de Muestreo y Sistema de despliegado de imágenes</b>	<b>85</b>
4.1.	Introducción . . . . .	85
4.2.	Moduladores Espaciales de Luz. Principios físicos y efectos difractivos . . . . .	85
4.3.	Teorema del muestreo en SLM . . . . .	93
4.4.	Geometría analítica de algunas figuras rectilíneas . . . . .	96
4.4.1.	Ecuación de un cuadrado . . . . .	96
4.4.2.	Ecuación de un rectángulo . . . . .	99
4.4.3.	Figuras cónicas cerradas y Figuras rectilíneas . . . . .	100
4.5.	Patrones de difracción de un squircle . . . . .	101
4.5.1.	Soluciones para los casos usuales . . . . .	102
4.6.	Efectos difractivos usando SLM: Simulación y experimentos . . . . .	104
4.7.	Análisis de la visibilidad del Filtro Holográfico . . . . .	107
4.7.1.	Caso general . . . . .	107
4.7.2.	Caso para dos fuentes puntuales . . . . .	108
4.7.3.	Caso para una abertura cuadrada y una fuente puntual . . . . .	109
4.7.4.	Caso para una función extendida y una fuente circular extendida . . . . .	109
<b>5.</b>	<b>Resultados Experimentales</b>	<b>115</b>
5.1.	Introducción . . . . .	115
5.2.	Holografía de Fourier . . . . .	115
5.3.	Medidas de calidad en una imagen . . . . .	135
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>139</b>
6.0.1.	Trabajo a futuro . . . . .	141

# Índice de figuras

2.1.	Principio de Huygens - Fresnel . . . . .	6
2.2.	Geometría de la difracción . . . . .	7
2.3.	Función $rect(\frac{x}{2a})$ . . . . .	10
2.4.	Perfil de la función $rect(\frac{x}{2a}, \frac{y}{2b})$ . . . . .	11
2.5.	Función $sinc(x)$ , Transformada de Fourier de la función rectángulo en una dirección . . . . .	17
2.6.	Patrón de difracción de Fraunhofer . . . . .	18
2.7.	Perfil del patrón de difracción de Fraunhofer de la función $circ(\frac{r}{a})$ . . . . .	21
2.8.	Configuración 1: Objeto junto a la lente . . . . .	22
2.9.	Configuración 2: Objeto a una distancia $d$ de la lente . . . . .	22
2.10.	Configuración 3: Objeto a la distancia focal de la lente . . . . .	23
2.11.	Configuración 4: Objeto después de la lente . . . . .	23
2.12.	Patrones de difracción de Fresnel de una abertura cuadrada a distancias que van desde $z = 100m, \dots, 2500m$ aumentando en una razón de $500m$ . . . . .	25
2.13.	Gráficas de las distribuciones de intensidad de los patrones de difracción de la abertura cuadrada de las distancias $z = 100m$ hasta $z = 2500m$ . . . . .	26
2.14.	Patrones de difracción obtenidos numéricamente mediante la transformada de Fourier discreta y transformada de Fourier rápida. . . . .	27
2.15.	Patrones de difracción obtenidos numéricamente mediante la transformada de Fourier discreta y transformada de Fourier rápida de una abertura a) circular. . . . .	28
2.16.	Gráficas en 3D de a) la abertura cuadrada y sus correspondientes patrones de difracción con la Transformada de Fourier Discreta y la FFT . . . . .	29
2.17.	Gráficas en 3D de la a) abertura circular y sus correspondientes patrones de difracción con la Transformada de Fourier Discreta y la FFT . . . . .	30
3.1.	Principio de superposición de ondas . . . . .	32
3.2.	Franjas de interferencia . . . . .	34
3.3.	Esquema de un interferómetro por división de frente de onda . . . . .	35
3.4.	Gráfica de la expresión $I = 4I_0 \cos^2 \frac{y a \pi}{s \lambda}$ . . . . .	37
3.5.	a) Patrón de interferencia que presenta modulación debido a la difracción de la luz en las rendijas. b) Gráfica. . . . .	38
3.6.	Sistema de doble rendija . . . . .	39
3.7.	Geometría de la difracción para una doble rendija . . . . .	40
3.8.	Gráfica de la expresión $I(u) = 16a^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi a u}{\lambda f} \right) \cos^2 \left( \frac{2\pi b u}{\lambda f} \right)$ . . . . .	40

3.9. Arreglo óptico para la recuperación de intensidades . . . . .	41
3.10. Transformada de Fourier del interferograma de doble rendija . . . . .	43
3.11. Filtro Holográfico de la función de transmitancia $t(x) = k\delta(x - 2b) + \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)$ . . . . .	45
3.12. Esquema de la reconstrucción de la rendija . . . . .	45
3.13. Gráfica de la visibilidad de las franjas contra la distancia entre las aberturas . . . . .	47
3.14. Aberturas cuadradas y su correspondiente patrón de interferencia. . . . .	48
3.15. Aberturas circulares y su correspondiente patrón de interferencia. . . . .	48
3.16. Aberturas triangulares y su correspondiente patrón de interferencia. . . . .	49
3.17. Aberturas cuadradas y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción. . . . .	49
3.18. Aberturas circulares y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción. . . . .	50
3.19. Aberturas triangulares y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción. . . . .	50
3.20. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	52
3.21. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	53
3.22. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	54
3.23. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	55
3.24. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	56
3.25. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	57
3.26. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	58
3.27. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	59
3.28. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	60
3.29. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	61
3.30. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	62
3.31. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	63
3.32. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	64
3.33. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	65
3.34. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	66

3.35. Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	67
3.36. Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	68
3.37. Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	69
3.38. Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen. . . . .	70
3.39. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	71
3.40. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	72
3.41. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	73
3.42. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	74
3.43. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	75
3.44. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	76
3.45. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	77
3.46. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	78
3.47. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	79
3.48. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	80
3.49. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	81
3.50. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier . . . . .	82
3.51. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro óptico de Fourier grabado con un láser de $\lambda = 543nm$ . . . . .	83
3.52. Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro óptico de Fourier grabado con un láser de $\lambda = 543nm$ . . . . .	84
4.1. Microfotografía de una red de pixeles con esquinas romas de una LCD con amplificación de a) 750x y b) 1200x . . . . .	88
4.2. La abertura de entrada son cuadrados de tamaños 1px, 5px y 7 px, respectivamente y a la derecha de cada figura se presentan sus correspondientes patrones de difracción. . . . .	89
4.3. La abertura de entrada son cuadrados de 10px, 15px y 20 px respectivamente y a la derecha de cada figura se presentan sus correspondientes patrones de difracción. . . . .	90

4.4.	La abertura de entrada son cuadrados de 25px, 30px y 35 px respectivamente y a la derecha de cada figura se presentan sus correspondientes patrones de difracción. . .	91
4.5.	La abertura de entrada es un cuadrado de 40px, 45px y 50 px respectivamente y a la derecha de cada figura se presentan sus correspondientes patrones de difracción. . .	92
4.6.	Esquema de dos funciones muestreadas en una pantalla tipo LCD . . . . .	94
4.7.	Patrones de difracción replicados . . . . .	96
4.8.	Representación esquemática de la ecuación de un cuadrado . . . . .	97
4.9.	Función <i>sinc</i> con valores $s=0$ , $s=0.6$ , $s=0.7$ y su patrón de difracción de Fraunhofer.	105
4.10.	Función <i>sinc</i> con valores $s=0.8$ , $s=0.9$ , $s=1$ y su patrón de difracción de Fraunhofer.	106
4.11.	Esquema de dos fuentes puntuales en el plano de entrada . . . . .	109
4.12.	Esquema de una abertura cuadrada y una fuente puntual en el plano de entrada . .	110
4.13.	Tabla I. Resultados de la visibilidad al atenuar el haz de referencia. . . . .	111
4.14.	Tabla II. Resultados de la visibilidad al atenuar el haz objeto. . . . .	112
4.15.	Gráfica de la visibilidad en función de los niveles de gris del haz de referencia. . . .	113
4.16.	Gráfica de la visibilidad en función de los niveles de gris del haz objeto. . . . .	113
5.1.	Esquema de grabado del Filtro Holográfico. . . . .	116
5.2.	Esquema de recuperación de intensidades. . . . .	116
5.3.	Configuración experimental utilizada para el grabado y reconstrucción de intensidades. Se utilizó un láser sintonizable con una longitud de onda de $543nm$ . . . . .	118
5.4.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	119
5.5.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	120
5.6.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	121
5.7.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	122
5.8.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	123
5.9.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	124
5.10.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	125
5.11.	Imagen de entrada binaria, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	126
5.12.	Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	127
5.13.	Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	128
5.14.	Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen digitalmente. . . . .	129
5.15.	Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	130

5.16. Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	131
5.17. Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente filtro óptico y recuperación de las intensidades de la imagen ópticamente. . . . .	132
5.18. Objeto utilizado en el experimento. . . . .	133
5.19. Objeto de entrada, su correspondiente filtro óptico y recuperación digital mediante la FFT. . . . .	134
1. Esquema del proceso de corrección gamma del filtro holográfico. . . . .	146
2. Recuperación mediante el algoritmo de Fresnel a diferentes distancias. . . . .	147



# Dedicatoria

Todo lo que soy se lo debo a mi maravillosa familia, que siempre ha sabido guiar mis pasos con amor y sabiduría.



# Agradecimientos

Al Laboratorio de Óptica y Visión por Computadora de la Universidad Politécnica de Tulancingo por las facilidades otorgadas para llevar a cabo esta tesis.

A la Universidad Politécnica de Tulancingo por el apoyo otorgado a través de una beca académica de investigación y posgrado.

A los Drs. Luis Téllez Reyes y César Santiago Tepantlán por todo el apoyo otorgado para la realización de esta tesis.

Al Dr. Alfonso Padilla Vivanco por su invaluable asesoría y dirección durante el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales el Dr. Alejandro Cornejo Rodriguez, la Dra. Bárbara Emma Sánchez Rinza, Dra. Carina Toxqui Quitl, Dr. Juan Carlos Valdiviezo Navarro y Dr. César Santiago Tepantlán por sus observaciones y consejos.



# Prefacio

Esta tesis se relaciona con el procesamiento óptico y digital de información. Se realiza un análisis de los aspectos que impiden la adecuada recuperación de distribuciones de intensidad a partir de filtros holográficos. Estos aspectos se relacionan con efectos difractivos de pixeles con orillas romas en pantallas tipo LCD y con efectos de muestreo en el plano de Fourier, debido al pixeleado inherente a estos dispositivos ópticos.

En el capítulo 1 se presenta una breve introducción histórica de los sistemas holográficos, tanto los basados en arquitecturas fuera de eje como los de tipo Fourier.

En el capítulo 2 se presenta una revisión de las bases de la difracción de la luz. Desde el enfoque de Fresnel o campo cercano y desde el enfoque de Fraunhofer o campo lejano. Se lleva a cabo una simulación usando los patrones clásicos para aberturas circulares, cuadradas y triangulares.

En el capítulo 3 se establecen las bases de la holografía de Fourier incluyendo una revisión de conceptos de interferencia. Se explica desde el punto de vista del experimento de la doble rendija. Se concluye el capítulo con una simulación para el caso de objetos binarios y en escala de grises en el esquema de holografía de Fourier.

En el capítulo 4 se lleva a cabo una revisión del teorema del muestreo en Moduladores Espaciales de luz (SLM). Asimismo, se presentan las posibles geometrias de un pixel dentro de una LCD. Esto basado en la ecuación cartesiana de un cuadrado. Finalmente, se calculan los patrones de difracción de Fraunhofer de la figura definida como *squircle*.

En el capítulo 5 se presentan los resultados experimentales, utilizando la técnica de holografía de Fourier para la recuperación de patrones de intensidad de objetos. Finalmente, las conclusiones generales de este trabajo se presentan en el capítulo 6.



# Resumen

En esta tesis se presenta el análisis de un sistema óptico – digital de información basado en la arquitectura del interferómetro de Young de la doble rendija. Asimismo, se describe el proceso de recuperación de intensidades mediante filtros holográficos tipo Fourier.

El método que se aborda en este documento es el de Holografía de Fourier, el cual consiste en hacer interferir las transformadas de Fourier de las amplitudes complejas de las ondas del haz de referencia y del haz objeto en el punto focal de una lente convergente. Se lleva a cabo el análisis matemático y la implementación óptica digital en el laboratorio.

Las operaciones se realizan en paralelo mediante una lente transformadora de Fourier. Análogamente, esta misma transformada puede ser fácilmente calculada de forma digital mediante el algoritmo de la Transformada rápida de Fourier (FFT), y de esta manera utilizando filtros holográficos generados por computadora, se logra recuperar las intensidades de los objetos mediante un sistema óptico. También implementando la integral discreta de difracción de Fresnel se recuperan las intensidades de los objetos en diferentes planos. Se realiza la comparación de estos métodos y el análisis de las ventajas y desventajas del método digital contra el método óptico.

Los objetivos de esta tesis incluyen el estudio de la teoría escalar de la difracción y de la teoría de la interferencia, para el entendimiento del comportamiento de la luz que se encuentra detrás de la generación de filtros holográficos, así como de la recuperación de intensidades a partir de ellos. Se realiza el análisis de los efectos geométricos en la calidad de los resultados observados tanto en el grabado de los filtros, como los obtenidos en la recuperación de imágenes holográficas al utilizarse dispositivos electrónicos como CCD's y LCD's, debido a la difracción de la luz. Finalmente, se comparan los resultados simulados y los obtenidos experimentalmente.



# Abstract

An analysis of an information optical - digital system based on the Young's double slit interferometer architecture is presented. Also the retrieval process of intensity patterns is described by means of holographic filters.

In this thesis we are interested in Fourier Holography, in which the Fourier transforms of the reference complex amplitude and the object waves are simultaneously superimposed in the focal plane of a positive lens. There are implemented both a mathematical review and an experimental one of the studied method.

An important advantage using optical methods is that all mathematical operations are taken in parallel. As a comparison, the digital method is taken into account using the Fast Fourier Transform (FFT). This last task produces hybrid optical and digital systems in such a way that it is possible to combine them.

Finally, experimental and simulate results are compared.



# Capítulo 1

## Introducción

La holografía es una técnica que produce una imagen tridimensional de los objetos, en donde toda la información procedente de la escena, incluyendo su profundidad, ha sido registrada en un medio altamente fotosensible para ser reconstruida más tarde.

Debido a que todos los materiales de registro responden solo a la intensidad de la imagen, es necesario convertir la información de fase a partir de variaciones de intensidad. La amplitud y la fase del frente de onda luminoso que se refleja en los objetos se reconstruye después para visualizar el holograma; de esta manera, en condiciones ideales el campo de luz resultante no se distinguiría del original.

El proceso para la recuperación de la amplitud y fase del objeto, se divide en dos etapas. En la primera etapa se tiene el grabado del patrón de interferencia, denominado también distribución de intensidades o filtro holográfico. La segunda etapa se denomina reconstrucción del campo óptico difractado, por medio de la difracción de la luz que viaja a través del filtro holográfico grabado en la primer etapa.

En este capítulo se revisarán los antecedentes y aplicaciones de las técnicas holográficas más comunes. Esto con el fin de revisar el estado del arte de esta línea de investigación.

### 1.1. Antecedentes Históricos y Aplicaciones

Las raíces de la holografía se pueden encontrar en los años 20's con el trabajo de Wolfke y Bragg en la cristalografía holográfica, la cual llevó al desarrollo del microscopio de rayos X de Bragg [1]. Gabor en 1948 denominó a la holografía como reconstrucción de frente de onda. Estaba desarrollando un método para grabar y reconstruir micrografías de electrones. En el proceso, nació lo que llamamos holografía interferográfica en eje. Gabor creó una imagen de bajo contraste que fue descrita como la suma de dos ondas: el fondo y la modulación. El holograma fue formado por la interferencia de estas ondas [2].

Rogers en 1949 razonó que para objetos simples el patrón de interferencia para un holograma en eje, podría ser calculado analíticamente y el holograma sintético dibujado a mano. El mismo fabricó los filtros holográficos y reconstruyó las imágenes holográficas [3].

Lohmann en 1956, con la holografía de banda lateral combinó la teoría de comunicaciones y los principios físicos de la óptica para referirse al problema de las imágenes gemelas de los hologramas de Gabor [4].

Leith y Upatnieks en 1962 inventaron la holografía fuera de eje. Utilizando la ventaja del láser y con la invención de esta técnica, comenzaron a producirse hologramas de muy alta calidad [5].

En 1966, Brown inventó la holografía binaria generada por computadora [6]. Tanto la potencia de las computadoras como el recién inventado algoritmo de la Transformada rápida de Fourier se combinaron con un método de cálculo utilizando el cambio de fase para crear hologramas con una transmitancia cero y uno a través de sus superficies.

Una aplicación de la holografía es la Interferometría Holográfica, desarrollada a finales de los 60's por Stetson, Powell y otros [7]. La cual hizo posible el mapeo de desplazamientos de superficies ásperas con una exactitud de una fracción de micrómetro. También se hizo posible la comparación de frentes de onda almacenados existentes a diferentes tiempos.

El desarrollo de la tecnología en computadoras permitió la transferencia del proceso de grabado o de reconstrucción a las computadoras. El primer acercamiento llevó a la Holografía Generada por Computadora, la cual genera filtros holográficos artificiales mediante métodos numéricos. Después estos filtros son reconstruidos ópticamente.

La reconstrucción numérica se inició por Goodman y Lawrence [8], y por Yaroslavski, Merzlyakov y Kronrod [9]. Ellos muestrearon ópticamente partes de hologramas en línea y de Fourier grabados en una placa fotográfica. Estos hologramas grabados convencionalmente fueron reconstruidos numéricamente. Onural y Scott [10] mejoraron el algoritmo de reconstrucción y aplicaron este método para la medición de partículas. Por otra parte, Haddad describió un microscopio holográfico basado en la reconstrucción numérica de hologramas de Fourier [11].

Un gran avance fue el desarrollo del grabado directo de hologramas de Fresnel en dispositivos acoplados por carga *CCD* por Schnars and Jüptner [12]. Este método permite completamente el grabado y procesamiento de los hologramas, sin ningún grabado fotográfico de por medio. El nombre que primero se le dió a esta técnica fue de Holografía Directa, enfatizando el término "Directa" del grabado óptico al procesamiento numérico. Después, el término Holografía Digital se aceptó en la comunidad de la metrología óptica para este método. Aunque a veces el término también se utiliza para la Holografía Generada por Computadora, la Holografía Digital se refiere al grabado digital y reconstrucción numérica del holograma.

Schnars y Jüptner [13], [14], [15] aplicaron la Holografía Digital a la interferometría y demostraron que la reconstrucción digital ofrece muchas posibilidades más que el procesamiento convencional, ya que la fase almacenada de las ondas luminosas puede ser calculada directamente de los hologramas digitales, sin generar interferogramas de desplazamiento de

fase. Otros métodos de metrología óptica, tales como sherografía o fotografía de speckle, se derivan numéricamente de la Holografía Digital. Por lo tanto, se puede elegir la técnica interferográfica después del grabado del holograma por métodos matemáticos.

El uso de dispositivos electrónicos tales como las CCD's para el grabado de interferogramas se estableció en Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI, también denominada TV-holográfica), descubierta independientemente por Butters y Leendertz [16], Macovski, Ramsey, Schaefer [17] y Schwomma [18]. Dos interferogramas speckle se graban en diferentes estados del objeto bajo investigación. Los patrones speckle se sustraen electrónicamente. El patrón de franjas resultante tiene algunas similitudes con los convencionales o Interferometría Holográfica digital. Las principales diferencias son la presencia de speckle en las franjas y la pérdida de fase en el proceso de correlación. La fase de interferencia tiene que ser recuperada mediante los métodos de desplazamiento de fase, requiriendo un mayor esfuerzo adicional. La interferometría holográfica digital y el ESPI son métodos en competencia, la sustracción de la imagen en ESPI es más sencilla que la reconstrucción numérica de la Holografía Digital, pero el contenido de la información de los hologramas digitales es mayor.

Desde mediados de los 90's la Holografía Digital se ha extendido, mejorado y aplicado a diversas tareas de medida. Algunos pasos importantes se mencionan a continuación. Mejoramiento de técnicas y del algoritmo de reconstrucción. Aplicaciones en análisis de deformación y mediciones de formas. Aplicaciones en generación de imágenes, rastreo de partículas y microscopía. Medición de distribuciones de los índices de refracción en medios transparentes debido a temperatura o variaciones de concentración. El desarrollo de métodos para reconstruir la estructura de objetos tridimensionales a partir de hologramas digitales. El desarrollo de Holografía Digital Comparativa. .

La eficiencia de la Holografía Digital depende fuertemente de la resolución del objetivo electrónico utilizado para grabar los filtros holográficos. El posterior desarrollo de sistemas opto-electrónicos y en procesamiento de datos impulsaron a la Holografía Digital hacia nuevas perspectivas: ésta se aplica a deformaciones ópticas, mediciones de formas, microscopía y para investigaciones de fluidos en líquidos y gases.

## 1.2. Objetivo general del trabajo

Analizar y recuperar intensidades de objetos a partir de la información codificada en filtros holográficos tipo Fourier.

### 1.2.1. Objetivos particulares

1. Analizar las causas que impiden la recuperación óptica en su totalidad de la información codificada en filtros holográficos tipo Fourier, al usar moduladores espaciales de luz.

2. Analizar los efectos difractivos ocasionados por pixeles con orillas romas, en la recuperación óptica de intensidades a partir de filtros holográficos tipo Fourier.

3. Recuperar intensidades de objetos usando dos métodos diferentes en la decodificación de la información en filtros tipo Fourier. a) Mediante la transformación de Fraunhofer y b) por medio de la integral de Fresnel.

4. Generar filtros digitales y ópticos para recuperar las intensidades de los objetos de entrada.

5. Realizar el análisis de los efectos debido a la difracción de la luz, en la calidad de los resultados observados tanto en el grabado de los filtros, como los obtenidos en la recuperación de las imágenes del objeto al utilizarse dispositivos electrónicos como CCD y LCD.

6. Describir el proceso de recuperación de intensidades mediante interferogramas de doble haz previamente grabados utilizando el método de Fourier.

7. Obtener filtros de doble haz mediante la Transformada óptica de Fourier, con operaciones en paralelo usando un a lente convergente y en forma digital mediante la FFT.

### 1.3. Aportaciones

Esta tesis aporta un análisis de los efectos físicos y tecnológicos en la recuperación de intensidades de objetos, a partir de filtros holográficos de tipo Fourier. Establece las bases teóricas de las técnicas óptico digitales que permiten la codificación y decodificación de información usando estos mismos filtros. Presenta una serie de simulaciones y experimentos tanto ópticos como digitales de las bases matemáticas y físicas de la holografía de Fourier.

## Capítulo 2

# Principios de Difracción

### 2.1. Introducción

El fenómeno de la difracción de la luz puede ser explicado al considerar la propagación de un frente de onda en el espacio libre, el cual fue descubierto por Grimaldi en el año de 1650. Una primera aproximación para explicar el fenómeno de la propagación de la luz, fue estudiada por Christian Huygens, en el año de 1678. El principio de Huygens no considera que las ondas esféricas secundarias interfieran entre si, este hecho fue tomado en cuenta por Augustin Jean Fresnel, en el año de 1818. La combinación de la construcción de Huygens, con el principio de interferencia, se conoce como el principio de Huygens- Fresnel. Posteriormente, Gustav Kirchhoff, en el año de 1882, desarrolló una teoría escalar del fenómeno de la difracción de la luz, basada directamente en la solución de la ecuación diferencial de onda, y demostró que el principio de Huygens- Fresnel, es una consecuencia de la ecuación de onda.

En este capítulo se revisan los principios básicos de la teoría de la difracción escalar necesarios en la solución del problema planteado.

### 2.2. El principio de Huygens - Fresnel en coordenadas rectangulares

El principio de Huygens establece que cada punto en un frente de onda primario, es considerado como una nueva fuente de ondas esféricas secundarias, de tal manera que el frente de onda primario en un momento más tarde, es la envolvente de las ondas secundarias.

El principio de Huygens combinado con el principio de interferencia da origen al principio de Huygens - Fresnel, el cual propone que cada punto en un frente de onda en un instante de tiempo dado, se considera como una fuente de ondas esféricas secundarias de la misma frecuencia que la onda primaria, en donde la amplitud del campo óptico en cualquier punto adelante, es la superposición de las ondas esféricas secundarias, considerando las amplitudes y fases de estas ondas, como se muestra en la fig. 2.1.

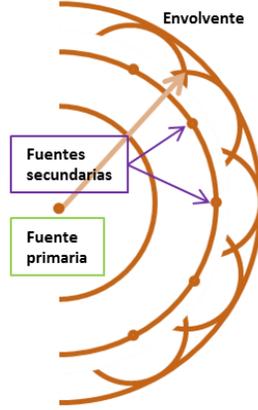


Figura 2.1: Principio de Huygens - Fresnel

Antes de introducir una serie de aproximaciones a este principio, será de ayuda partir del caso de coordenadas rectangulares. Como se muestra en la fig.2.2 se asume que la abertura de difracción se encuentra en el plano  $(x, y)$ , y es iluminado en la dirección positiva  $z$ . Se calculará el campo de ondas a través del plano  $(u, v)$  paralelo al plano  $(x, y)$ , a una distancia  $z$  normal a él. El eje  $z$  atraviesa ambos planos en sus orígenes.

El principio de Huygens - Fresnel se puede definir como

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\theta) ds, \quad (2.1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la normal saliente  $\hat{n}$  y el vector  $\vec{r}_{01}$  apuntando desde  $P_0$  a  $P_1$ . El término  $\cos(\theta)$  está dado por

$$\cos(\theta) = \frac{z}{r_{01}}, \quad (2.2)$$

por lo tanto el principio de Huygens - Fresnel puede reescribirse como

$$U(u, v) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x, y) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} dx dy, \quad (2.3)$$

donde la distancia  $r_{01}$  está dada por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (u - x)^2 + (v - y)^2}. \quad (2.4)$$

Solamente hay dos aproximaciones para obtener esta expresión. La primera es la aproximación que surge en la teoría escalar. La segunda es mediante la consideración de que la

## 2.2. EL PRINCIPIO DE HUYGENS - FRESNEL EN COORDENADAS RECTANGULARES<sup>7</sup>

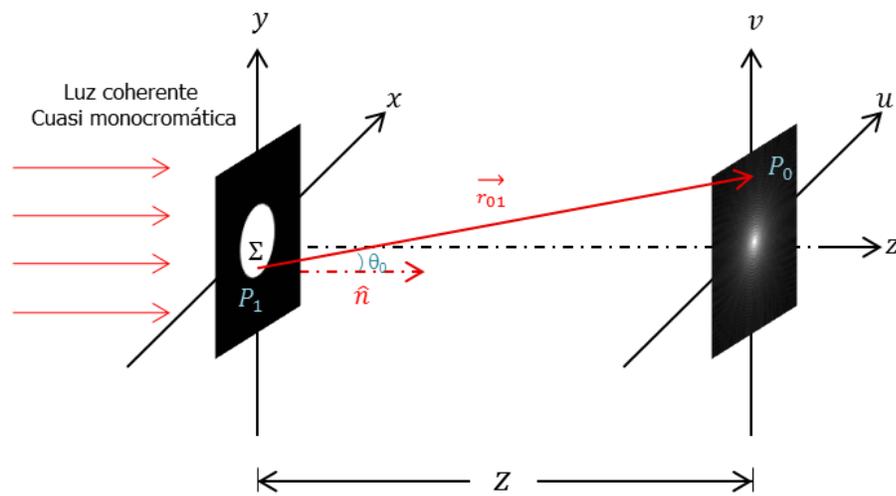


Figura 2.2: Geometría de la difracción

distancia  $r_{01}$  es muchas veces mayor que la longitud de onda desde la abertura. Esto es,  $r_{01} \gg \lambda$ .

## 2.3. Teoría de la Difracción escalar

### 2.3.1. Difracción de Fresnel

Para reducir el principio de Huygens - Fresnel a una expresión más simple, se introducen aproximaciones para la distancia  $r_{01}$  entre  $P_1$  y  $P_0$ . Las aproximaciones se basan en la expansión binomial de la raíz cuadrada de la ec.(2.4). Sea  $\alpha \ll 1$ , considerando la expresión  $\sqrt{1 + \alpha}$ . La expansión binomial de la raíz cuadrada es

$$\sqrt{1 + \alpha} \simeq 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + \dots, \quad (2.5)$$

donde el número de términos que se requieren para una exactitud dada depende de la magnitud de  $\alpha$ . Para aplicar la expansión binomial al problema, se factoriza  $z$  fuera de la expresión, obteniendo

$$\begin{aligned} r_{01} &= \sqrt{z^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2}, \\ r_{01} &= \sqrt{z^2 \left[ 1 + \frac{(u-x)^2}{z^2} + \frac{(v-y)^2}{z^2} \right]}, \\ r_{01} &= \sqrt{z^2} \sqrt{1 + \left( \frac{u-x}{z} \right)^2 + \left( \frac{v-y}{z} \right)^2}, \\ r_{01} &= z \sqrt{1 + \left( \frac{u-x}{z} \right)^2 + \left( \frac{v-y}{z} \right)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sea la cantidad  $\alpha$  en la ec. (2.5) consistente en el segundo y tercer términos bajo la raíz cuadrada en la ec. (2.6). Esto significa que

$$\alpha = \frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{z}. \quad (2.7)$$

Entonces, retomando solo los primeros dos términos de la expansión tenemos

$$r_{01} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u-x}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v-y}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Por la aparición de  $r_{01}^2$  en el denominador de la ec. (2.3), el error introducido es aceptablemente pequeño.

$$\begin{aligned}
U(u, v) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x, y) \frac{e^{ikr_{01}}}{z^2} z dx dy, \\
U(u, v) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x, y) \frac{e^{ikr_{01}}}{z} dx dy, \\
\text{donde } r_{01} &\approx z, \frac{1}{r_{01}} \approx \frac{1}{z} \text{ en la región paraxial.}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Sin embargo, debido a la aparición de  $r_{01}$  en el exponente, los errores son mucho más críticos. Primero, son multiplicados por un número  $k$  muy grande, cuyo valor típico debe ser mayor a  $10^7 MHz$  en la región visible del espectro  $\lambda = 5 \times 10^{-7} \mu m$ . Segundo, cambios de fase tan pequeños como una fracción de radián pueden cambiar el valor de la exponencial significativamente. Por esta razón se retoman ambos términos de la aproximación binomial en el exponente. La expresión resultante para el campo en  $(u, v)$  es entonces

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \left\{ e^{i\frac{k}{2z}[(u-x)^2 + (v-y)^2]} \right\} dx dy. \tag{2.10}$$

donde se han incorporado límites finitos de la abertura en la definición de  $U(x, y)$ , de acuerdo con las condiciones usuales de límites asumidas.

La ec. (2.10) es una convolución, la cual se puede expresar de la siguiente manera

$$U(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) h(u-x, v-y) dx dy, \tag{2.11}$$

donde el kernel de la convolución es

$$h(u, v) = \frac{e^i}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(u^2+v^2)}. \tag{2.12}$$

Otra forma del resultado de la ec.(2.10) se encuentra si el término

$$e^{i\frac{k}{2z}(u^2+v^2)}, \tag{2.13}$$

se factoriza fuera de los signos de integración, obteniendo

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(u^2+v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(x, y) e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(ux+vy)} dx dy, \tag{2.14}$$

la cual, se reconoce como la Transformada de Fourier del producto del campo complejo justo a la derecha de la abertura y una exponencial cuadrática de fase. Se denomina a ambos términos del resultado, (ec. (2.10) y ec. (2.14)) como integral de Difracción de Fresnel. Cuando su aproximación es válida, se dice que el observador se encuentra en la región de la difracción de Fresnel, o equivalentemente en el campo cercano de la abertura.

### Abertura rectangular

**En una dimensión** Sea una abertura rectangular, como la que se muestra en el esquema de la fig. 2.3, modelada matemáticamente mediante una función  $rect(\frac{x}{2a})$ , definida de la siguiente manera

$$rect\left(\frac{x}{2a}\right) = \begin{cases} 1; & -a \leq x \leq a \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (2.15)$$

con una función de transmitancia dada por

$$t(x) = rect\left(\frac{x}{2a}\right), \quad (2.16)$$

donde la constante  $a$  es el ancho de la abertura en la dirección  $x$ .

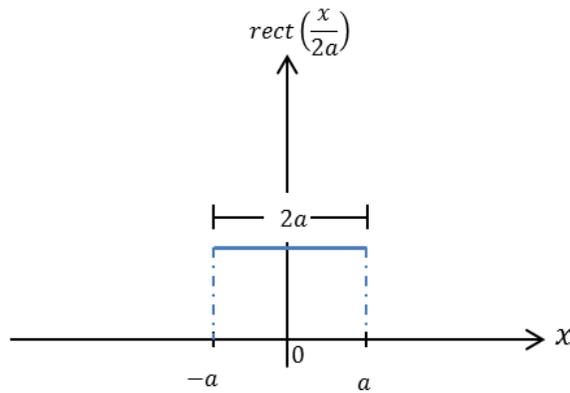
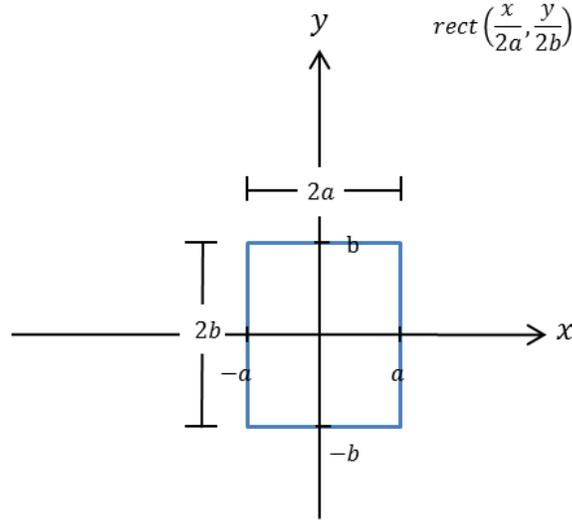


Figura 2.3: Función  $rect(\frac{x}{2a})$

**En dos dimensiones** Sea una abertura rectangular, como la que se muestra en el esquema de la fig. 2.4, modelada matemáticamente mediante una función  $rect(\frac{x}{2a}, \frac{y}{2b})$ , definida de la siguiente manera

$$rect\left(\frac{x}{2a}, \frac{y}{2b}\right) = \begin{cases} 1; & -a \leq x \leq a \wedge -b \leq y \leq b \\ 0; & \text{otra forma} \end{cases}, \quad (2.17)$$

donde las constantes  $a$  y  $b$  son el tamaño de la abertura en sus correspondientes direcciones  $x$  y  $y$ .

Figura 2.4: Perfil de la función  $rect\left(\frac{x}{2a}, \frac{y}{2b}\right)$ 

### Ejemplos de difracción de Fresnel

**Abertura cuadrada** Suponiendo que una abertura cuadrada de ancho  $2a$  es normalmente iluminada por una onda plana con amplitud unidad. La distribución del campo complejo detrás de la abertura es

$$U(x, y) = rect\left(\frac{x}{2a}\right) rect\left(\frac{y}{2a}\right). \quad (2.18)$$

La forma de convolución de la ecuación de Fresnel es más conveniente para este problema,

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-a}^a e^{\frac{i\pi}{\lambda z}[(u-x)^2 + (v-y)^2]} dudv. \quad (2.19)$$

Esta expresión puede ser separada en el producto de dos integrales en una dimensión

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} I(u)I(v), \quad (2.20)$$

en donde

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-a}^a e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x-u)^2} du, \quad (2.21)$$

$$I(v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-a}^a e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(y-v)^2} dv. \quad (2.22)$$

Para reducir estas integrales con el propósito de relacionarlas con las integrales de Fresnel, se realiza un cambio de variables

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - u); \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y - v), \quad (2.23)$$

$$\alpha^2 = \frac{2}{\lambda z}(x - u), \quad (2.24)$$

$$d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda z}}dx, \quad (2.25)$$

$$dx = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{2}}d\alpha, \quad (2.26)$$

obteniendo

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\frac{i\pi}{2}\alpha^2} d\alpha, \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\frac{i\pi}{2}\alpha^2} d\alpha, \quad (2.28)$$

$$I(v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{\frac{i\pi}{2}\beta^2} d\beta, \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{\frac{i\pi}{2}\beta^2} d\beta, \quad (2.30)$$

donde los límites de integración son

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(a + u); \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(a - u), \quad (2.31)$$

$$\beta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(a + v); \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(a - v). \quad (2.32)$$

En este punto, se define el número de Fresnel

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z}. \quad (2.33)$$

Si se introducen variables normalizadas de distancia en la región de observación se tiene que

$$U = \frac{u}{\sqrt{\lambda z}}; \quad V = \frac{v}{\sqrt{\lambda z}}. \quad (2.34)$$

Obteniendo expresiones más simples para los límites de integración

$$\alpha_1 = -\sqrt{2} \left( \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} + \frac{u}{\sqrt{\lambda z}} \right), \quad (2.35)$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{2} \left( \sqrt{N_F} + U \right); \quad \beta_1 = -\sqrt{2} \left( \sqrt{N_F} + V \right), \quad (2.36)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2} \left( \sqrt{N_F} - U \right); \quad \beta_2 = -\sqrt{2} \left( \sqrt{N_F} - V \right). \quad (2.37)$$

Y utilizando las integrales de Fresnel

$$C(z) = \int_0^z \cos \left( \frac{\pi t^2}{2} \right) dt; \quad S(z) = \int_0^z \text{sen} \left( \frac{\pi t^2}{2} \right) dt, \quad (2.38)$$

aplicando el teorema de Euler a la Ec(2.28) y Ec(2.30) se obtiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\frac{i\pi}{2}\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_2} e^{\frac{i\pi}{2}\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_1} e^{\frac{i\pi}{2}\alpha^2} d\alpha, \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{\frac{i\pi}{2}\beta^2} d\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\beta_2} e^{\frac{i\pi}{2}\beta^2} d\beta - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\beta_1} e^{\frac{i\pi}{2}\beta^2} d\beta, \quad (2.40)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) \right] d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_1} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) \right] d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_1} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (2.42)$$

factorizando términos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\alpha_2} \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \cos \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) d\alpha \right] \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\alpha_2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\alpha^2 \right) d\alpha \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\beta_2} \cos \left( \frac{\pi}{2}\beta^2 \right) d\beta - \int_0^{\beta_1} \cos \left( \frac{\pi}{2}\beta^2 \right) d\beta \right] \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\beta_2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\beta^2 \right) d\beta - \int_0^{\beta_1} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2}\beta^2 \right) d\beta \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

entonces

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \}, \quad (2.45)$$

$$I(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}. \quad (2.46)$$

La sustitución de  $I(u)$  y  $I(v)$  en  $U(u, v)$  produce

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz}}{2i} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \\ \times \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}. \quad (2.47)$$

La intensidad del patrón de difracción es

$$I(u, v) = |U(u, v)|^2 = U(u, v)U^*(u, v), \quad (2.48)$$

realizando las operaciones correspondientes

$$I(u, v) = \frac{e^{ikz}e^{-ikz}}{-2i2i} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \\ \times \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] - i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \\ \times \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \} \\ \times \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] - i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \} \quad (2.49)$$

La intensidad en el plano de Fresnel resulta ser

$$I(u, v) = \frac{1}{4} \left\{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2 \right\} \\ \times \left\{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2 \right\}. \quad (2.50)$$

En la sección 2.5, se lleva a cabo la simulación de la difracción de la luz en la región de campo cercano para el caso de la función rectángulo o abertura rectangular en 2D.

### 2.3.2. Difracción de Fraunhofer

Antes de presentar el cálculo de diversos patrones de difracción, se toma en consideración una aproximación que simplifica bastante los cálculos. Se vió en la Ec(2.14) que en la región de difracción de Fresnel el campo observado  $U(u, v)$  puede encontrarse por medio de una Transformada de Fourier del producto de la distribución de la abertura  $U(x, y)$  y una función cuadrática de fase  $e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}$ . Si además de la aproximación de Fresnel, la aproximación de Fraunhofer

$$z \gg \frac{k(x^2 + y^2)_{\text{máx}}}{2}, \quad (2.51)$$

se satisface, entonces el factor cuadrático de fase bajo el signo de la integral en la ec.(2.14) es aproximadamente la unidad y se define sobre la abertura entera, de esta manera el campo observado se puede encontrar hasta un factor de fase multiplicativo en  $(u, v)$  directamente a partir de una transformada de Fourier de la distribución de abertura misma. Esto es, en la región de difracción de Fraunhofer o equivalentemente, en el campo lejano,

$$U(u, v) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(u^2+v^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(ux+vy)} dx dy, \quad (2.52)$$

aparte de los factores multiplicativos de fase precediendo la integral, esta expresión es simplemente la transformada de Fourier de la abertura, evaluada en las frecuencias

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{\lambda z}, \\ y &= \frac{v}{\lambda z}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

En frecuencias ópticas, las condiciones requeridas para validar la aproximación de Fraunhofer pueden ser muchas. Por ejemplo, a una longitud de onda de  $0,6\mu m$  (luz roja) y un ancho de abertura de  $2,5cm$ , la distancia de observación debe satisfacer

$$z \gg 1600m.$$

Una alternativa, conocida como la fórmula del diseñador de antenas, establece que para una abertura de dimensión lineal  $D$ , la aproximación de Fraunhofer será válida si

$$z > \frac{2D^2}{\lambda}, \quad (2.54)$$

donde la desigualdad es ahora  $>$  en lugar de  $\gg$ . Sin embargo, para este ejemplo la distancia  $z$  debe ser mayor a los  $2000m$ . No obstante, las condiciones requeridas son conocidas en un número de problemas importantes. Además, los patrones de difracción pueden ser observados a distancias mucho más cercanas que las implicadas en la ec.(2.51), si la abertura es iluminada por una onda esférica que converge hacia el observador, o si una lente positiva está situada apropiadamente entre el observador y la abertura.

No se debe olvidar que, ya que la difracción de Fraunhofer es un caso especial de la difracción de Fresnel, la función de transmitancia ec.(2.52) es válida para Fresnel y Fraunhofer. Esto es, siempre es posible calcular campos difractados en la región de Fraunhofer retomando la precisión total de la aproximación de Fresnel.

En conclusión, la amplitud compleja del patrón de difracción de Fraunhofer, es proporcional a la transformada de Fourier de la amplitud compleja en el plano de la abertura. A diferencia de la difracción de Fresnel, la difracción de Fraunhofer, tiene lugar en un plano de observación a una distancia todavía mucho más grande comparada con el tamaño de la abertura; por lo que también es llamada difracción de campo lejano.

### Ejemplos de Patrones de difracción de Fraunhofer

**Abertura Rectangular en una dimensión** Si la abertura es iluminada por un haz de luz cuasimonocromático de longitud de onda  $\lambda$ , entonces el patrón de difracción resultante en la región de Fraunhofer está dado por la Transformada de Fourier de la función de transmitancia, representado por la siguiente expresión

$$\mathfrak{S}\{t(x)\} = \mathfrak{S}\left\{rect\left(\frac{x}{2a}\right)\right\}. \quad (2.55)$$

Al desarrollar las correspondientes operaciones matemáticas, se tiene que

$$\mathfrak{S}\{t(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik\left(\frac{xu}{f}\right)} dx, \quad (2.56)$$

por la definición de la función  $rect\left(\frac{x}{2a}\right)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\{t(x)\} &= \int_{-a}^a rect\left(\frac{x}{2a}\right)e^{-ik\left(\frac{xu}{f}\right)} dx, \\ &= \int_{-a}^a e^{-ik\left(\frac{xu}{f}\right)} dx, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde la constante  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y  $f$  es la distancia focal de la lente empleada.

Resolviendo la integral

$$T(u) = \frac{\lambda f}{i2\pi u} \left[ e^{i\frac{2\pi}{\lambda f} au} - e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f} au} \right], \quad (2.58)$$

y por la fórmula de Euler

$$T(u) = \frac{\lambda f}{i2\pi u} 2i \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right), \quad (2.59)$$

en términos del seno cosciente  $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} = \operatorname{sinc}(ax)$

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{2a \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right)}{\left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right)}, \\ &= 2a \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Entonces la distribución de intensidades del patrón de Fraunhofer de una abertura cuadrada es

$$I(u) = 4a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi au}{\lambda f}\right). \quad (2.61)$$

Se puede observar en la fig. 2.5 el perfil de la transformada de Fourier de la función  $\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)$ .

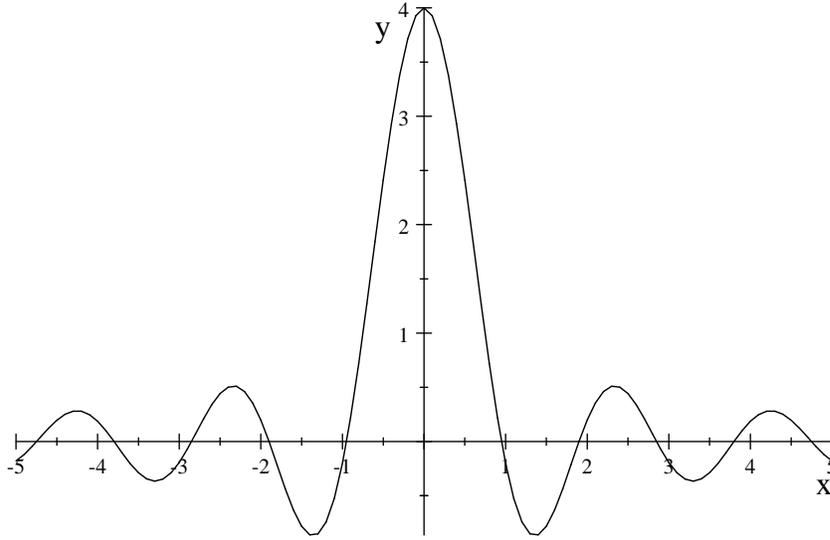


Figura 2.5: Función  $\operatorname{sinc}(x)$ , Transformada de Fourier de la función rectángulo en una dirección

**Abertura Rectangular en dos dimensiones** La función de transmitancia es la misma función de abertura y ésta es iluminada por un haz de luz cuasimonocromático, entonces el patrón de difracción resultante en la región de Fraunhofer está dado por la transformada de Fourier de la función de transmitancia, representado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{t(x, y)\} &= \mathfrak{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2a}, \frac{y}{2b}\right)\right\}, \\ &= \mathfrak{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{2b}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Al ser  $t(x, y)$  separable

$$\mathfrak{F}\{t(x, y)\} = \mathfrak{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)\right\} \cdot \mathfrak{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{y}{2b}\right)\right\}, \quad (2.63)$$

$$= 2a \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi au}{\lambda f}\right) 2b \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi bv}{\lambda f}\right). \quad (2.64)$$

El patrón de difracción de Fraunhofer resulta ser

$$T(u, v) = 4ab \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \sin c \left( \frac{2\pi bv}{\lambda f} \right). \quad (2.65)$$

y la distribución de intensidades del patrón de Fraunhofer es

$$I(u, v) = 16a^2b^2 \sin^2 c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \sin^2 c \left( \frac{2\pi bv}{\lambda f} \right). \quad (2.66)$$

Cuyo perfil se muestra en la gráfica de la fig. 2.6.

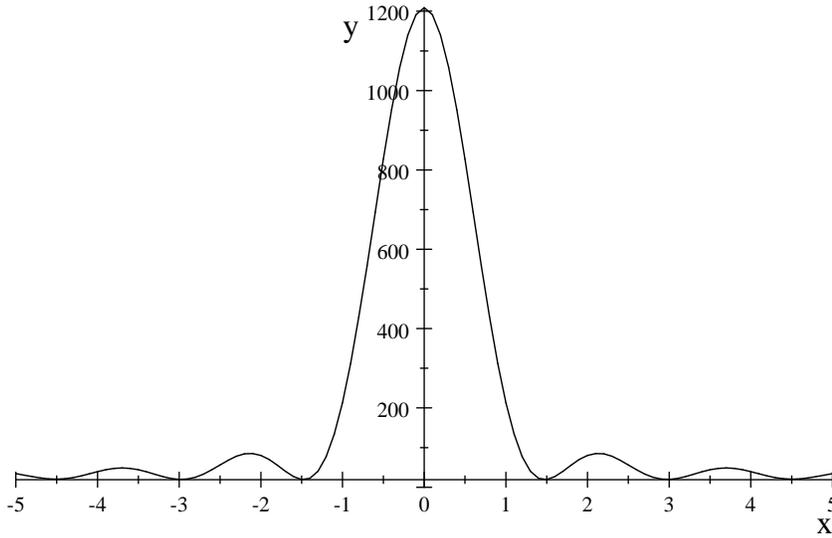


Figura 2.6: Patrón de difracción de Fraunhofer

**Abertura Circular** Considerando una abertura circular de radio  $r$ , cuya área  $A$  tiene un valor finito. Si  $r$  es una coordenada radial en el plano de la abertura, entonces la función de transmitancia es

$$t(r) = \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right). \quad (2.67)$$

La función de la abertura circular se puede definir como

$$\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & r \leq a \\ 0; & \text{otra forma} \end{array} \right\}, \quad (2.68)$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Desarrollando la transformada de Fourier de la función de transmitancia se obtiene que

$$\mathfrak{F}\{t(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) e^{-ik(xu+yv)} dx dy, \quad (2.69)$$

Cambiando a coordenadas polares tal que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \text{sen} \theta$ ,  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\phi = tg^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ ,  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \text{sen} \theta$ , la transformada de Fourier resulta ser

$$\begin{aligned} T(\rho, \theta) &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) e^{-i2\pi(r \cos \theta \rho \cos \phi + r \text{sen} \theta \rho \text{sen} \phi)} r dr d\theta, \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi r \rho (\cos \theta \cos \phi + \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (2.70)$$

utilizando la identidad  $\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \text{sen} \theta \text{sen} \phi$ , se tiene que

$$T(\rho, \theta) = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)} r dr d\phi. \quad (2.71)$$

Empleando la identidad de Jacobi de la teoría de funciones Bessel en la ec. anterior

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{-is \cos(\theta - \phi)} d\theta &= J_0(s), \\ \int_0^{2\pi} e^{-is \cos(\theta - \phi)} d\theta &= 2\pi J_0(s), \end{aligned} \quad (2.72)$$

encerrando en paréntesis la integral angular

$$T(\rho, \theta) = \int_0^a \left[ \int_0^{2\pi} e^{-is \cos(\theta - \phi)} d\theta \right] r dr, \quad (2.73)$$

y sustituyendo la Ec(2.71) resulta que

$$T(\rho, \theta) = \int_0^a 2\pi J_0(2\pi r \rho) r dr, \quad (2.74)$$

Ahora utilizando una regla de recurrencia de las funciones Bessel

$$\int_0^t x J_0(x) dx = t J_1(t). \quad (2.75)$$

Resolviendo la integral mediante cambio de variable

$$\begin{aligned}
T(\rho) &= \int_0^{2\pi a\rho} J_0(w) \frac{w}{\rho} \frac{dw}{2\pi\rho}, \\
&= \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi a\rho} w J_0(w) dw, \\
&= \frac{1}{2\pi\rho^2} 2\pi a\rho J_1(2\pi a\rho), \\
&= \frac{a J_1(2\pi a\rho)}{\rho}, \\
&= \frac{2\pi a^2 J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho},
\end{aligned}$$

El patrón de difracción de la función círculo en la región de Fraunhofer está dado por

$$T(\rho) = 2\pi a^2 \left( \frac{J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho} \right). \quad (2.76)$$

Y su distribución de intensidades es

$$|T(\theta)|^2 = (4\pi a^2)^2 \left[ \frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho^2} \right]^2. \quad (2.77)$$

En la fig. 2.7 se muestra la gráfica de la ec.(2.77).

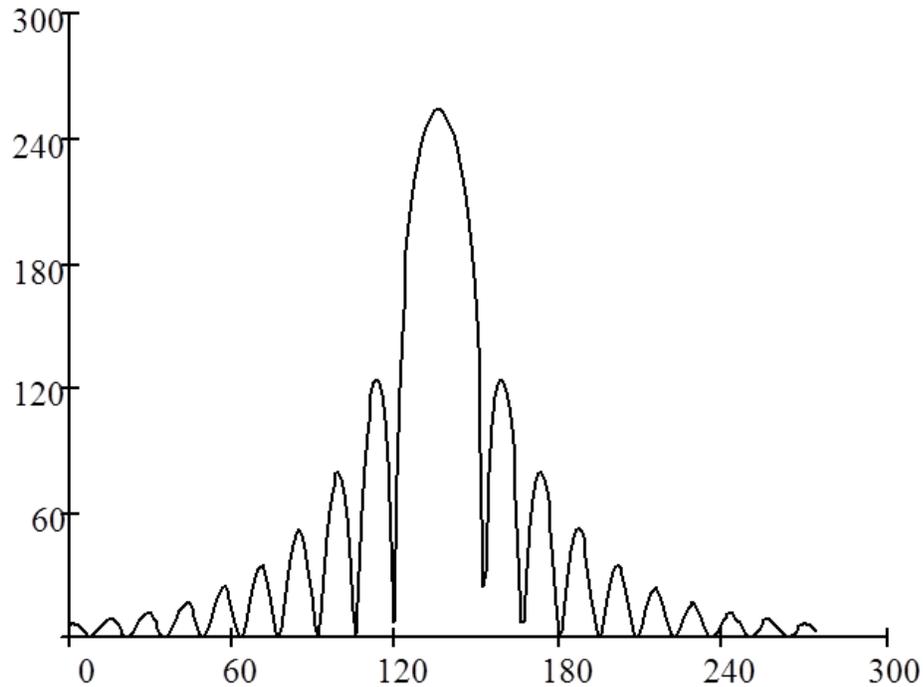


Figura 2.7: Perfil del patrón de difracción de Fraunhofer de la función  $\text{circ}(\frac{x}{a})$

## 2.4. Configuraciones para obtener la Transformada de Fourier mediante lentes convergentes

De manera teórica se puede obtener el patrón de difracción de una abertura mediante la integral de Fraunhofer, lo cual equivale a obtener la Transformada de Fourier de la función de transmitancia de la abertura. Análogamente, estos cálculos y sus correspondientes resultados se pueden obtener digitalmente mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) y ópticamente mediante lentes convergentes en un sistema experimental.

Se consideran distintas configuraciones ópticas del objeto de estudio y la lente de Fourier. Estas pueden ser implementadas en un sistema experimental óptico - digital. A continuación se describen cuatro configuraciones para obtener la Transformada de Fourier utilizando lentes convergentes. Estas configuraciones se esquematizan en las figuras 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11.

En este caso, la configuración más conveniente es la mostrada en la fig.2.11, ya que se tiene una mayor movilidad del objeto sobre el eje óptico y como consecuencia un mayor control sobre los lóbulos del patrón de Fraunhofer resultante. Con la ventaja de poder controlar la amplificación del patrón respecto del área activa de la cámara empleada.

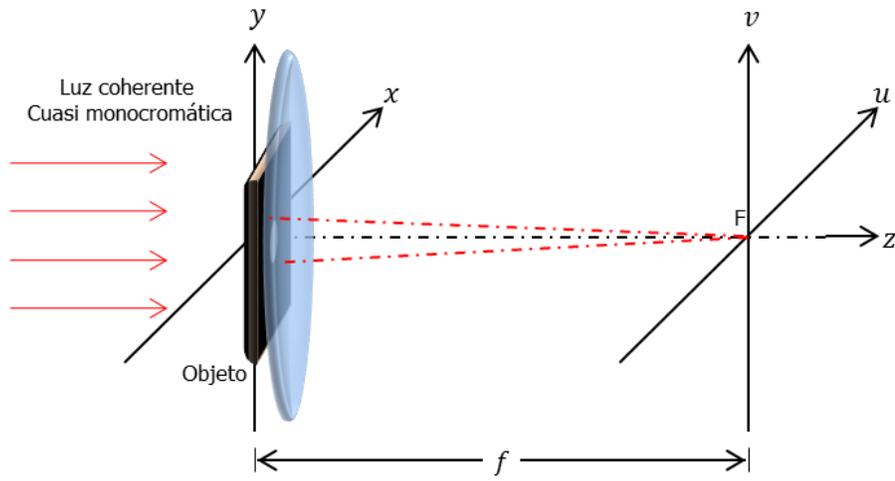


Figura 2.8: Configuración 1: Objeto junto a la lente

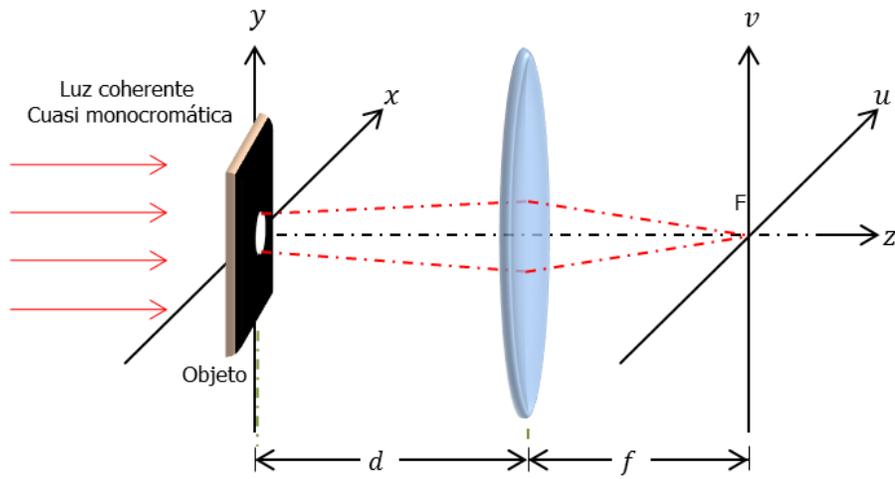


Figura 2.9: Configuración 2: Objeto a una distancia  $d$  de la lente

2.4. CONFIGURACIONES PARA OBTENER LA TRANSFORMADA DE FOURIER MEDIANTE LENTE

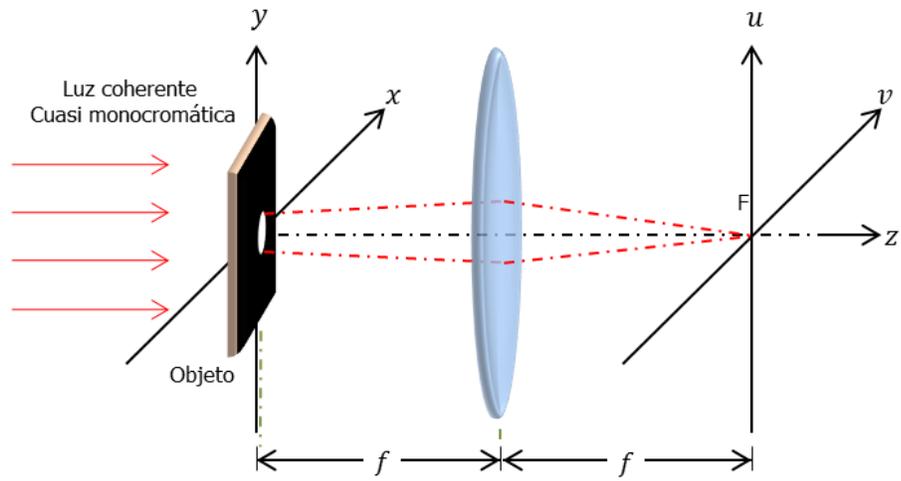


Figura 2.10: Configuración 3: Objeto a la distancia focal de la lente

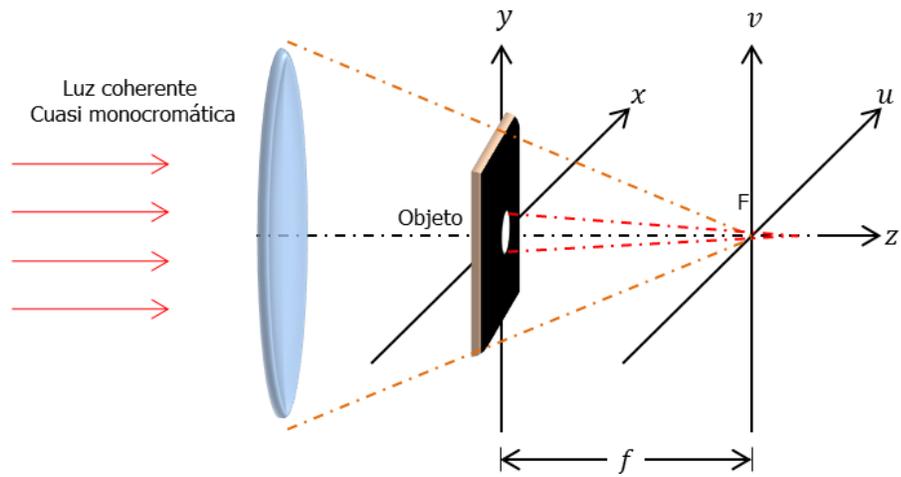


Figura 2.11: Configuración 4: Objeto después de la lente

## 2.5. Simulación

### 2.5.1. Difracción de Fresnel

Se programó un algoritmo en Matlab para calcular el patrón de difracción en el plano de Fresnel a distintas distancias  $z$  de una abertura cuadrada. La fig.2.12 muestra los patrones de difracción resultantes. Una serie de gráficas de su distribución de intensidades sobre el eje  $x$  se muestran en la fig.2.13.

Nótese que para un tamaño determinado  $a$  de la abertura y longitud de onda  $\lambda = 632,8nm$ , conforme  $z = 100$  aumenta hasta  $z = 10000$ , el número de fresnel disminuye y el patrón de difracción se hace mucho más grande que el tamaño de la abertura. Al aumentar  $z$ , nos aproximamos a la región de Fraunhofer.

### 2.5.2. Difracción de Fraunhofer

Se programó un algoritmo en Mathcad para calcular la transformada de Fourier de manera discreta y por la Transformada rápida de Fourier (Fourier Fast Transform, FFT). El patrón de difracción resultante depende de la distancia  $d$  entre el plano de la abertura y el plano de Fourier, la distancia focal  $f$  de la lente, el valor que se le da a la longitud de onda  $\lambda$  y el tamaño de la abertura  $a, b$ . El tamaño de entrada en el caso de la abertura cuadrada es  $a = 65, f = 10$  y  $\lambda = 632$ . En el caso de la abertura circular, los valores de entrada son  $a = 400, f = 1$  y  $\lambda = 632$ . Las imágenes de prueba y sus resultados se muestran en las siguientes figuras 2.14, 2.15, 2.16, 2.17.

Los patrones de intensidad de ambas aberturas, obtenidos al programar en mathcad las expresiones de la Ec(2.66) y la Ec(2.77), así como con el algoritmo de la FFT, son muy parecidos. Lo anterior indica que el algoritmo digital de la transformada rápida de Fourier es equivalente a utilizar las expresiones obtenidas al calcular numéricamente la transformada de Fourier de las funciones de entrada, tales como *circ* para el círculo y la *rect* para el cuadrado.

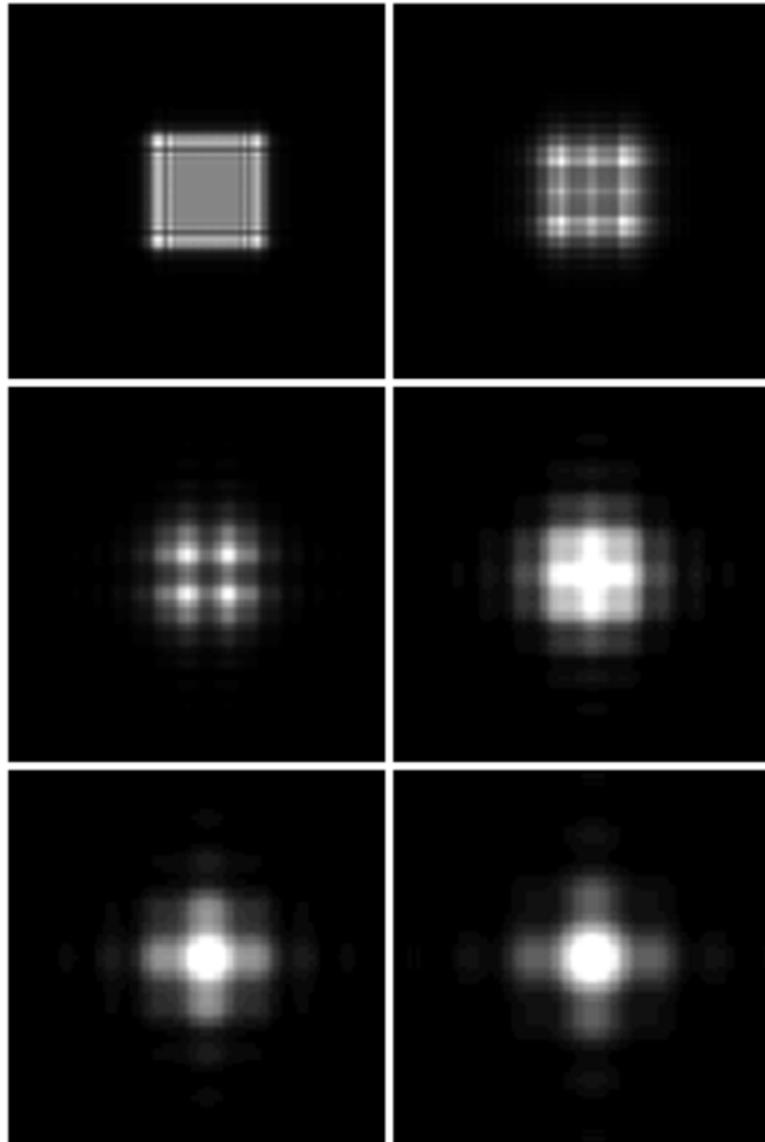


Figura 2.12: Patrones de difracción de Fresnel de una abertura cuadrada a distancias que van desde  $z = 100m, \dots, 2500m$  aumentando en una razón de  $500m$ .

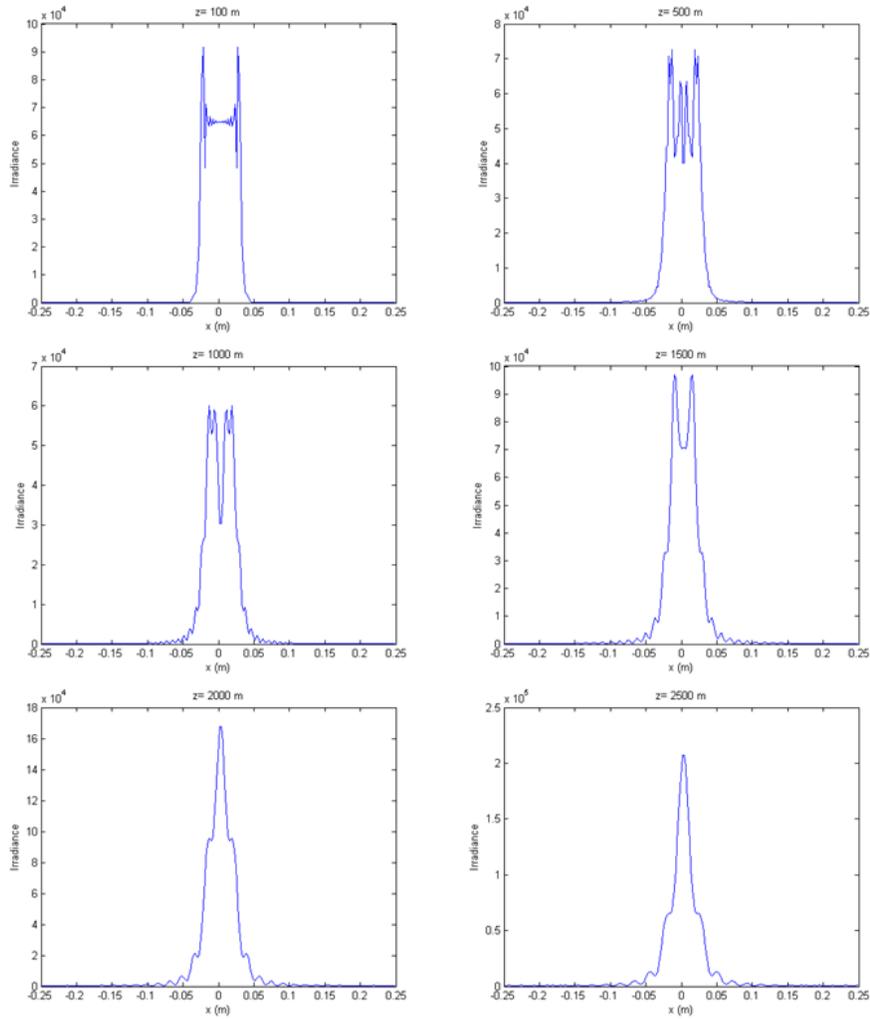


Figura 2.13: Gráficas de las distribuciones de intensidad de los patrones de difracción de la abertura cuadrada de las distancias  $z = 100m$  hasta  $z = 2500m$

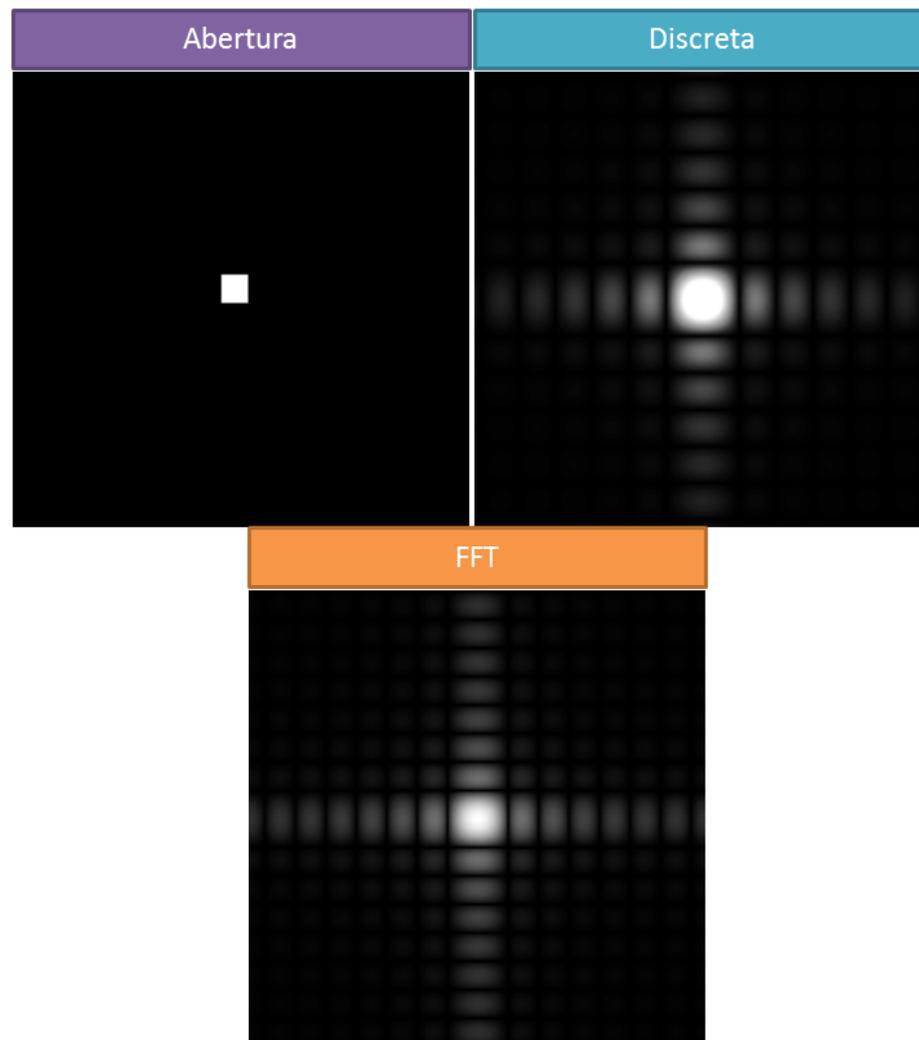


Figura 2.14: Patrones de difracción obtenidos numéricamente mediante la transformada de Fourier discreta y transformada de Fourier rápida.

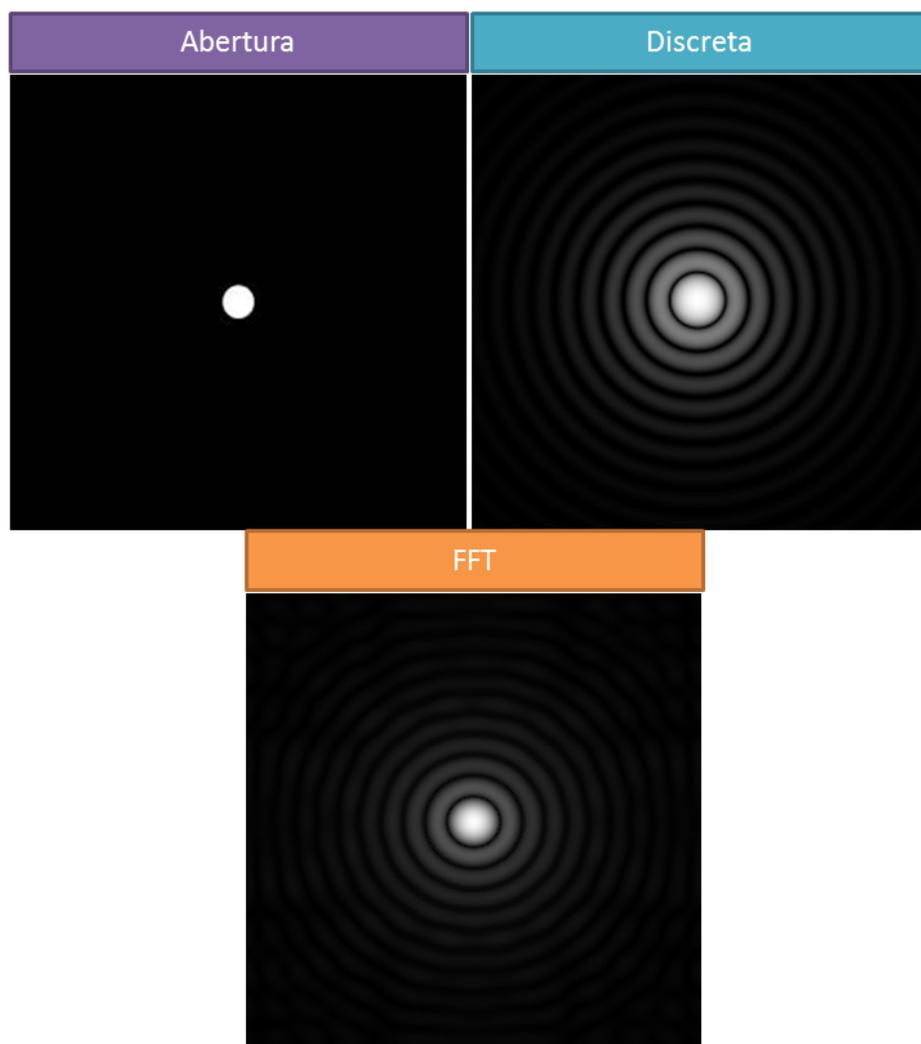


Figura 2.15: Patrones de difracción obtenidos numéricamente mediante la transformada de Fourier discreta y transformada de Fourier rápida de una abertura a) circular.

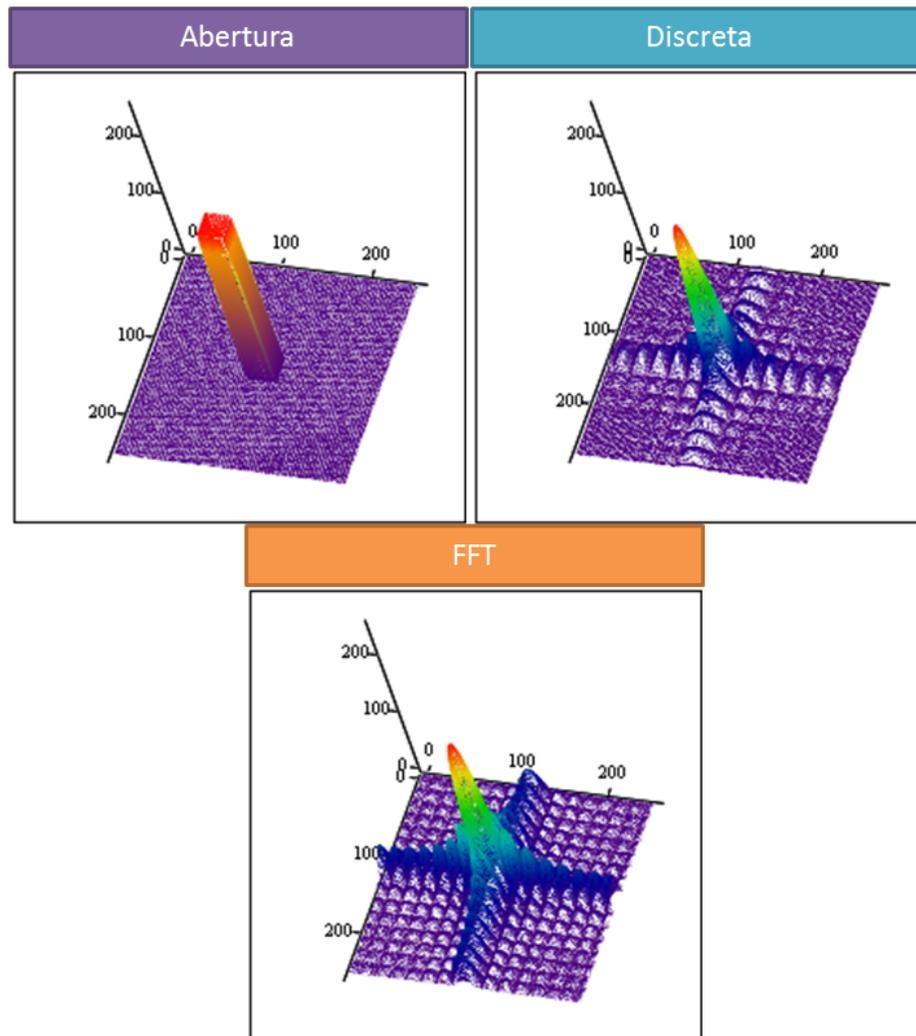


Figura 2.16: Gráficas en 3D de a) la abertura cuadrada y sus correspondientes patrones de difracción con la Transformada de Fourier Discreta y la FFT .

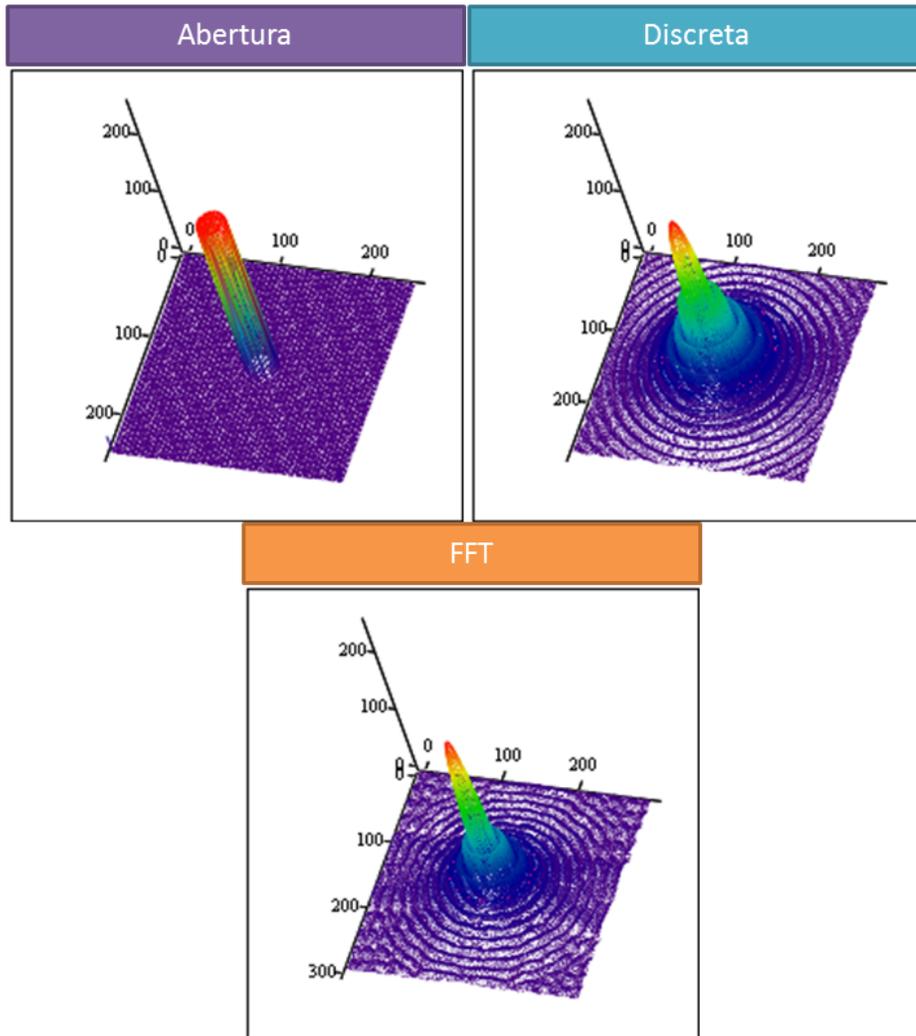


Figura 2.17: Gráficas en 3D de la a) abertura circular y sus correspondientes patrones de difracción con la Transformada de Fourier Discreta y la FFT .

## Capítulo 3

# Interferogramas de doble haz

### 3.1. Introducción

Las técnicas de imagen convencional tales como la fotografía, que registran exclusivamente la distribución de intensidad en la escena, pierden la información de los caminos ópticos que la luz recorre en las diferentes partes de la escena. La principal característica de la holografía es la idea de grabar tanto la fase como la amplitud de las ondas de luz que provienen de un objeto. Debido a que todos los materiales de registro responden solo a la intensidad de la imagen, es necesario convertir la información de fase a partir de variaciones de intensidad.

La holografía es una técnica que produce una imagen tridimensional de los objetos, en donde toda la información procedente de la escena, incluyendo su profundidad, ha sido registrada en un medio fotosensible de alta sensibilidad. La amplitud y la fase del frente de onda luminoso que se refleja en los objetos, se reconstruye después para visualizar el holograma, de esta manera, en condiciones ideales, el campo de luz resultante no se distinguiría del original.

El proceso para la recuperación de la amplitud y fase del objeto, se divide en dos etapas [20]. La primer etapa es el grabado del patrón de interferencia, denominado también distribución de intensidades o *filtro holográfico*. La segunda etapa se denomina *reconstrucción del campo óptico difractado*, por medio del fenómeno de difracción de la luz que sucede cuando ésta atravieza el filtro holográfico que fué grabado en la primera etapa.

El concepto de Holografía digital se refiere al proceso híbrido óptico - digital de creación de un holograma [21]. Un haz colimado, denominado de referencia y el haz objeto interfieren en la superficie de una CCD. El filtro holográfico resultante es electrónicamente grabado y almacenado. El objeto generalmente es un cuerpo tridimensional con una superficie reflejante difusa, localizado a una distancia  $d$  de la CCD recuperado mediante un algoritmo digital.

### 3.2. Teoría de la Interferencia

El fenómeno de las ondas es descrito por la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial de segundo orden y se obtiene el principio de superposición. En un punto donde dos o más campos eléctricos se superponen, la intensidad del campo eléctrico  $E$  es la suma vectorial de las perturbaciones constituyentes [22].

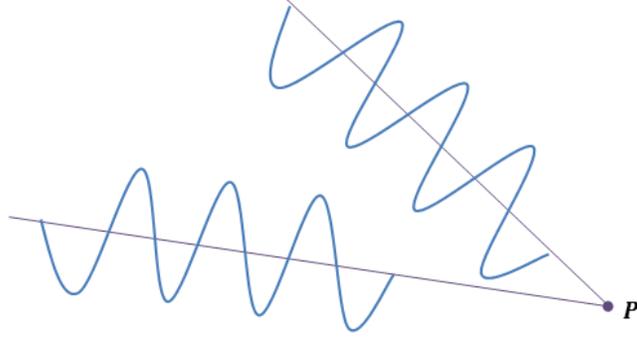


Figura 3.1: Principio de superposición de ondas

Sean dos disturbios ópticos complejos  $E_1$  y  $E_2$  que se superponen en un punto  $P$

$$E_1 = E_{01}e^{i\varphi_1}, \quad (3.1)$$

$$E_2 = E_{02}e^{i\varphi_2}, \quad (3.2)$$

El campo resultante es

$$E_P = E_1 + E_2, \quad (3.3)$$

$$E_P = E_{01}e^{i\varphi_1} + E_{02}e^{i\varphi_2}. \quad (3.4)$$

Al calcular su intensidad tenemos

$$I = |E_P|^2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^*, \quad (3.5)$$

$$= (E_{01}e^{i\varphi_1} + E_{02}e^{i\varphi_2})(E_{01}e^{i\varphi_1} + E_{02}e^{i\varphi_2})^*,$$

$$= (E_{01}e^{i\varphi_1} + E_{02}e^{i\varphi_2})(E_{01}^*e^{-i\varphi_1} + E_{02}^*e^{-i\varphi_2}),$$

$$= E_{01}e^{i\varphi_1}E_{01}^*e^{-i\varphi_1} + E_{01}e^{i\varphi_1}E_{02}^*e^{-i\varphi_2} +$$

$$E_{01}^*e^{-i\varphi_1}E_{02}e^{i\varphi_2} + E_{02}e^{i\varphi_2}E_{02}^*e^{-i\varphi_2}. \quad (3.6)$$

En donde se ha considerado el hecho de que  $|z|^2 = (z)(z^*)$ . Si  $E_{01} = E_{01}^*$ ,  $E_{02} = E_{02}^*$

entonces,

$$\begin{aligned}
 I &= E_{01}^2 e^{i\varphi_1 - i\varphi_1} + E_{01}E_{02}e^{(i\varphi_1 - i\varphi_2)} + \\
 &\quad E_{01}E_{02}e^{(-i\varphi_1 + i\varphi_2)} + E_{02}^2 e^{(i\varphi_2 - i\varphi_2)}, \\
 &= E_{01}^2 + E_{01}E_{02} \left( e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) + E_{02}^2, \\
 &= E_{01}^2 + E_{01}E_{02} (2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + E_{02}^2, \\
 &= E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{02}^2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como  $I_1 = E_{01}^2$  ,  $I_2 = E_{02}^2$  entonces,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi), \tag{3.8}$$

donde  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , es llamada diferencia de fase.

En varios puntos del espacio, la irradiancia resultante puede ser mayor, menor o igual a  $I_1 + I_2$  dependiendo del valor del término de interferencia  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$ , si

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \tag{3.9}$$

entonces tenemos un **máximo de interferencia** cuando  $\cos(\Delta\varphi) = 1$ . Se le denomina **interferencia constructiva** cuando  $\Delta\varphi = 2n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Se le denomina **interferencia**

**destructiva** cuando  $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , si

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2},$$

entonces tenemos un **mínimo de interferencia** cuando  $\cos(\Delta\varphi) = -1$ .

Un caso especial de interferencia se da cuando las amplitudes de ambas ondas que alcanzan al punto P son iguales,  $E_{01} = E_{02}$ . Puesto que las contribuciones de la irradiancia de ambas fuentes son iguales, entonces  $I_1 = I_2 = I_0$ . La Ec(3.9) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 I(\Delta\varphi) &= 2I_0 (1 + \cos \Delta\varphi), \\
 I(\Delta\varphi) &= 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como se observa en la gráfica de la fig.3.2, las zonas claras y oscuras que se ven en una pantalla colocada en la región de interferencia se denominan franjas de interferencia.

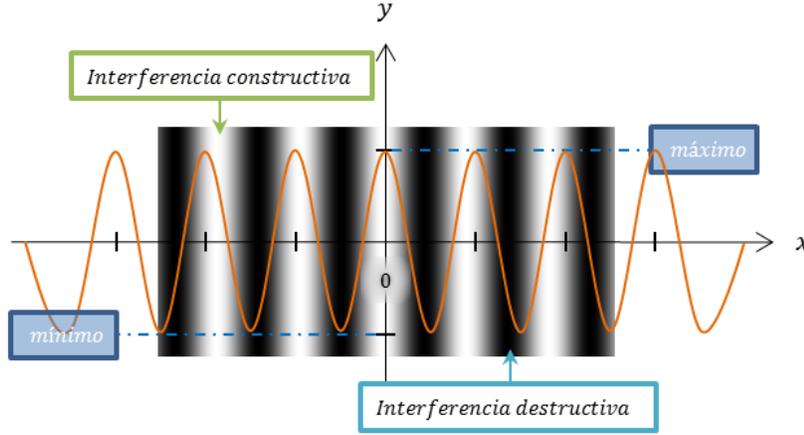


Figura 3.2: Franjas de interferencia

### 3.3. Interferometría de división de frente de onda

#### 3.3.1. Interferómetro de Young

Considerando una onda plana cuasimonocromática que ilumina una rendija larga y estrecha. De esa rendija primaria, la luz se difractará hacia delante y emergerá una onda cilíndrica que incidirá en dos rendijas  $S_1$  y  $S_2$  muy juntas, estrechas y paralelas, tal y como se muestra en la fig.3.3. Cuando existe simetría (el eje óptico corta en partes iguales al plano de las rendijas), los segmentos del frente de onda primario que llegan a las dos rendijas estarán en fase y las rendijas constituirán dos fuentes secundarias coherentes. Es de suponer que donde quiera que las ondas procedentes de  $S_1$  y  $S_2$  se superpongan, se producirá interferencia.

En una situación física, la distancia entre cada una de las pantallas ( $\Sigma_a$  y  $\Sigma_0$ ) sería muy ancha comparada con la distancia  $a$  entre las dos rendijas, y todas las franjas estarían bastante cerca del centro  $O$  de la pantalla  $\Sigma_0$ . La diferencia de camino óptico entre los rayos a lo largo de  $\overline{S_1P}$  y  $\overline{S_2P}$  puede calcularse, con una aproximación, trazando una perpendicular desde  $S_2$  hasta el segmento  $\overline{S_1P}$ . Esta diferencia de camino viene dada por

$$(\overline{S_1B}) = (\overline{S_1P}) - (\overline{S_2P}), \quad (3.11)$$

$$(\overline{S_1B}) = r_1 - r_2, \quad (3.12)$$

Continuando con esta aproximación

$$\text{sen}\theta \approx \frac{r_1 - r_2}{a}, \quad (3.13)$$

$$r_1 - r_2 \approx a \text{sen}\theta, \quad (3.14)$$

puesto que  $\text{sen}\theta \approx \theta$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  y por lo tanto

$$r_1 - r_2 \approx a\theta. \quad (3.15)$$

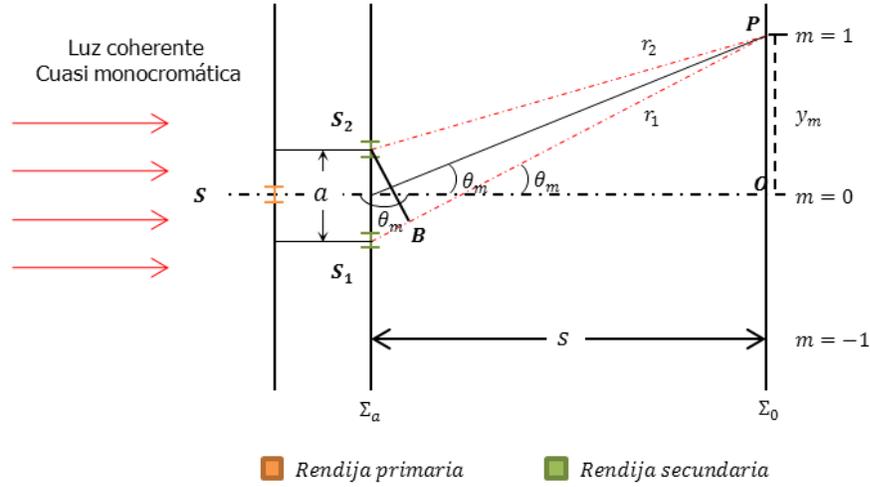


Figura 3.3: Esquema de un interferómetro por división de frente de onda

También como  $\tan \theta \approx \theta$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ ,

$$\tan \theta \approx \frac{y_m}{s}, \quad (3.16)$$

Obsérvese que

$$\theta \approx \frac{y_m}{s}, \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$r_1 - r_2 \approx \frac{a}{s} y_m. \quad (3.18)$$

De acuerdo con la sección anterior, la interferencia constructiva ocurrirá cuando

$$r_1 - r_2 = m\lambda. \quad (3.19)$$

Entonces, de las dos últimas relaciones obtenemos

$$y_m \approx \frac{s}{a} m\lambda. \quad (3.20)$$

Esto proporciona la posición de la  $m$ -ésima franja brillante en la pantalla si consideramos el máximo en el origen como la franja cero. La posición angular de la franja se obtiene sustituyendo la última expresión en la Ec(3.17), de tal manera que

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a}. \quad (3.21)$$

Esta relación puede obtenerse directamente inspeccionando la fig. 3.3. Para el máximo de interferencia de orden  $m$ -ésimo,  $m$  longitudes de onda enteras deberían caber dentro de

la distancia  $r_1 - r_2$ . Por consiguiente, del triángulo  $S_1S_2B$ ,

$$a \sin \theta_m = m\lambda, \quad (3.22)$$

$$\theta_m \approx \frac{m\lambda}{a}. \quad (3.23)$$

El espacio entre las franjas en la pantalla puede obtenerse de la Ec(3.20). La diferencia en las posiciones de dos máximos consecutivos es

$$y_{m+1} - y_m \approx \frac{s}{a} (m+1)\lambda - \frac{s}{a} m\lambda, \quad (3.24)$$

$$\Delta y \approx \frac{s}{a} \lambda. \quad (3.25)$$

Ya que este patrón es equivalente al obtenido para dos ondas esféricas superpuestas, se puede aplicar la Ec(3.10). Utilizando la diferencia de fase

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2), \quad (3.26)$$

$$= k (r_1 - r_2). \quad (3.27)$$

La Ec(3.10) se puede reescribir como

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k (r_1 - r_2)}{2}, \quad (3.28)$$

siempre que los dos haces sean coherentes y tengan iguales irradiancias  $I_0$ . Cuando

$$r_1 - r_2 \approx \frac{ya}{s}, \quad (3.29)$$

la irradiancia se convierte en

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda}. \quad (3.30)$$

Como se muestra en la gráfica de la fig.3.4, los máximos consecutivos están separados por  $\Delta y$ . Al suponer que cada rendija tiene un ancho infinitesimal, las franjas que se muestran en esta figura son una hipótesis imposible de lograr. La distribución real reduciría las distancias a ambos lados de  $O$  a causa de la difracción.

La franja central brillante, equidistante de las dos fuentes, es la denominada franja de orden cero ( $m = 0$ ) que está entre los mínimos  $m' = \pm 1$  y a su vez, éstos están acotados por los máximos de primer orden ( $m = \pm 1$ ).

Dos rendijas estrechas generarán un gran número de franjas perfectamente superpuestas, aumentando así la irradiancia y dejando a la región central de la distribución de dos fuentes puntuales prácticamente inalterada.

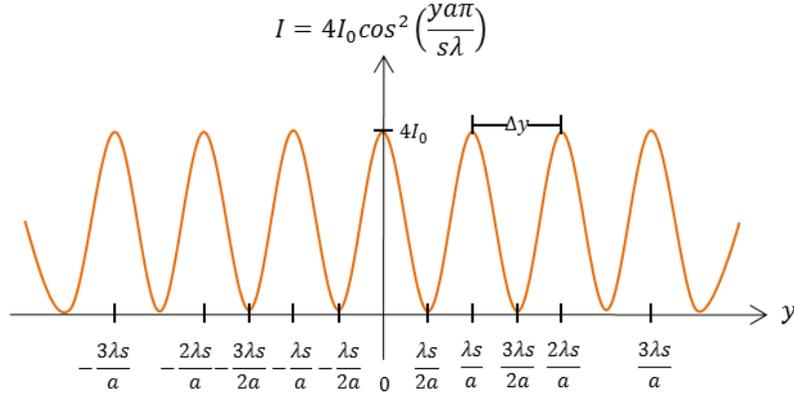


Figura 3.4: Gráfica de la expresión  $I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda}$

### 3.3.2. Experimento de la doble rendija

Sea el sistema de la doble rendija [23] de la fig. 3.6. Asumiendo que la luz incide sobre la pantalla  $\Gamma$ , a partir de una fuente de luz coherente monocromática de longitud de onda  $\lambda$ . Después de haber sido difractada por las rendijas localizadas en las posiciones  $b$  y  $-b$ , y de ancho  $2a$ , la luz es colectada por una lente convergente y concentrada en el punto focal  $F$ . La longitud focal de la lente es  $f$ .

Las aberturas difractadas se pueden representar individualmente en 1-D como

$$f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right), \quad (3.31)$$

y la función del arreglo es

$$g(x) = \delta(x + b) + \delta(x - b). \quad (3.32)$$

Ahora se propone a la función  $t(x)$  como función de transmitancia de la doble rendija, definida como

$$t(x) = f(x) \otimes g(x), \quad (3.33)$$

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right) \otimes \{\delta(x + b) + \delta(x - b)\}, \quad (3.34)$$

en donde  $\otimes$  es la operación de convolución entre dos funciones. Una gráfica de esta función en 1-D se representa esquemáticamente en la fig. 3.7.

La transformada de Fourier de la función de transmitancia  $\mathfrak{F}\{t(x)\}$  representa el patrón de difracción de Fraunhofer o de campo lejano, colocado en el punto focal de la lente convergente, esto es,

$$\mathfrak{F}\{t(x)\} = \mathfrak{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)\right\} \otimes \mathfrak{F}\{\delta(x + b) + \delta(x - b)\}. \quad (3.35)$$

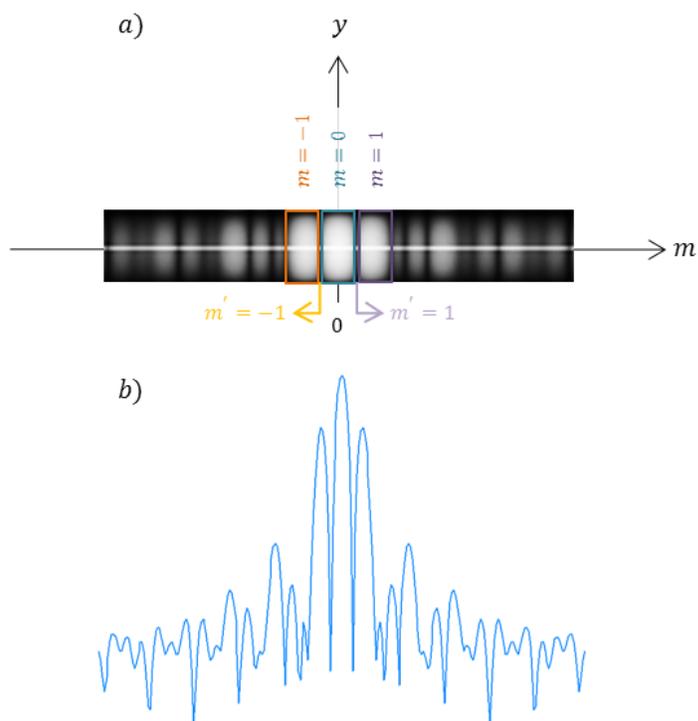


Figura 3.5: a) Patrón de interferencia que presenta modulación debido a la difracción de la luz en las rendijas. b) Gráfica.

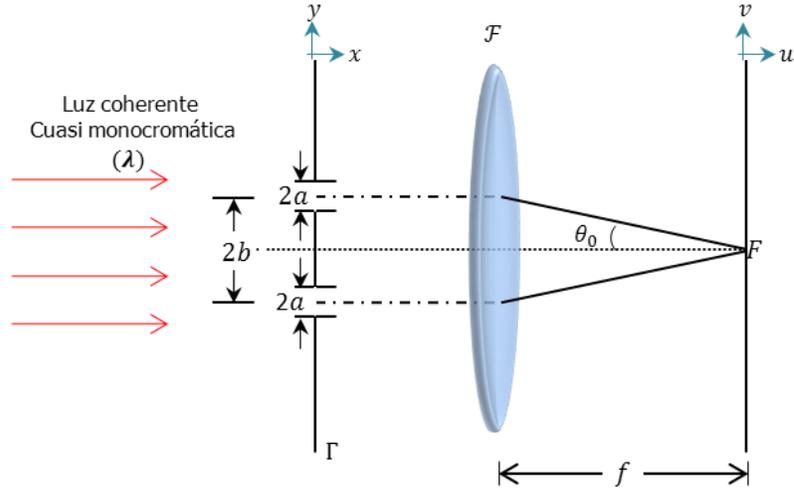


Figura 3.6: Sistema de doble rendija

En donde se ha usado el teorema de la convolución de Fourier. Calculando las transformadas por separado, para la función del arreglo, se tiene que

$$\mathfrak{F} \{ \delta(x+b) + \delta(x-b) \} = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x+b) + \delta(x-b)] e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} xu} dx, \quad (3.36)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+b) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} xu} du + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} xu} dx, \quad (3.37)$$

$$= e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} bu} + e^{\frac{i2\pi}{\lambda f} bu}, \quad (3.38)$$

$$= 2 \cos \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right). \quad (3.39)$$

Sabemos de la sección 2.3.2 que

$$\mathfrak{F} \left\{ \text{rect} \left( \frac{x}{2a} \right) \right\} = 2a \text{sinc} \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right). \quad (3.40)$$

La transformada de Fourier de la función de transmitancia resulta ser

$$T(u) = 4a \text{sinc} \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \cos \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right). \quad (3.41)$$

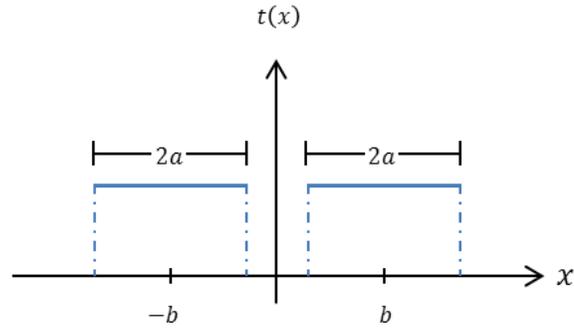
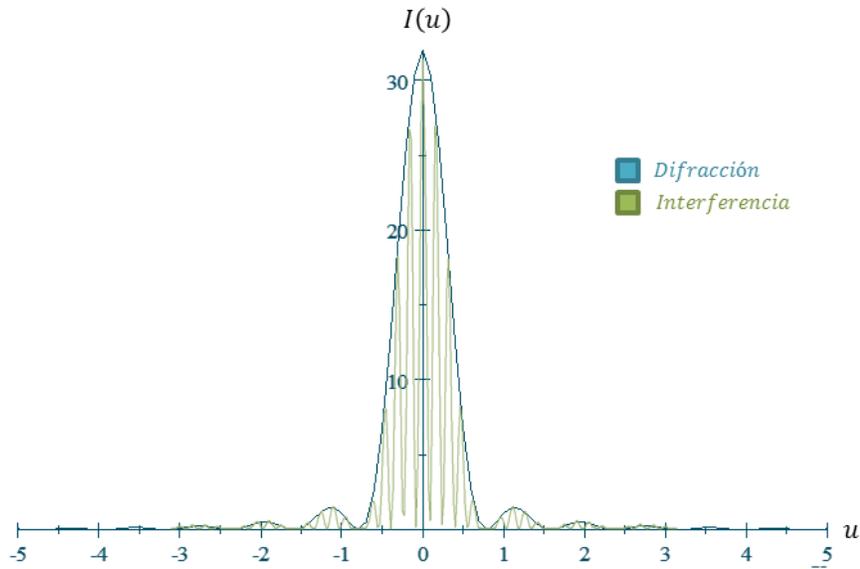


Figura 3.7: Geometría de la difracción para una doble rendija

Se obtiene el patrón de intensidades  $I(u) = |T(u)|^2$

$$I(u) = 16a^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \cos^2 \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right), \quad (3.42)$$

donde  $2a$  es el ancho de cada abertura,  $2b$  es la separación de las aberturas,  $f$  es la longitud focal de la lente. En la fig. 3.8 se presenta la gráfica del patrón de intensidades obtenido. Se puede ver claramente que se trata de interferencia modulada por difracción.

Figura 3.8: Gráfica de la expresión  $I(u) = 16a^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \cos^2 \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right)$ 

Un interferograma puede ser recuperado grabando fotográficamente la intensidad  $I(u)$ . Si el patrón de intensidades se coloca a una distancia  $d$  frente a una lente de longitud focal

$f$ , entonces a partir de un factor cuadrático de fase, la distribución de amplitud en el plano focal posterior de la lente está dado por

$$g(x) = \int I(u) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} xu} du. \quad (3.43)$$

Un esquema del sistema óptico para recuperar la distribución de amplitud  $g(x)$  a partir del interferograma previamente grabado, se muestra en la fig.3.9.

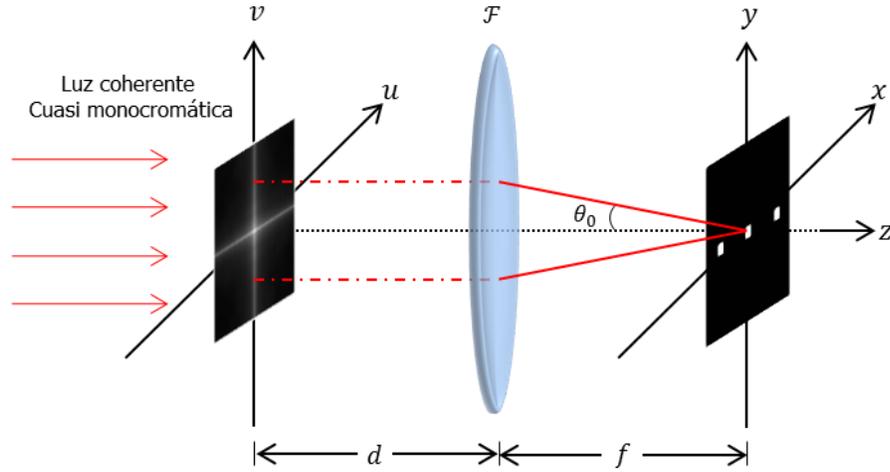


Figura 3.9: Arreglo óptico para la recuperación de intensidades

Sustituyendo la Ec(3.42) en la Ec(3.43) y desarrollando términos tenemos,

$$g(x) = \int 16a^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \cos^2 \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} xu} du, \quad (3.44)$$

Como se observa en esta última expresión, se tiene la transformada del producto de dos funciones. Por el teorema de la convolución, esto es igual a la convolución de sus transformadas, esto es,

$$g(x) = 16a^2 \mathfrak{F} \left\{ \sin^2 \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right\} \otimes \mathfrak{F} \left\{ \cos^2 \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right) \right\}. \quad (3.45)$$

Sabemos que [19]

$$\mathfrak{F} \left\{ \sin^2 \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right\} = \Delta \left( \frac{x}{2a} \right). \quad (3.46)$$

en donde  $\Delta \left( \frac{x}{2a} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{|x|}{2a}; & |x| < 2a \\ 0; & \text{otra forma} \end{array} \right\}$ .

Utilizando la identidad que  $\cos^2 A = \frac{\cos^2(A+1)}{2}$

$$g(x) = 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \Im \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi 2bu}{\lambda f} \right) \right\}, \quad (3.47)$$

$$= 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \Im \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \Im \left\{ \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi 2bu}{\lambda f} \right) \right\} \right], \quad (3.48)$$

$$= 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \Im \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2} \Im \left\{ \cos \left( \frac{2\pi 2bu}{\lambda f} \right) \right\} \right], \quad (3.49)$$

por el teorema de Euler

$$g(x) = 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \Im \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2} \Im \left\{ \frac{e^{i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u} + e^{-i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u}}{2} \right\} \right], \quad (3.50)$$

$$= 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \Im \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{4} \Im \left\{ e^{i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u} + e^{-i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u} \right\} \right], \quad (3.51)$$

$$= 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \Im \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{4} \Im \left\{ e^{i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u} \right\} + \frac{1}{4} \Im \left\{ e^{-i\frac{2\pi 2b}{\lambda f}u} \right\} \right], \quad (3.52)$$

obteniendo entonces

$$g(x) = 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \left[ \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{4} \delta(x-2b) + \frac{1}{4} \delta(x+2b) \right], \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \frac{1}{2} \delta(x) \right] + \left[ 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \frac{1}{4} \delta(x-2b) \right] \\ &\quad + \left[ 16a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) \otimes \frac{1}{4} \delta(x+2b) \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$g(x) = 8a^2 \Delta \left( \frac{x}{2a} \right) + 4a^2 \Delta \left( \frac{x-2b}{2a} \right) + 4a^2 \Delta \left( \frac{x+2b}{2a} \right), \quad (3.55)$$

En la fig. 3.10 se muestra una gráfica de la recuperación del interferograma.

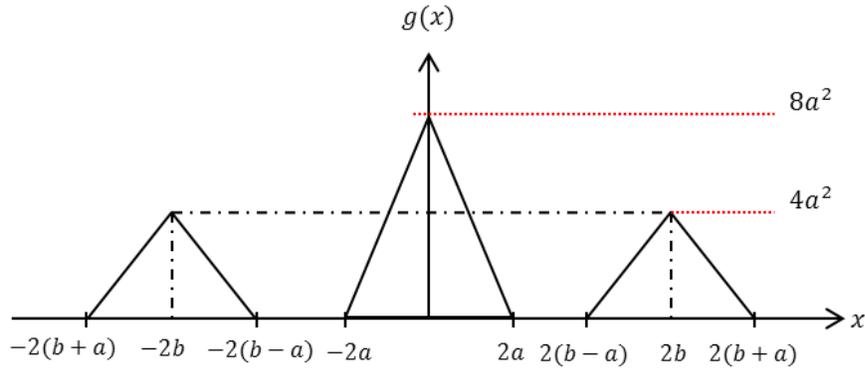
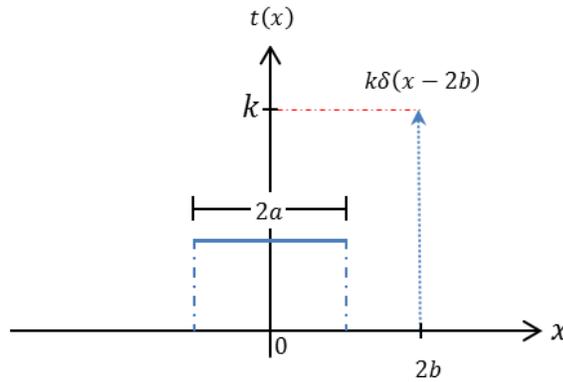


Figura 3.10: Transformada de Fourier del interferograma de doble rendija

### 3.4. Holografía de Fourier

Si una de las rendijas del desarrollo anterior es desplazada a una posición  $2b$  relativa al eje óptico y reducida a una función delta [23], como se muestra en la fig.3.4, mientras la otra permanece sin cambios en el origen, entonces la función de transmitancia de las rendijas se describe como

$$t(x) = k\delta(x - 2b) + \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right). \quad (3.56)$$



Esquema de la distribución de las rendijas

Obteniendo la transformada de Fourier de la función de transmitancia

$$\mathfrak{F}\{t(x)\} = \mathfrak{F}\{k\delta(x - 2b)\} + \mathfrak{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)\right\}, \quad (3.57)$$

$$T(u) = ke^{-\frac{i2\pi}{\lambda f}bu} + 2a \text{sinc}\left(\frac{2\pi au}{\lambda f}\right). \quad (3.58)$$

Entonces la distribución de Intensidades en el plano focal de la lente es

$$I(x) = \left| ke^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2a \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right|^2, \quad (3.59)$$

$$= \left[ ke^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2a \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right] \times \left[ ke^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2a \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right]^* \quad (3.60)$$

$$= \left[ ke^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2a \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right] \times \left[ k^* e^{\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2a \sin c^* \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \right], \quad (3.61)$$

como  $k^* = k$ ,  $\sin c^* \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) = \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right)$  entonces

$$I(x) = k^2 e^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f} + \frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + 2ake^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) + 2ake^{\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) + 4a^2 \sin^2 c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right), \quad (3.62)$$

$$= k^2 + 2ak \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \left[ e^{-\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} + e^{\frac{i2\pi bu}{\lambda f}} \right] + 4a^2 \sin^2 c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right), \quad (3.63)$$

$$I(x) = k^2 + 4ak \sin c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right) \cos \left( \frac{2\pi bu}{\lambda f} \right) + 4a^2 \sin^2 c \left( \frac{2\pi au}{\lambda f} \right). \quad (3.64)$$

Si esta distribución de intensidad se graba en una película o en forma digital y es procesada linealmente utilizando el sistema de reconstrucción de la fig.3.9, se obtiene una distribución de amplitud en el plano  $(x, y)$ , dada por

$$g(x) = \Im \{ I(x) \}, \quad (3.65)$$

$$g(x) = k^2 \delta(x) + k \operatorname{rect} \left( x \pm \frac{2b}{a} \right) + \Delta \left( \frac{x}{2a} \right). \quad (3.66)$$

Esta última expresión presenta franjas de interferencia moduladas por difracción como se puede observar en la gráfica 3D de la fig.3.11. La expresión para  $I(x)$  es denominada filtro holográfico de tipo Fourier.

Como se muestra en la fig. 3.12, en la posición  $x = \pm 2b$ , una imagen de la rendija original es reconstruida. En este caso, la luz que emana del punto de referencia  $\delta(x-2b)$  en la Ec(3.56) se comporta como un punto de referencia para el interferograma descrito en la Ec(3.64). Si la energía de la fuente puntual es lo suficientemente intensa para desviar las porciones negativas de la función *sinc*, entonces el interferograma de la Ec(3.64) es equivalente a un holograma.

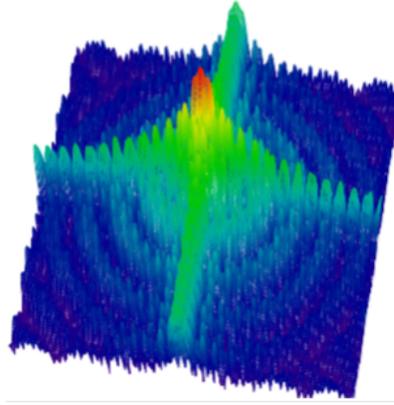


Figura 3.11: Filtro Holográfico de la función de transmitancia  $t(x) = k\delta(x - 2b) + \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)$ .

Esto significa que toda la información del objeto se preserva en el grabado. La onda de referencia debe desviar el patrón de difracción de manera que la información de fase del patrón de difracción no sea destruida.

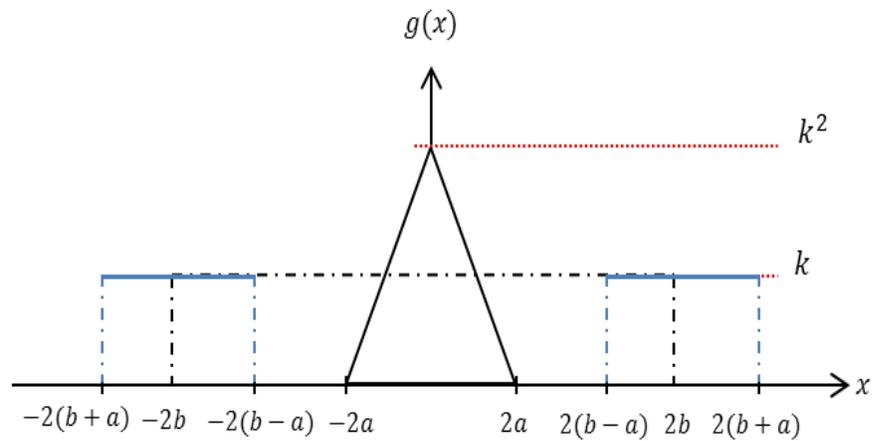


Figura 3.12: Esquema de la reconstrucción de la rendija

El proceso de grabado puede ser demostrado reconstruyendo un interferograma de doble rendija de Young.

### 3.5. Reconstrucción por la aproximación de Fresnel

En la reconstrucción óptica, una imagen virtual aparece en la posición del objeto original y la imagen real se forma a una misma distancia, pero en dirección opuesta de la pantalla de cristal líquido (Liquid Crystal Display, LCD).

La difracción de la luz a través de una abertura (en este caso el filtro) colocado perpendicularmente al haz de luz se describe por la integral de Fresnel-Kirchhoff Ec(2.14). La fórmula de reconstrucción utilizando la aproximación de Fresnel, puede ser discretizada si la función del filtro  $U(x, y)$  es muestreada en una matriz de  $N \times N$  puntos, con pasos de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  sobre las coordenadas. Donde  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las distancias entre los pixeles vecinos de la LCD en las direcciones horizontal y vertical. Con estos valores discretos, la integral de la Ec(2.14) se convierte a sumas finitas para poder ingresarla al algoritmo digital, quedando de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 U(m, n) &= \frac{ie^{-i\frac{2\pi}{\lambda}d}}{\lambda d} e^{-i\pi\lambda d\left(\frac{m^2}{N^2\Delta x^2} + \frac{n^2}{N^2\Delta y^2}\right)} \\
 &\times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ U(k, l) e^{-i\frac{\pi}{\lambda d}(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)} \right\} e^{i2\pi\left(\frac{km}{N} + \frac{ln}{N}\right)}. \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

Esta es la Transformada de Fresnel discreta, en donde el cálculo puede ser más efectivo utilizando la FFT del producto  $U(k, l) e^{-i\frac{\pi}{\lambda d}(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)}$ . El factor frente a la suma afecta al promedio de la fase y se puede ignorar si solo es de interés la intensidad.

## 3.6. Simulación

### 3.6.1. Teoría de la Interferencia

Se realiza una simulación del fenómeno de la interferencia en Mathcad. A continuación se muestran las imágenes de entrada, el patrón de interferencia calculado a través del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y sus respectivas gráficas en 3D. En las figuras de la 3.14 a la 3.19 se muestran estas simulaciones para diferentes aberturas.

La distancia de separación entre las aberturas en el plano de entrada está relacionada con la separación y cantidad de franjas que se pueden observar de la transformada en el plano de Fourier. Debido al teorema del escalamiento, las dimensiones de la abertura en el plano de entrada, son inversamente proporcionales a las dimensiones de su transformada de Fourier. La visibilidad de las franjas depende de la separación de las aberturas y del ancho de las mismas.

Una gráfica de la visibilidad de las franjas contra el ancho de las aberturas y separación se muestra en la Fig 3.13.

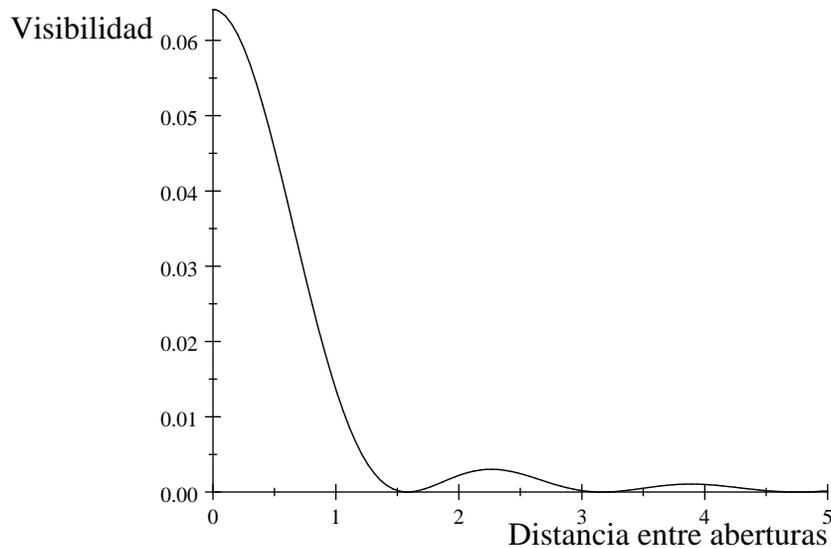


Figura 3.13: Gráfica de la visibilidad de las franjas contra la distancia entre las aberturas

### 3.6.2. Holografía de Fourier

A continuación se generan imágenes de prueba con objetos de  $1\text{cm}^2$ , con una distancia de  $34\mu\text{x}$  entre el objeto y la fuente puntual. En las fig. 3.20 a la fig.3.38 se muestran los objetos de entrada binarios y en escala de grises, se presentan las distribuciones de intensidad de los patrones de difracción de Fraunhofer obtenidos y su recuperación digital en intensidades.

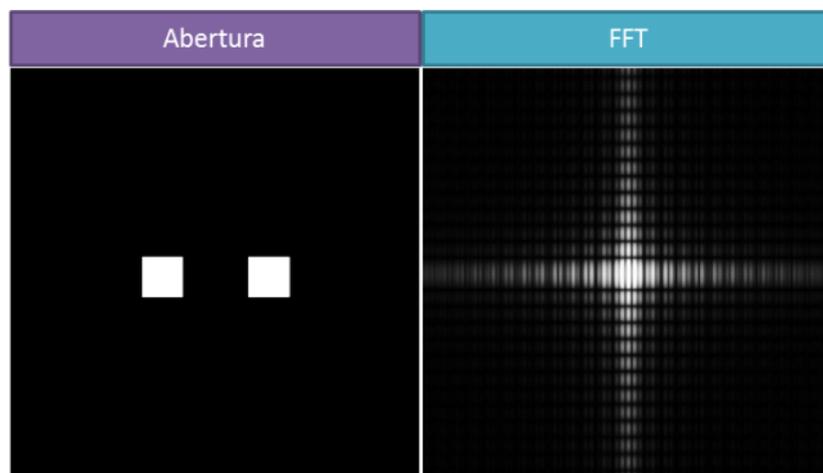


Figura 3.14: Aberturas cuadradas y su correspondiente patrón de interferencia.

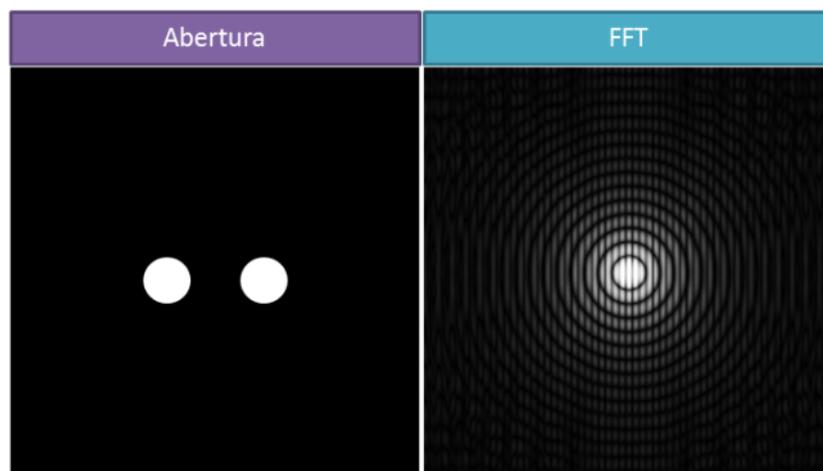


Figura 3.15: Aberturas circulares y su correspondiente patrón de interferencia.

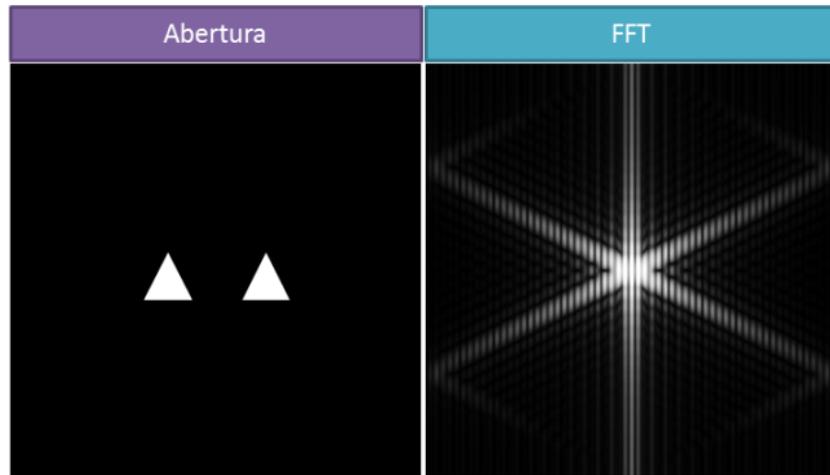


Figura 3.16: Aberturas triangulares y su correspondiente patrón de interferencia.

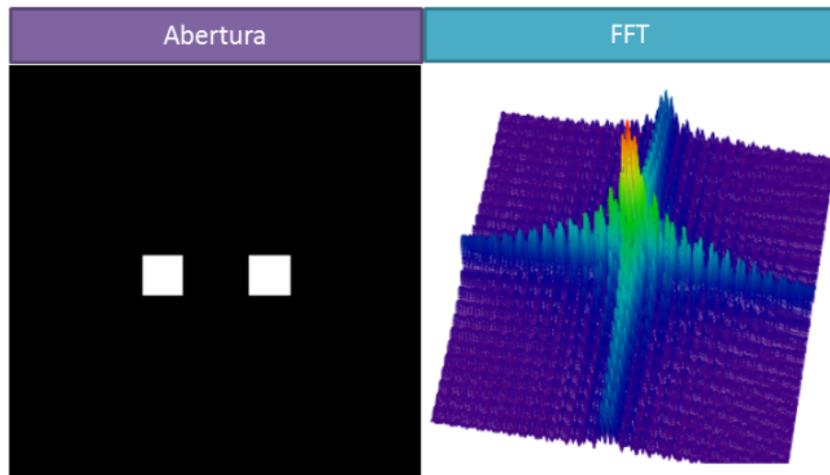


Figura 3.17: Aberturas cuadradas y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción.

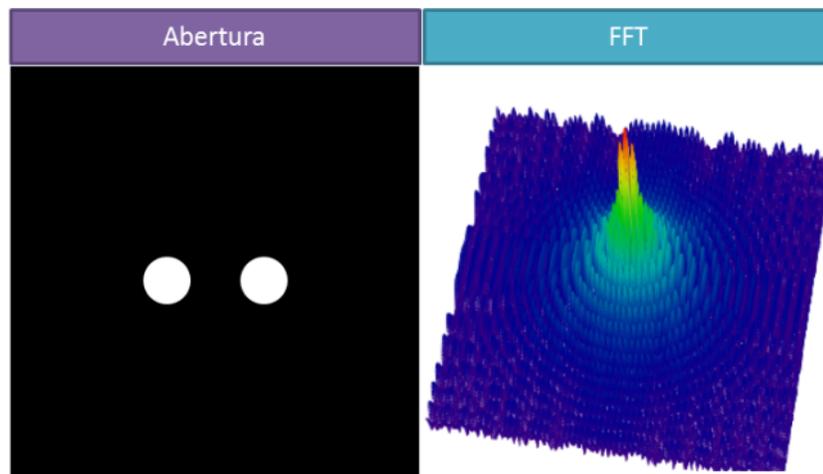


Figura 3.18: Aberturas circulares y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción.

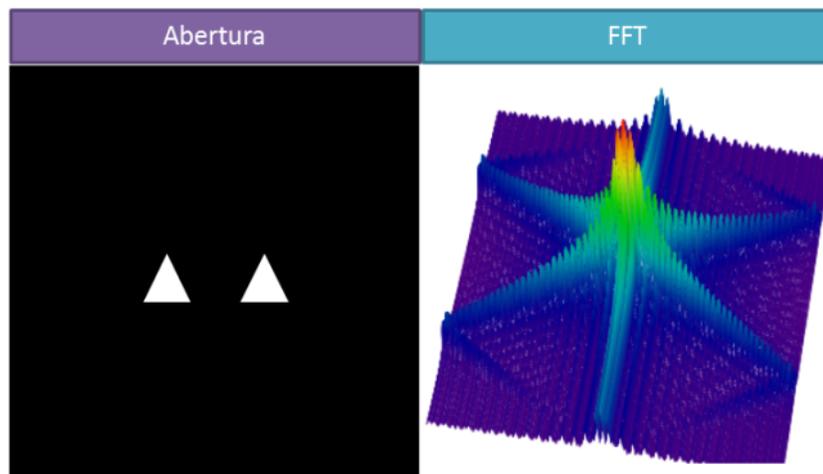


Figura 3.19: Aberturas triangulares y su correspondiente gráfica en 3D de la distribución de intensidades del patrón de difracción.

### 3.6.3. Recuperación por medio de la aproximación de Fresnel

A continuación se presentan los resultados de la simulación de recuperación de intensidades a partir de filtros holográficos tipo Fourier generados con la FFT y ópticamente utilizando una lente convergente.

Llevando a cabo la reconstrucción de la imagen del holograma mediante el algoritmo programado en Mathcad de la integral de difracción de Fresnel, con los parámetros de longitud de onda  $\lambda = 543nm$ , distancia de la cámara CCD al filtro holográfico  $d = 50cm$ , distancias interpixel en dirección horizontal y vertical respectivamente  $\Delta x = 6,45\mu m$  y  $\Delta y = 6,45\mu m$ .

Se puede observar en las fig. 3.39 a la fig. 3.52 que los resultados obtenidos con el algoritmo de reconstrucción de Fresnel, son muy parecidos a los obtenidos por la FFT. Esto es posible debido a que uno de los problemas que se presentan en la técnica de Holografía fuera de eje es la concentración de energía en el plano de grabado del filtro holográfico, ya que la luz se dispersa perdiendo intensidad conforme se propaga por el espacio. Una de las propiedades de los filtros generados por transformación de Fourier, es que la concentración de energía y por lo tanto de información, es máxima, propiciando así una buena reconstrucción de las imágenes holográficas mediante Fresnel.

Una propiedad interesante de la Holografía es que cada parte del filtro holográfico contiene información sobre el objeto entero. La reducción de pixeles efectivos lleva a una pérdida en la resolución de las imágenes reconstruidas. Esto corresponde al aumento del tamaño del speckle debido a la reducción de la abertura en la reconstrucción óptica del holograma. La distancia de los pixeles en la imagen reconstruida dependen de la distancia  $d$  elegida para la reconstrucción numérica. Esto corresponde a la resolución limitada por la difracción de los sistemas ópticos, el filtro holográfico es la abertura del sistema, lo cual se conoce como el algoritmo del escalamiento natural, estableciendo la resolución de la imagen reconstruida por la transformada discreta de Fresnel siempre al límite físico.

En el Apéndice C se presenta la recuperación de intensidades usando la transformada de Fresnel, variando la distancia  $z$  axial.

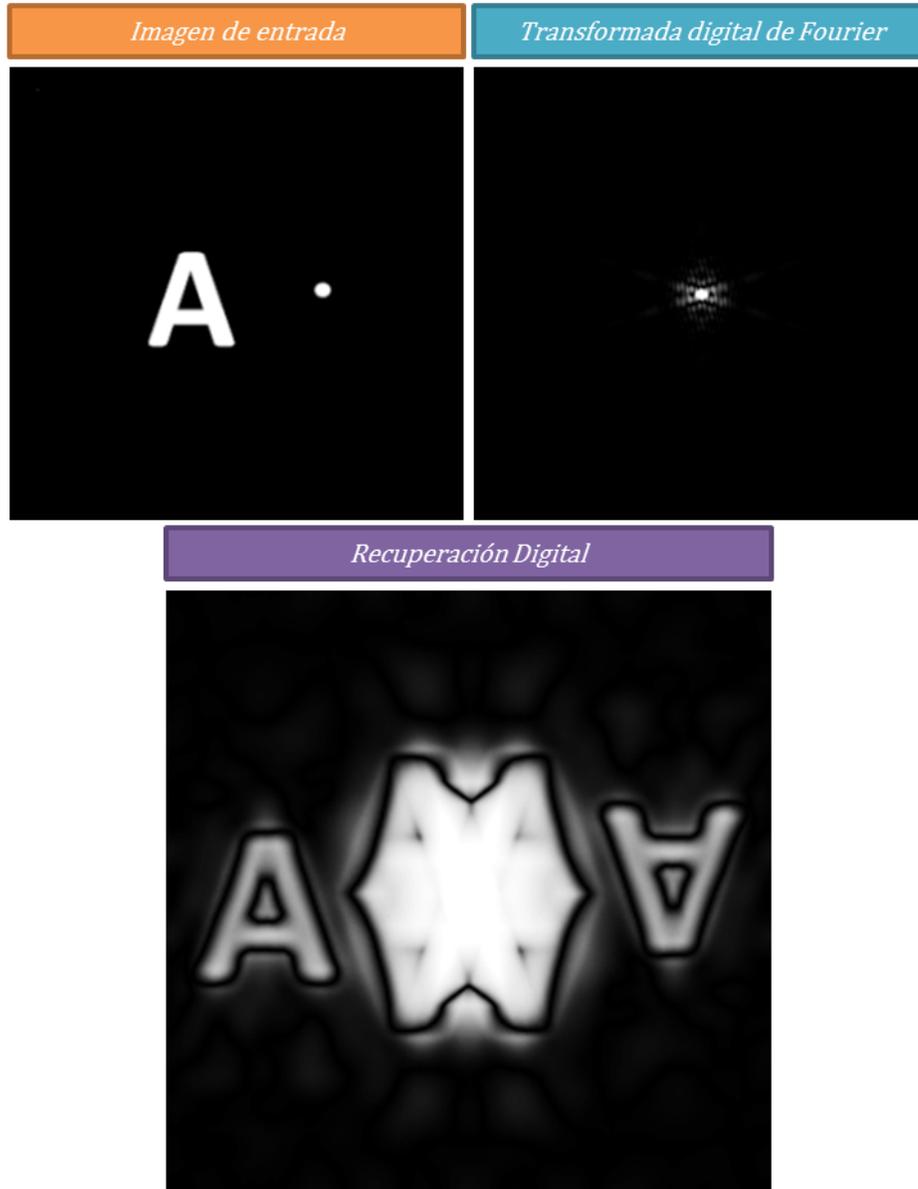


Figura 3.20: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

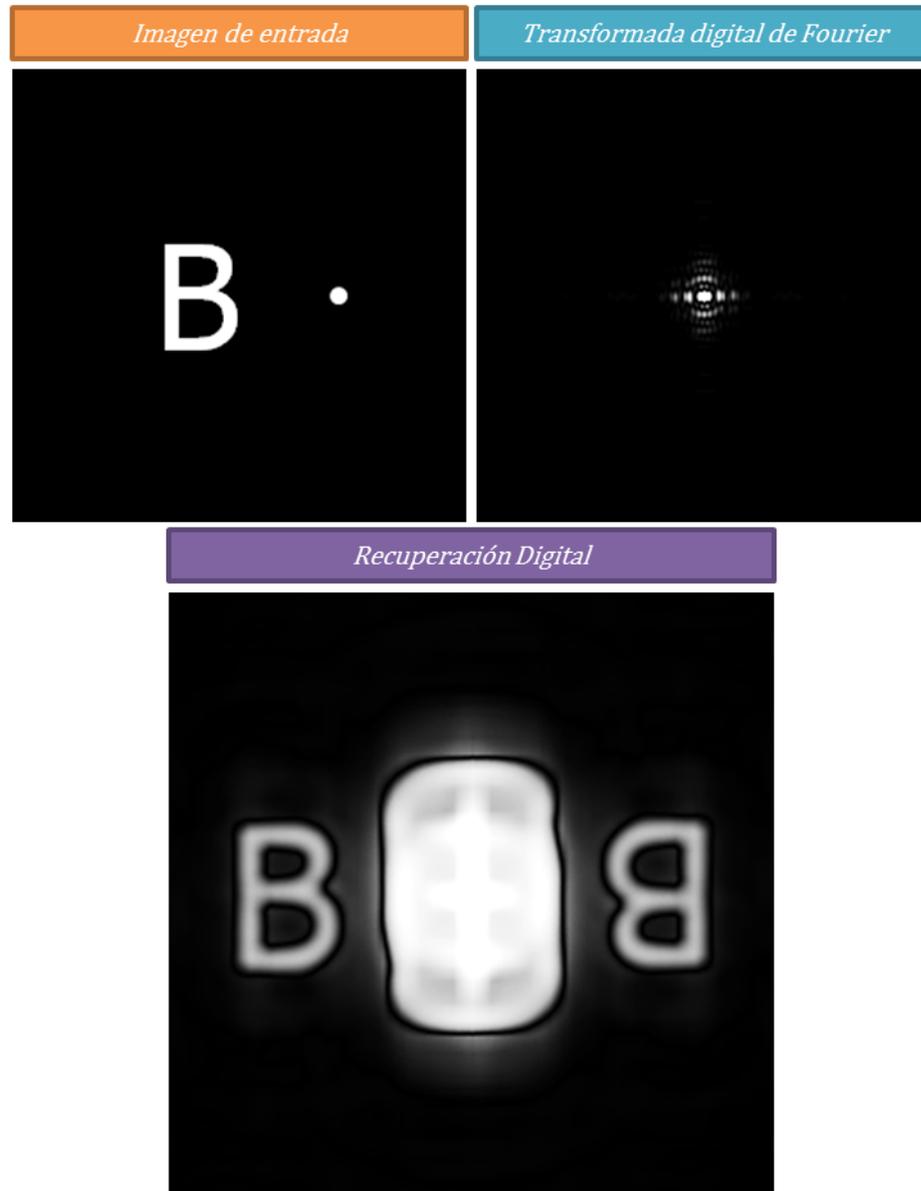


Figura 3.21: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

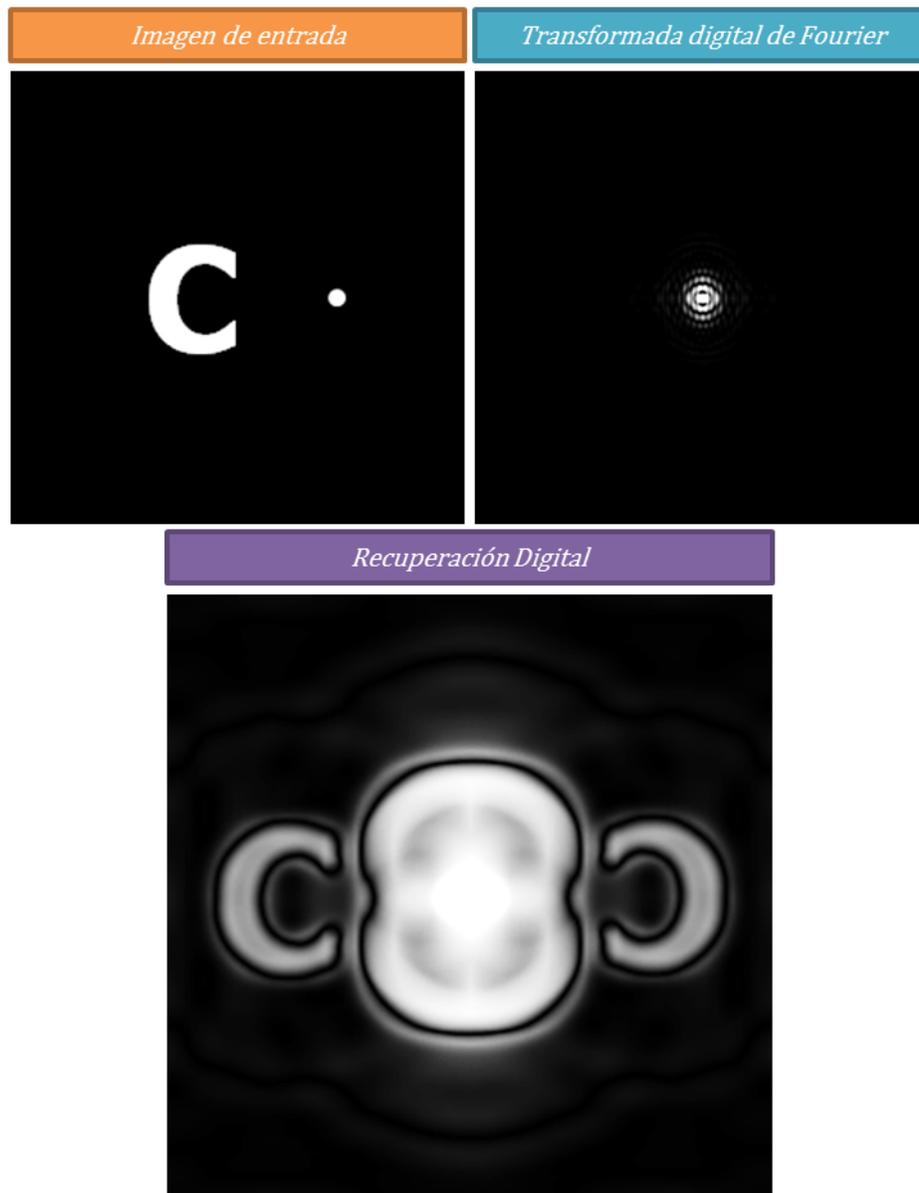


Figura 3.22: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.



Figura 3.23: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

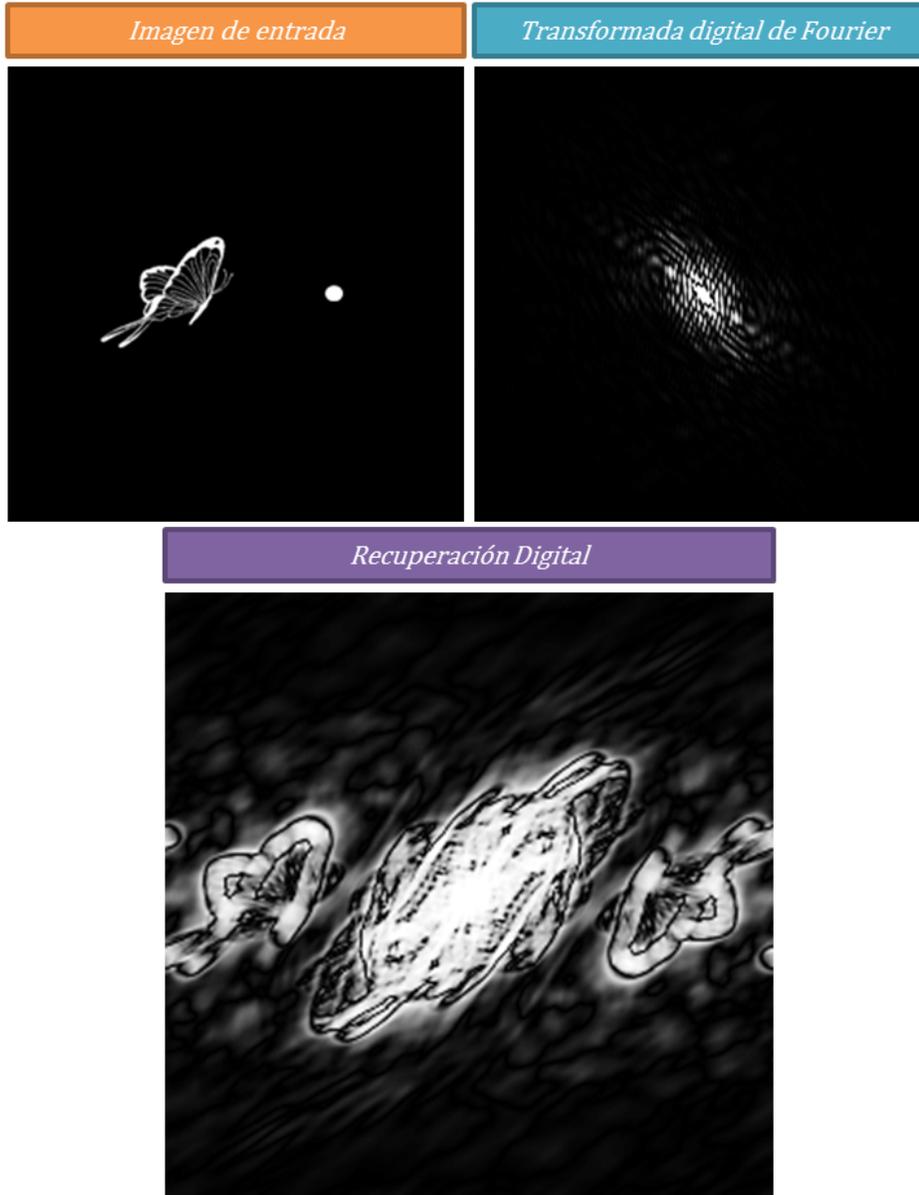


Figura 3.24: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

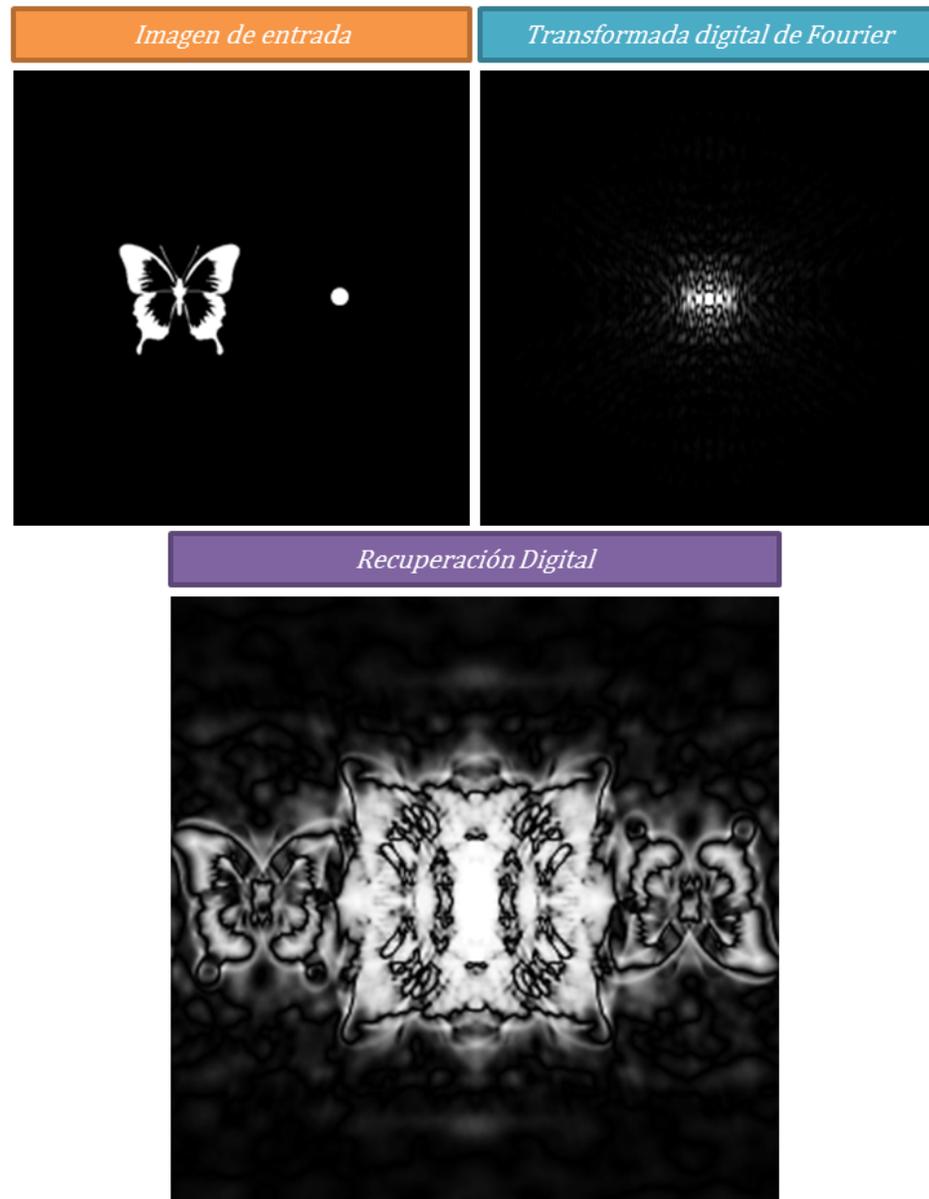


Figura 3.25: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

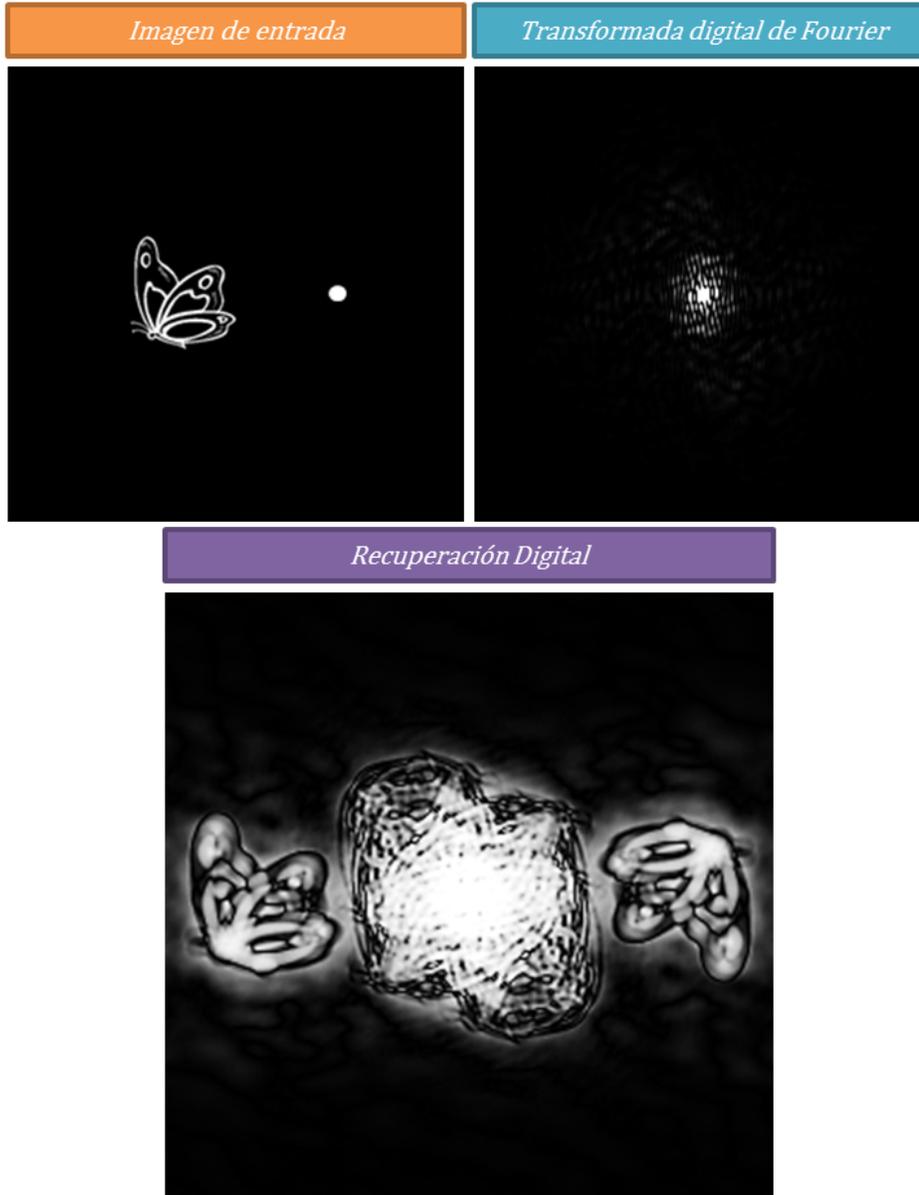


Figura 3.26: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

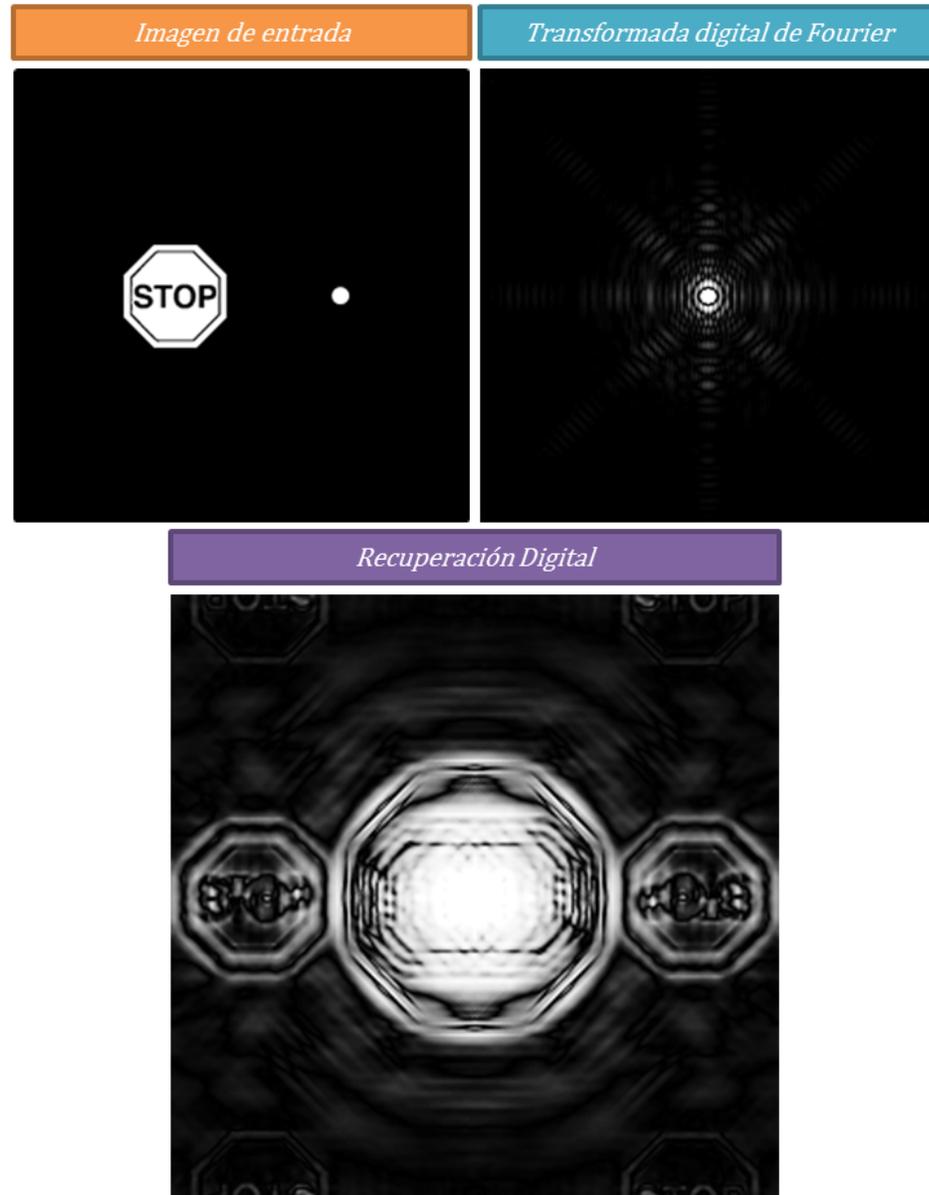


Figura 3.27: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

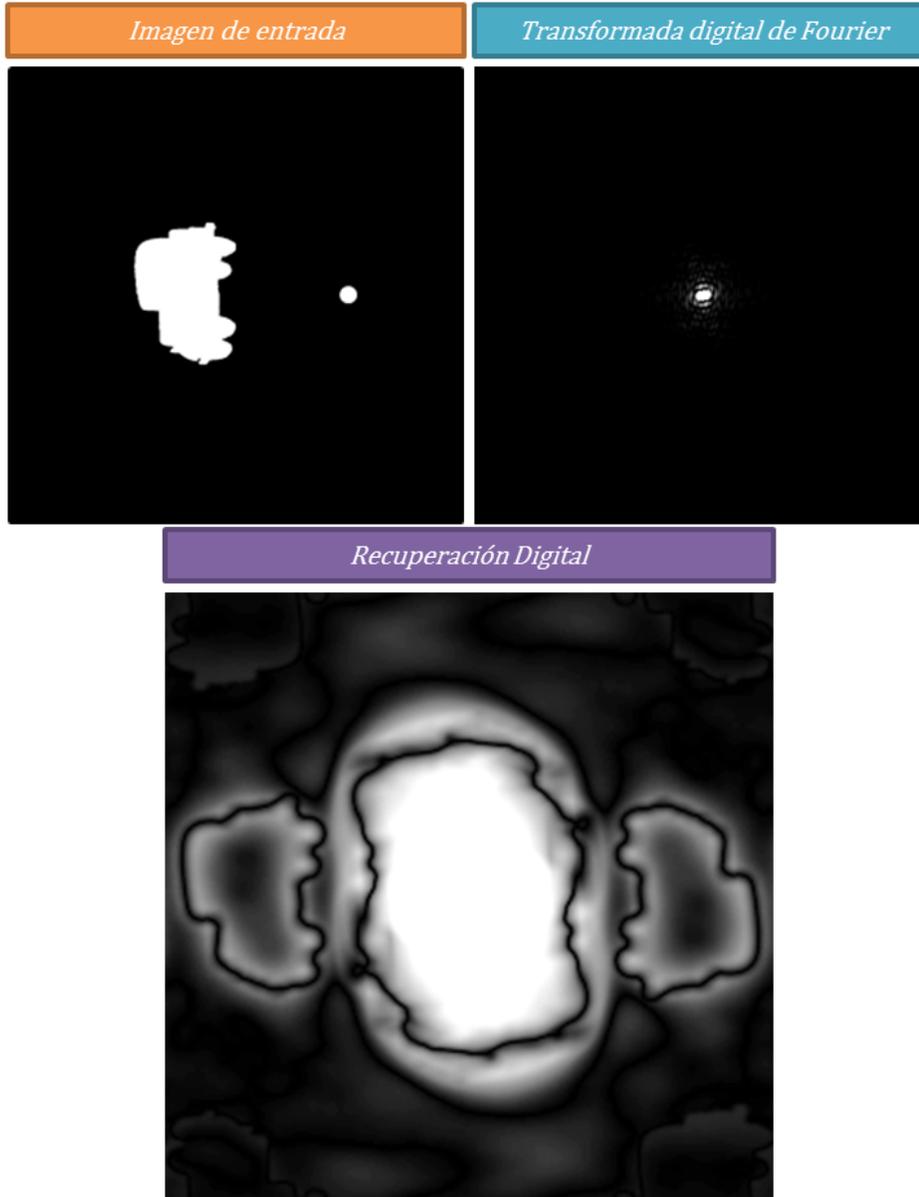


Figura 3.28: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

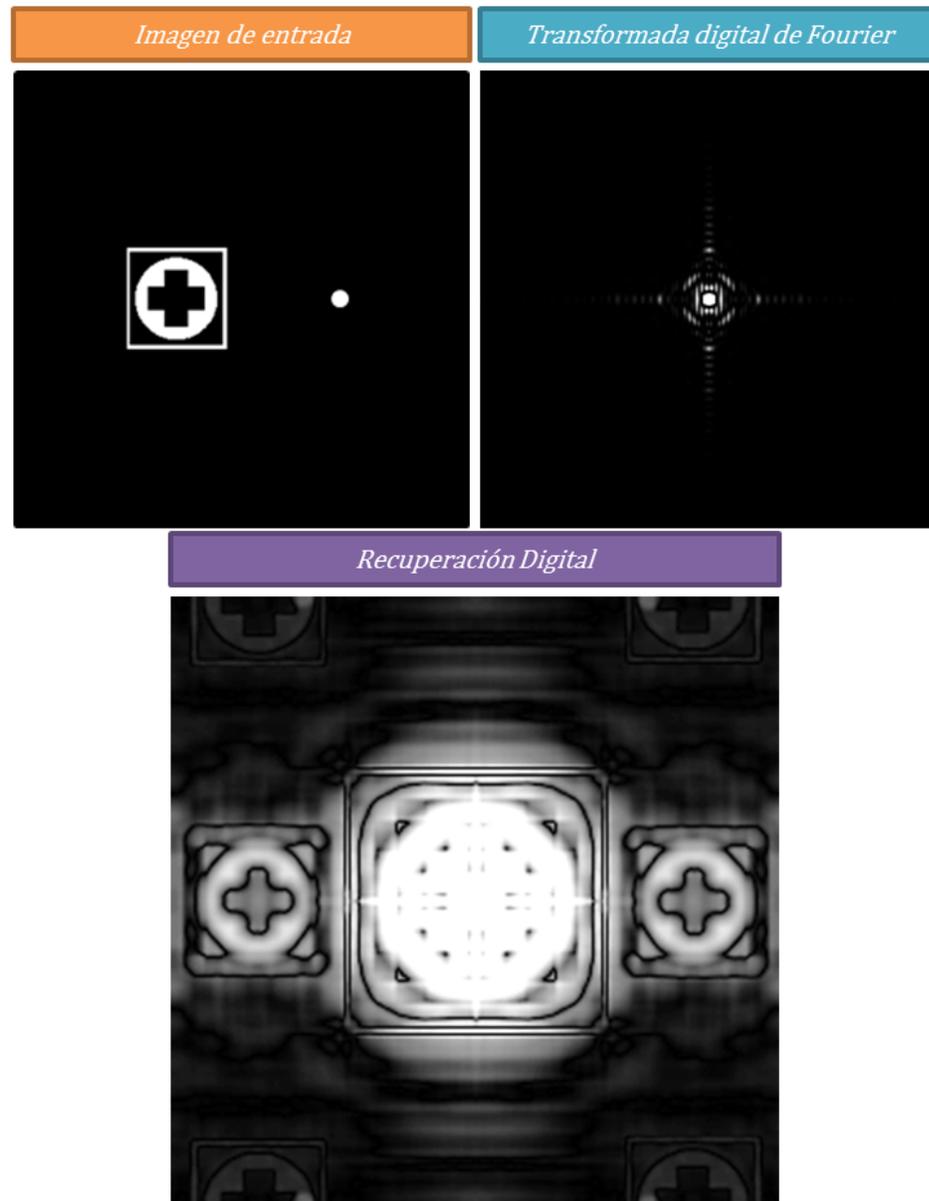


Figura 3.29: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

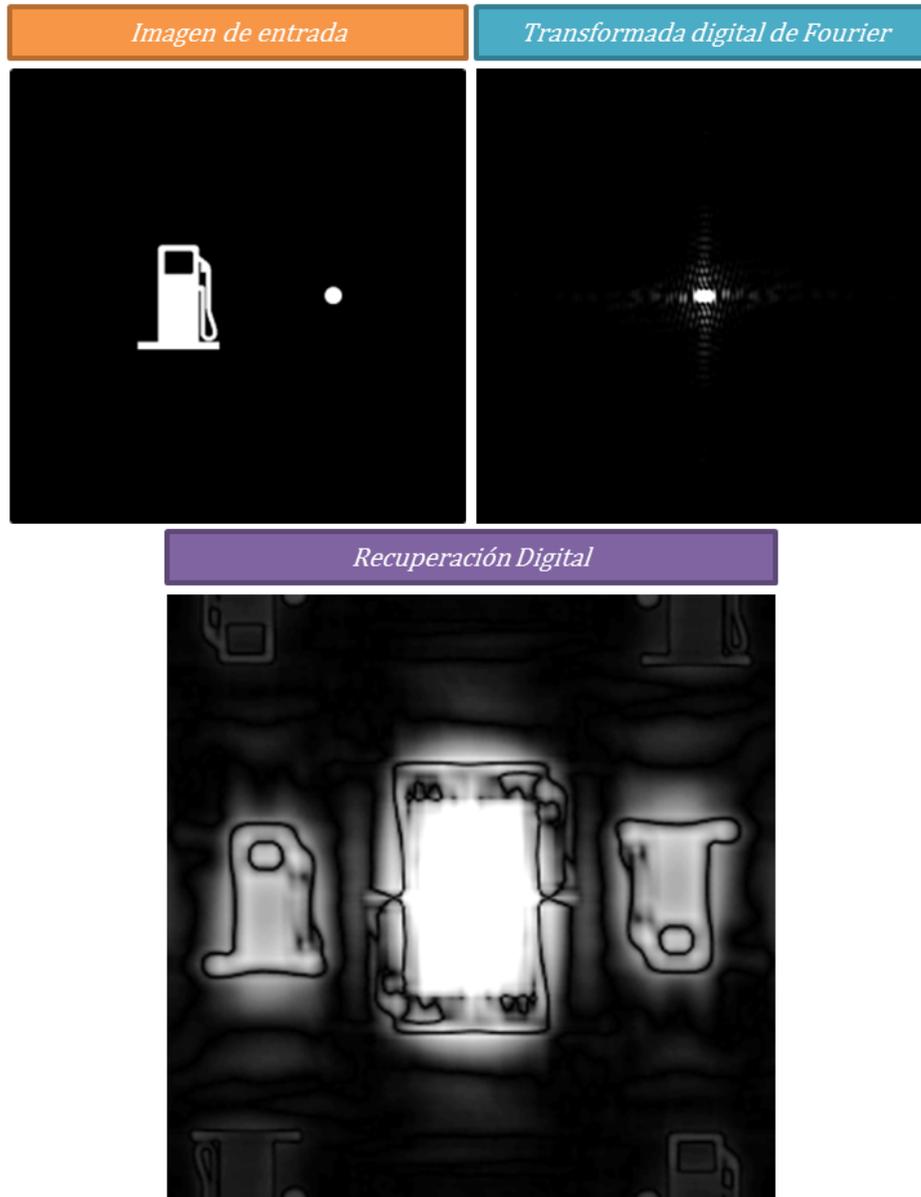


Figura 3.30: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

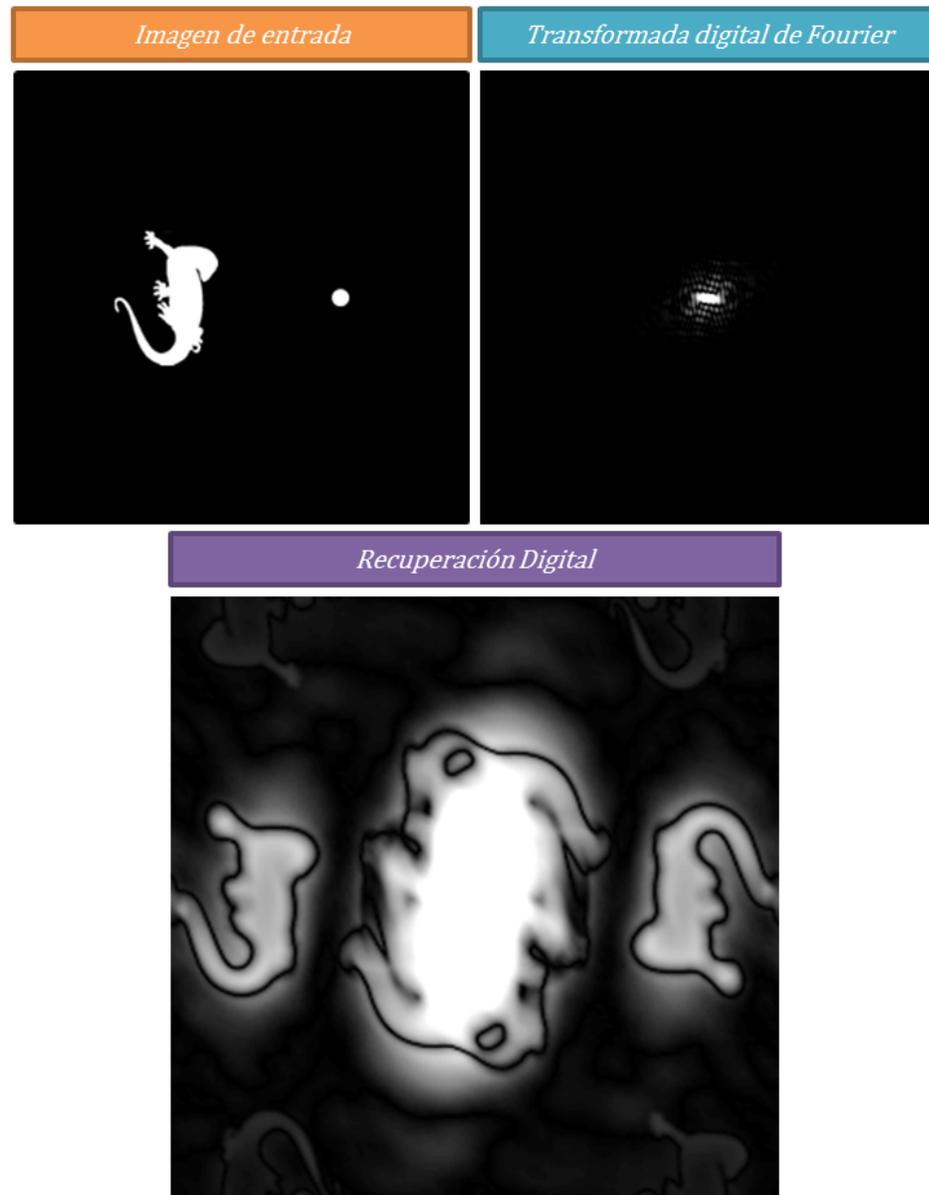


Figura 3.31: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

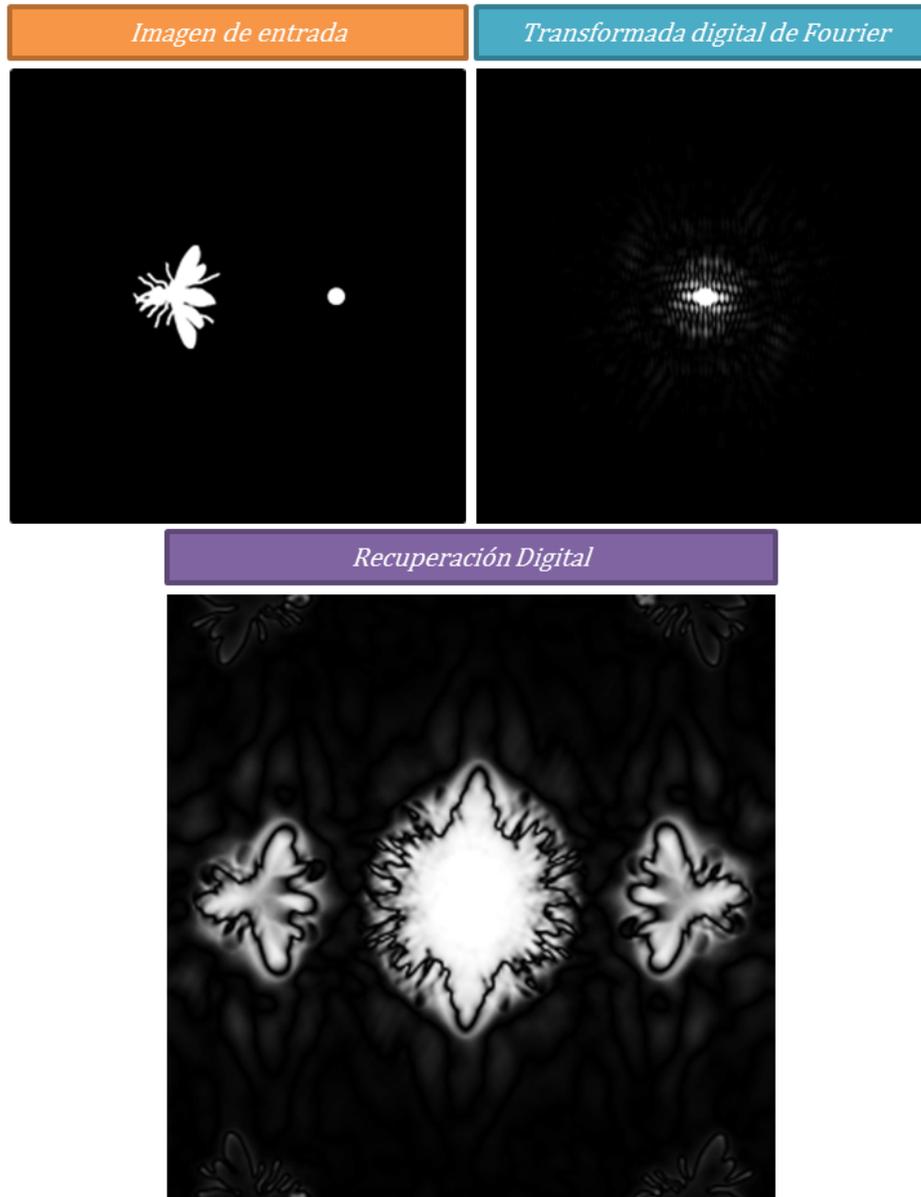


Figura 3.32: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

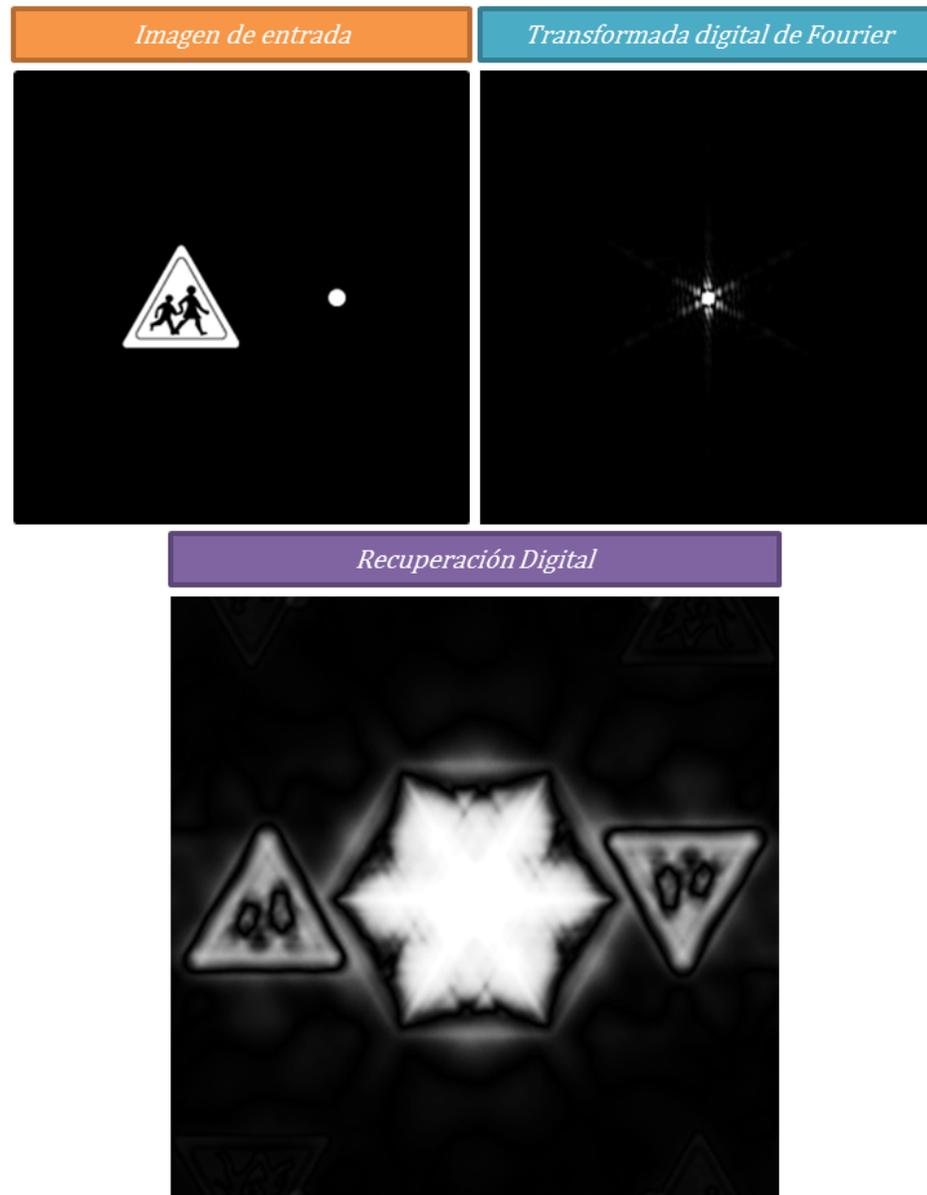


Figura 3.33: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

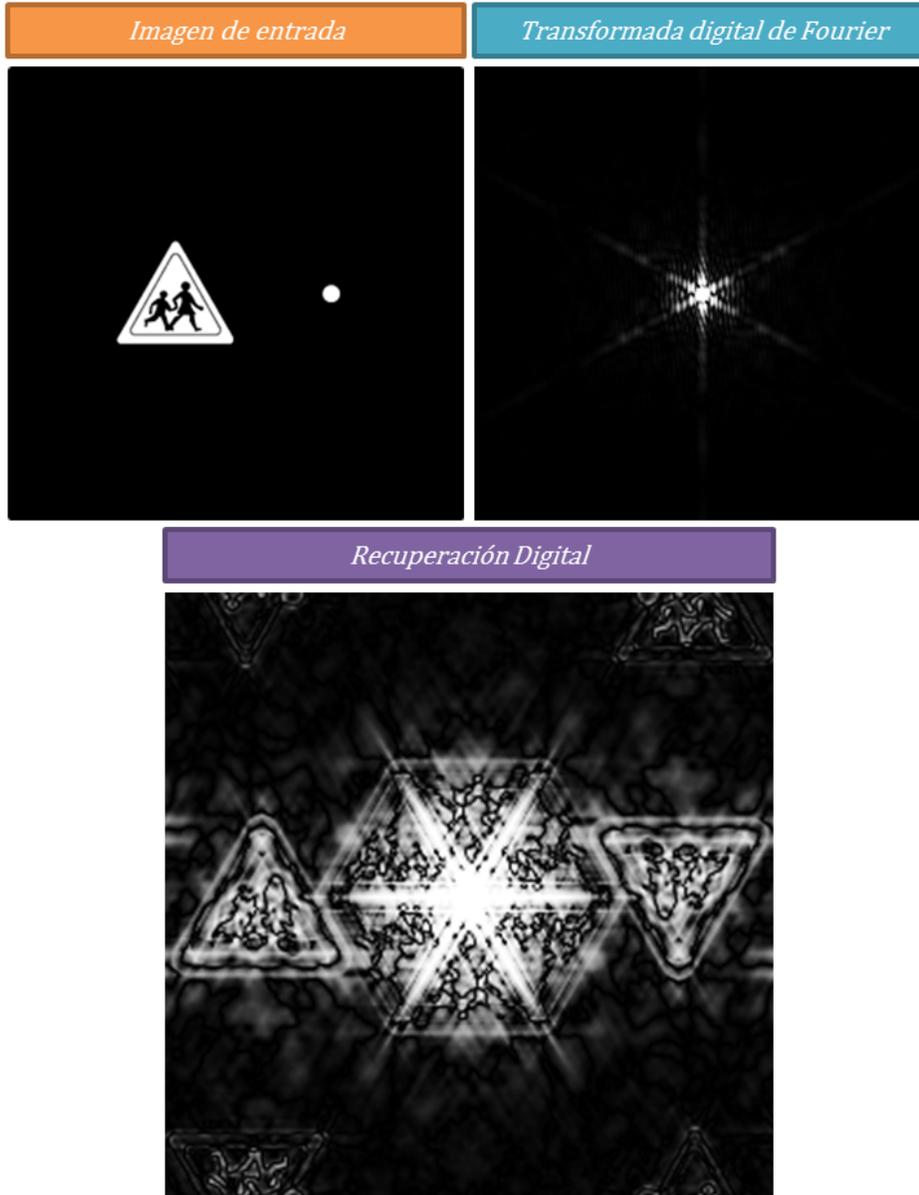


Figura 3.34: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

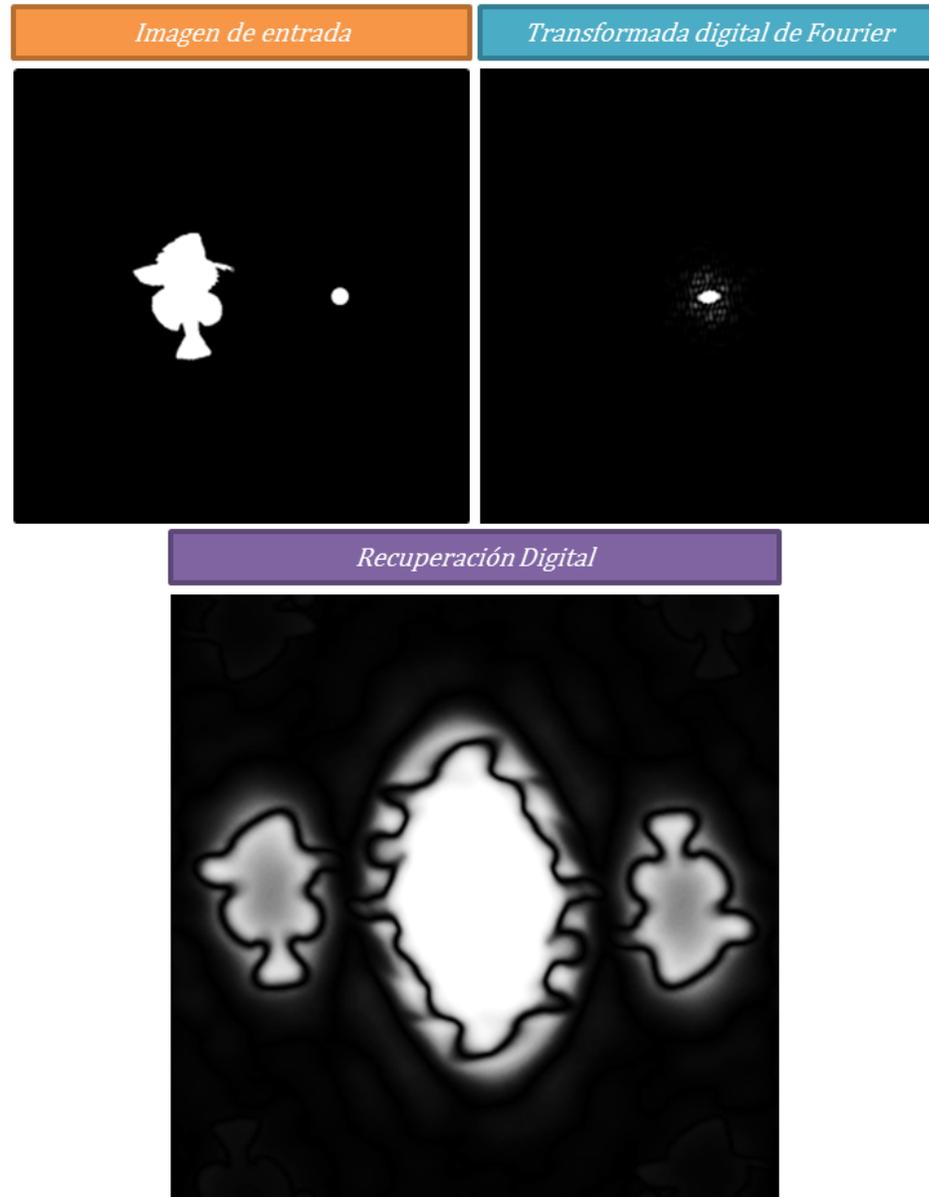


Figura 3.35: Imagen de entrada binaria, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

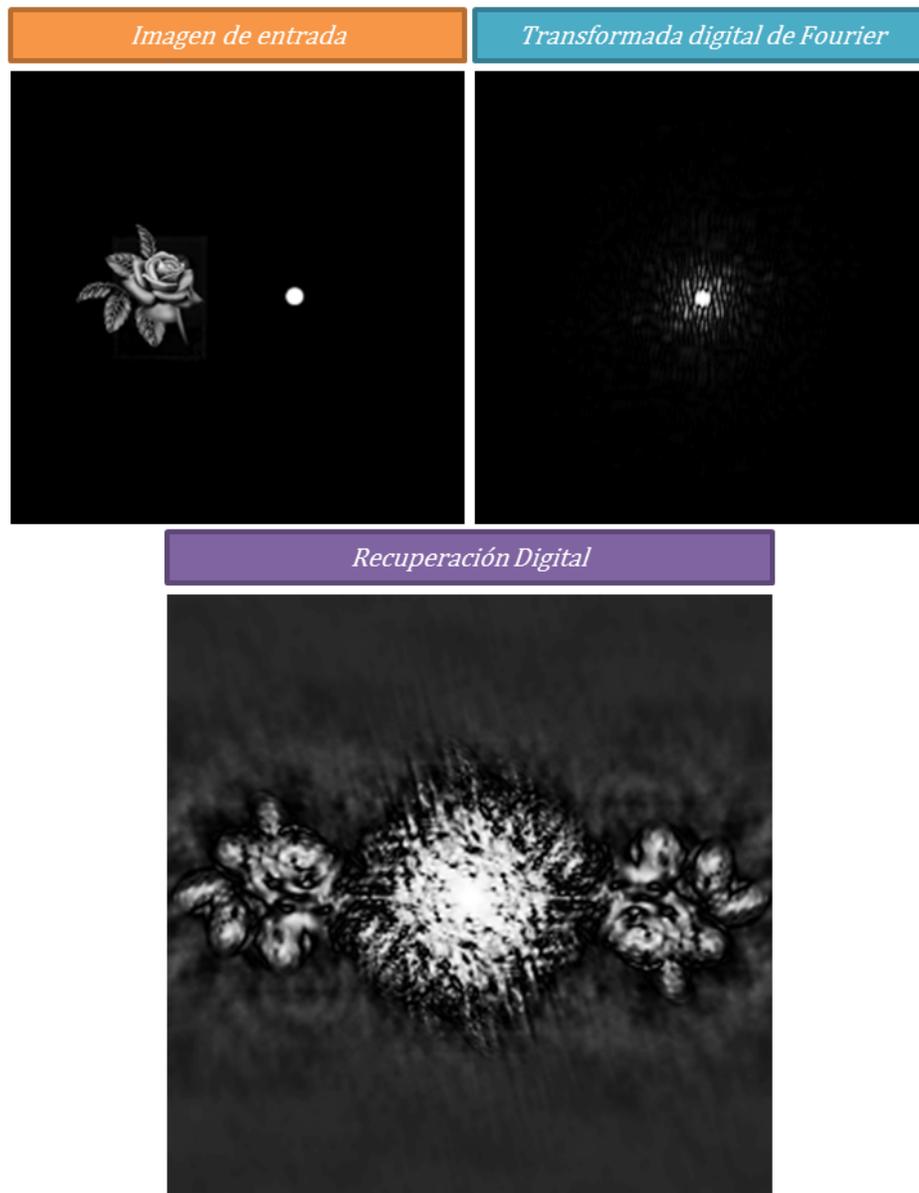


Figura 3.36: Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

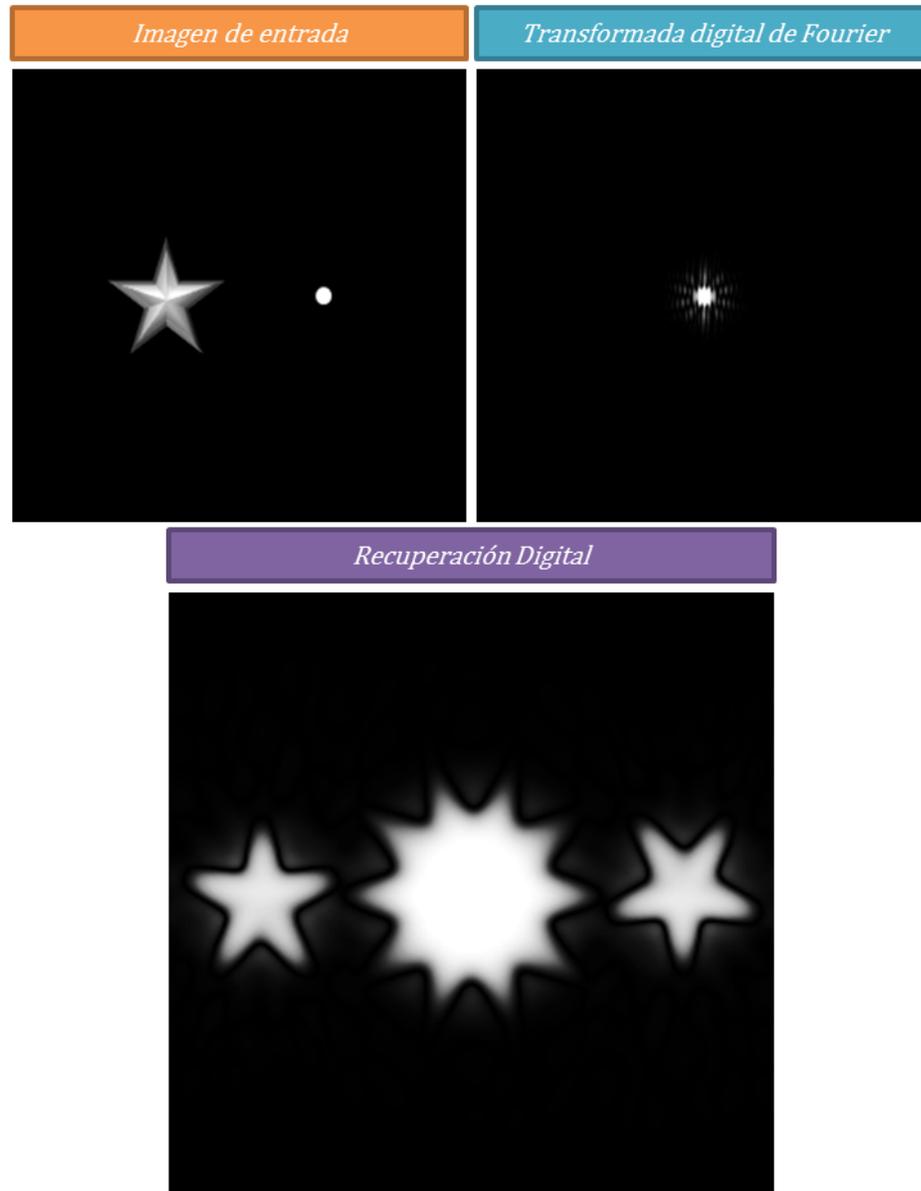


Figura 3.37: Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

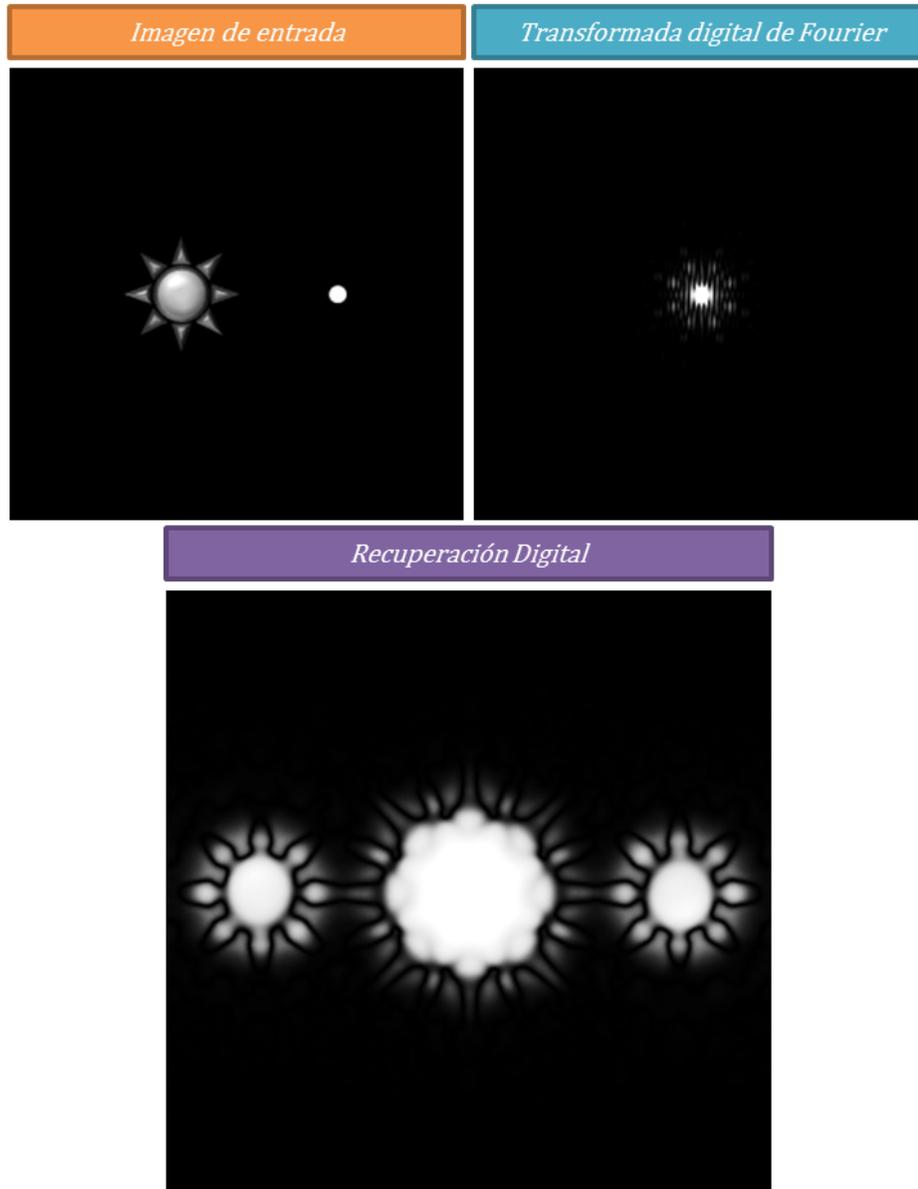


Figura 3.38: Imagen de entrada en escala de grises, su correspondiente FFT y recuperación de intensidades de la imagen.

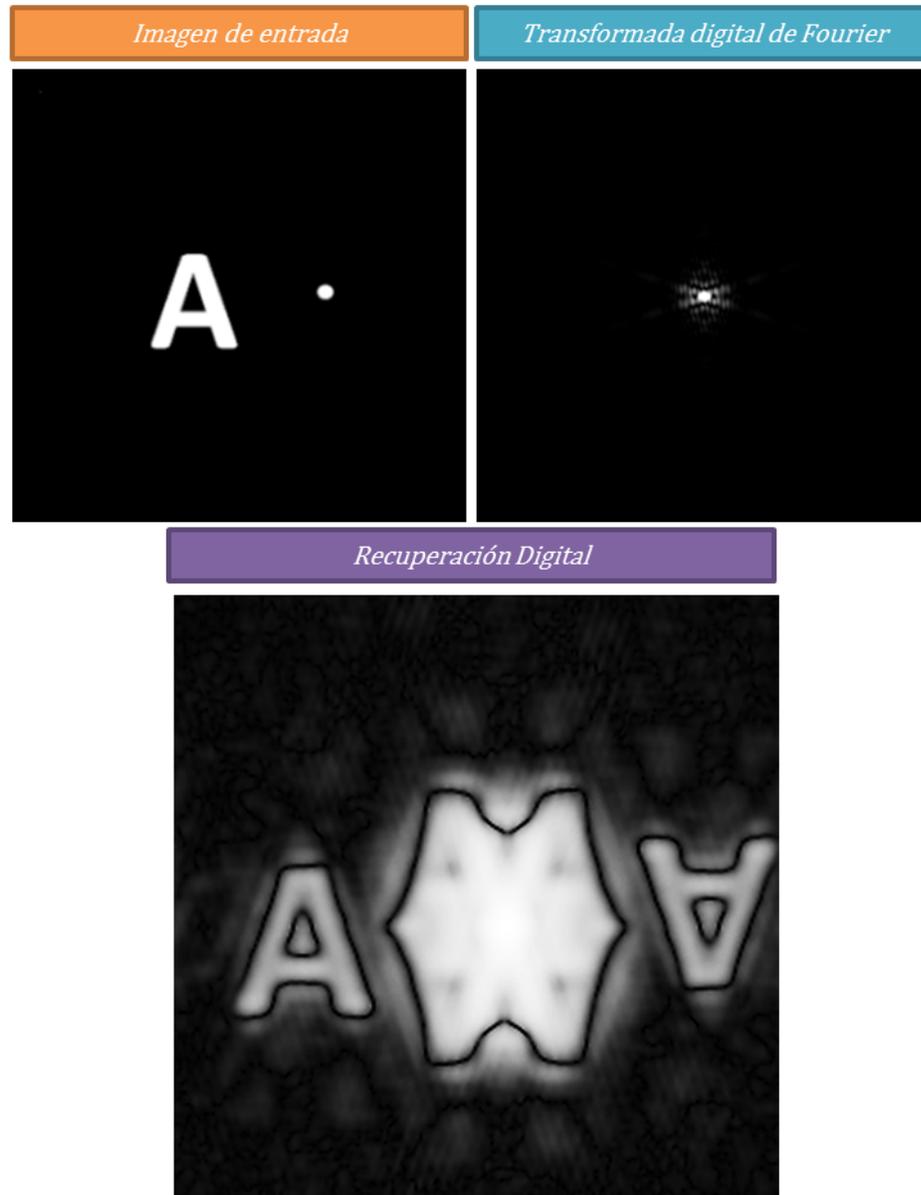


Figura 3.39: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

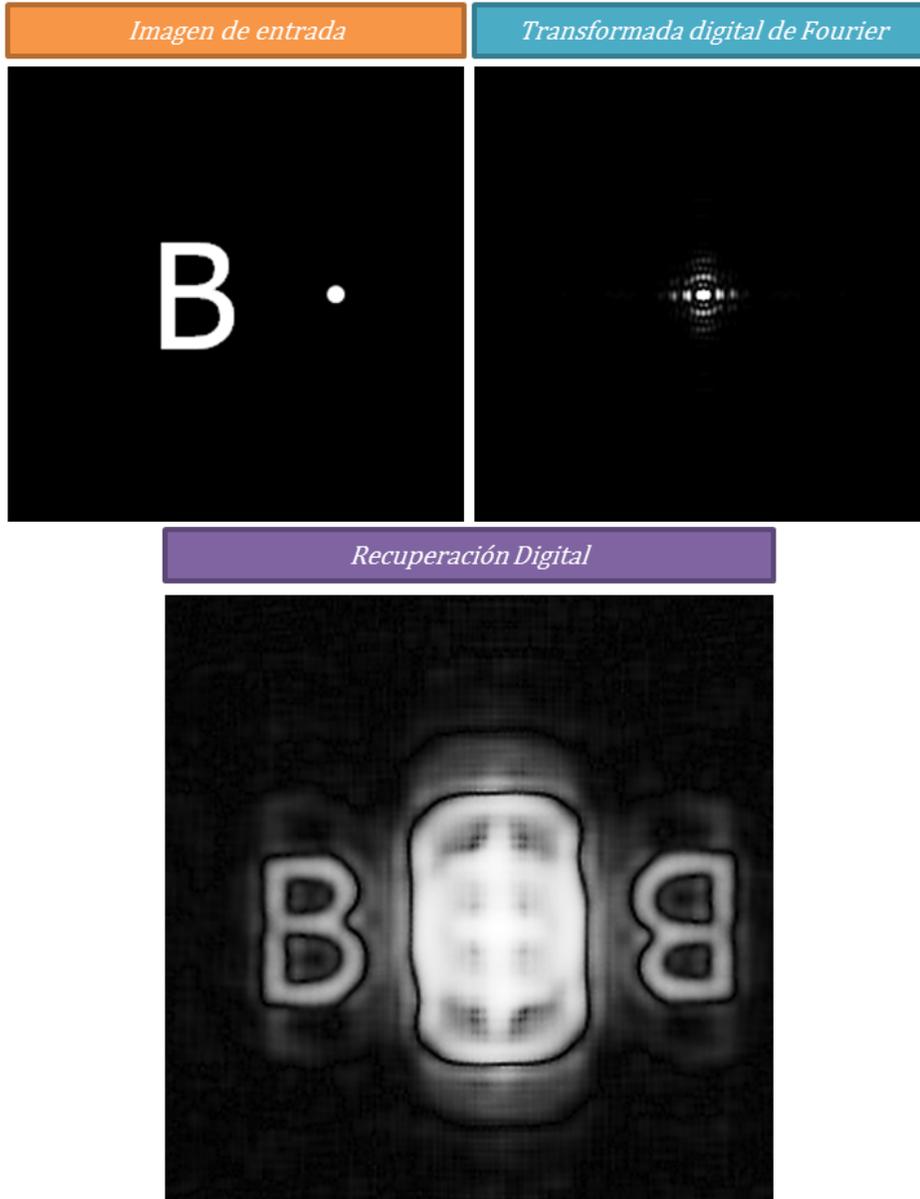


Figura 3.40: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

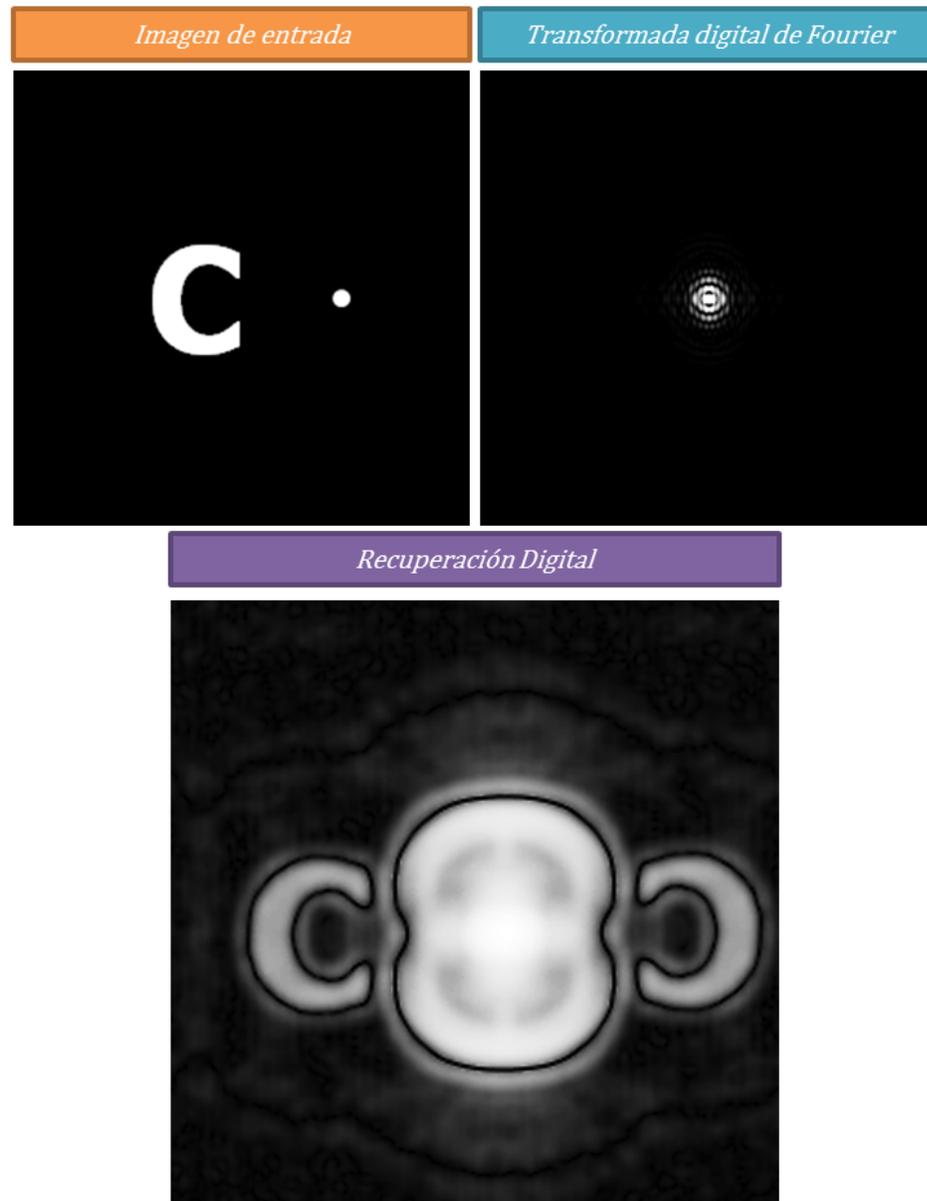


Figura 3.41: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

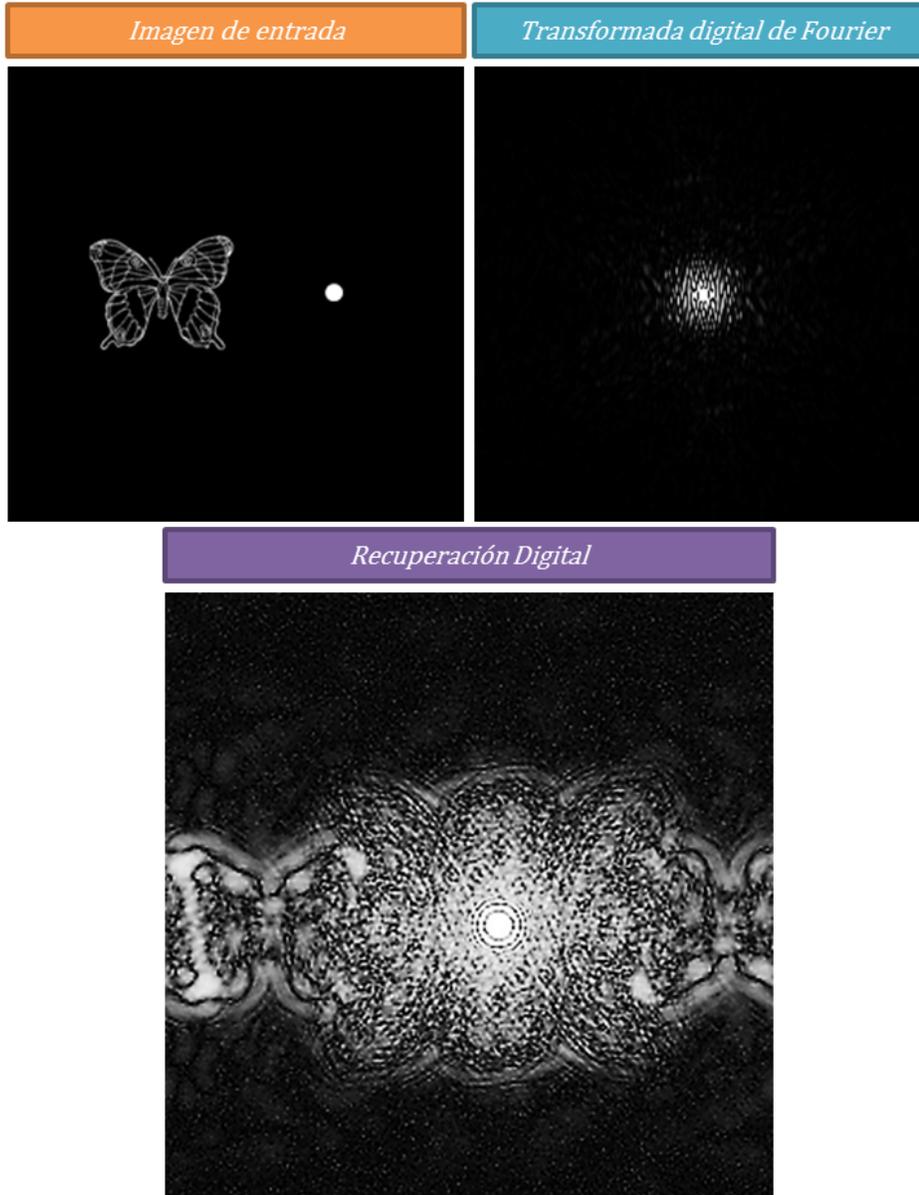


Figura 3.42: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

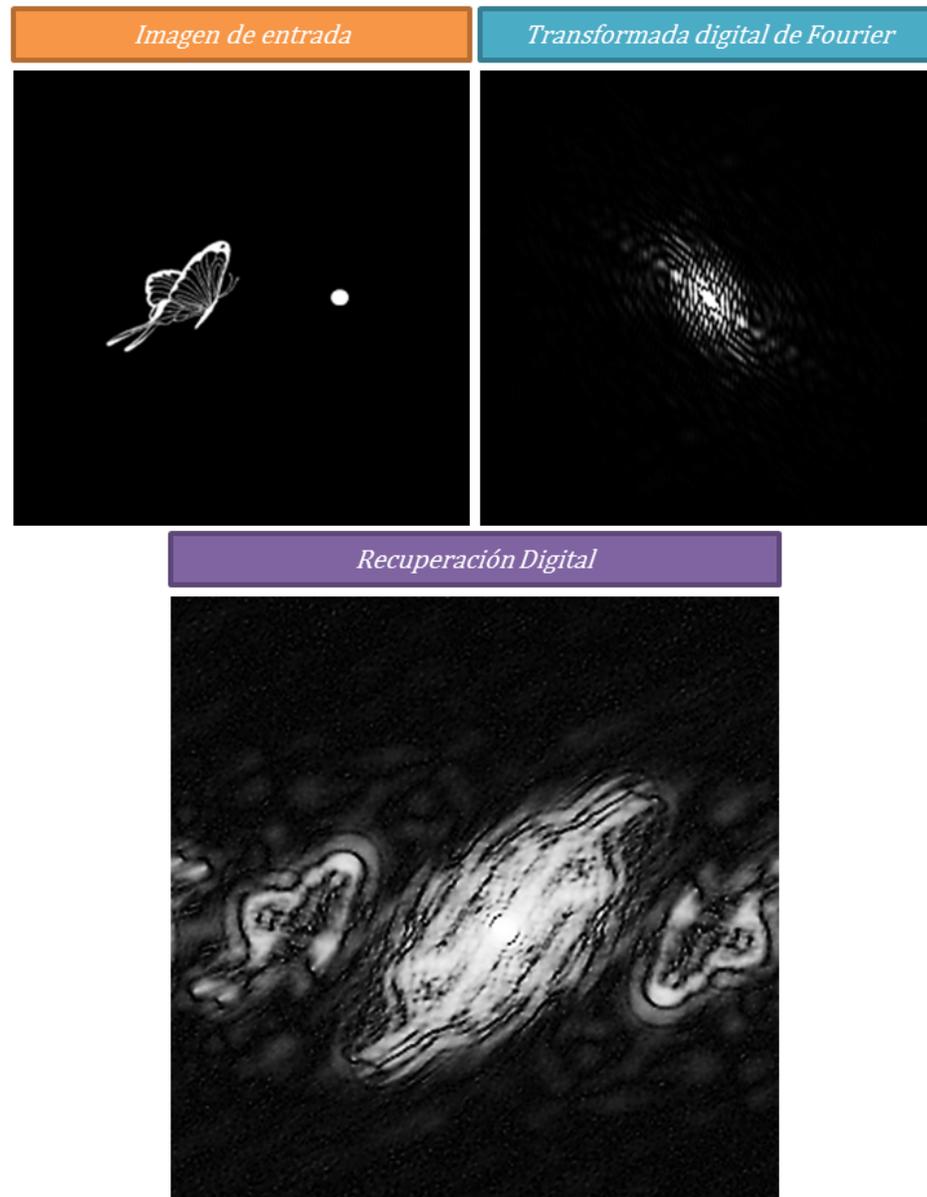


Figura 3.43: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

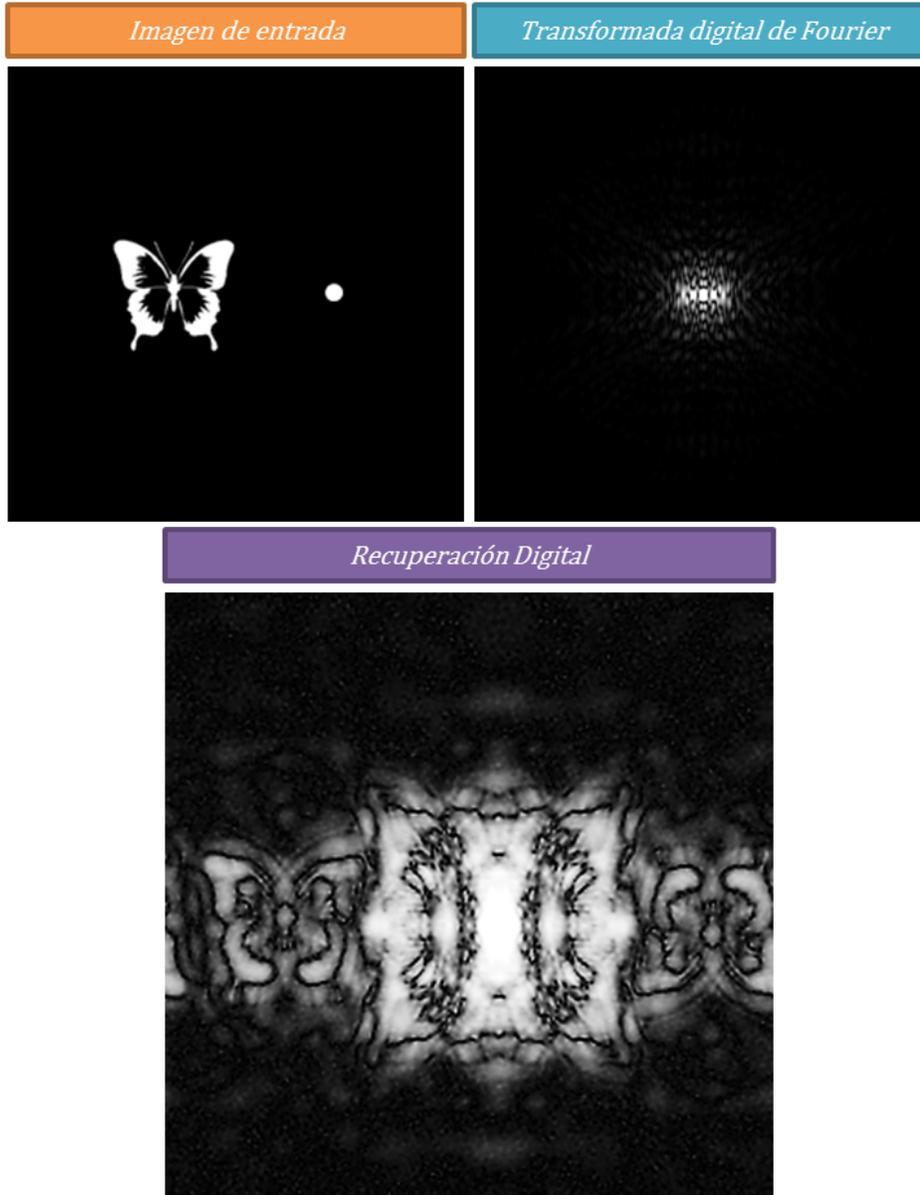


Figura 3.44: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

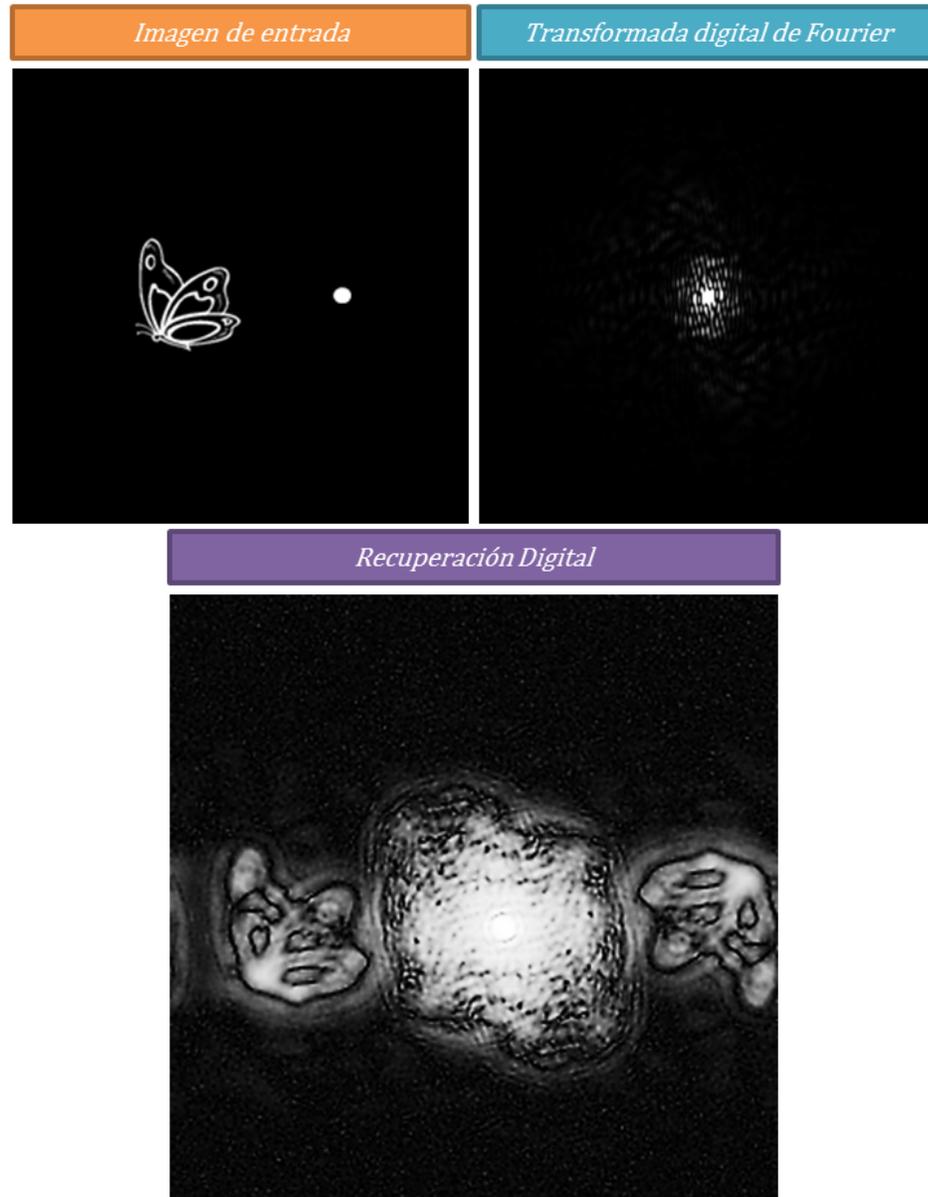


Figura 3.45: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

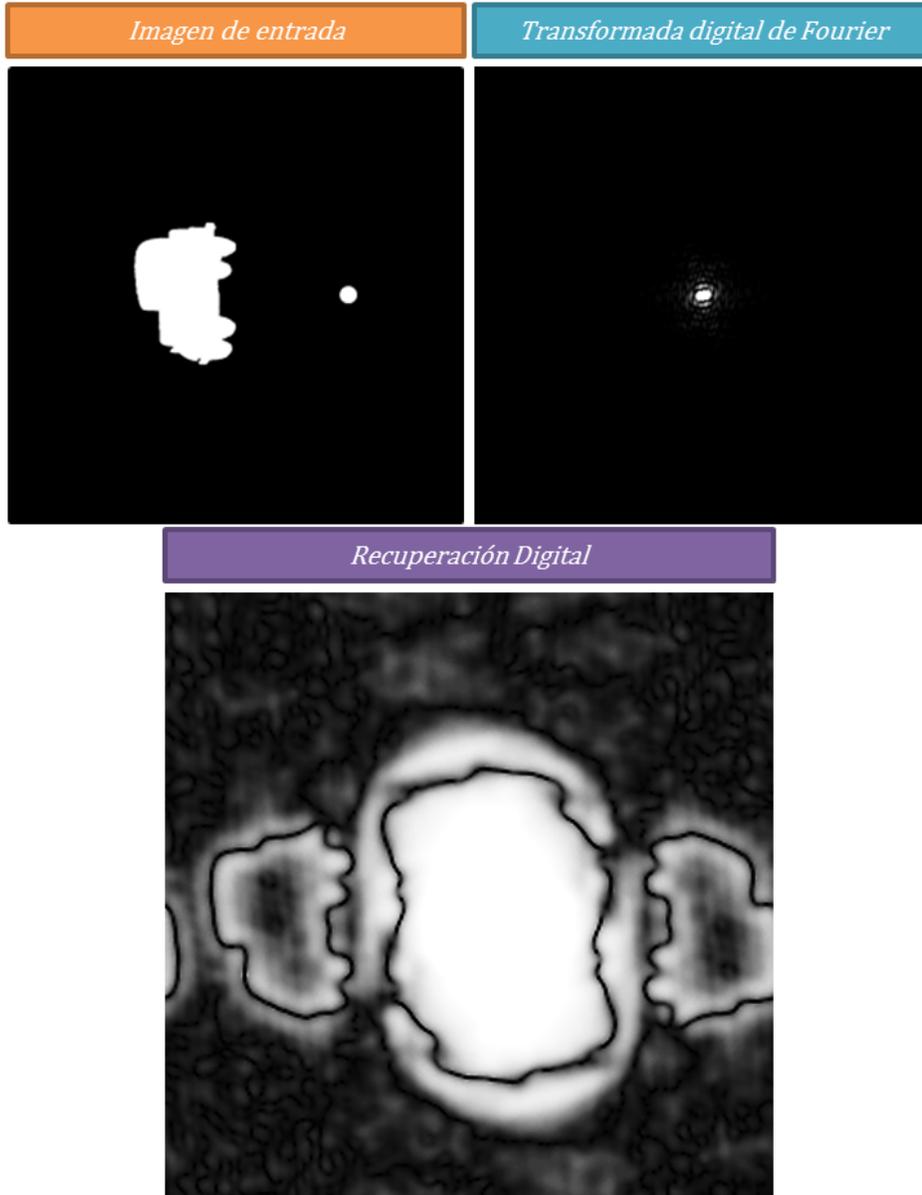


Figura 3.46: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

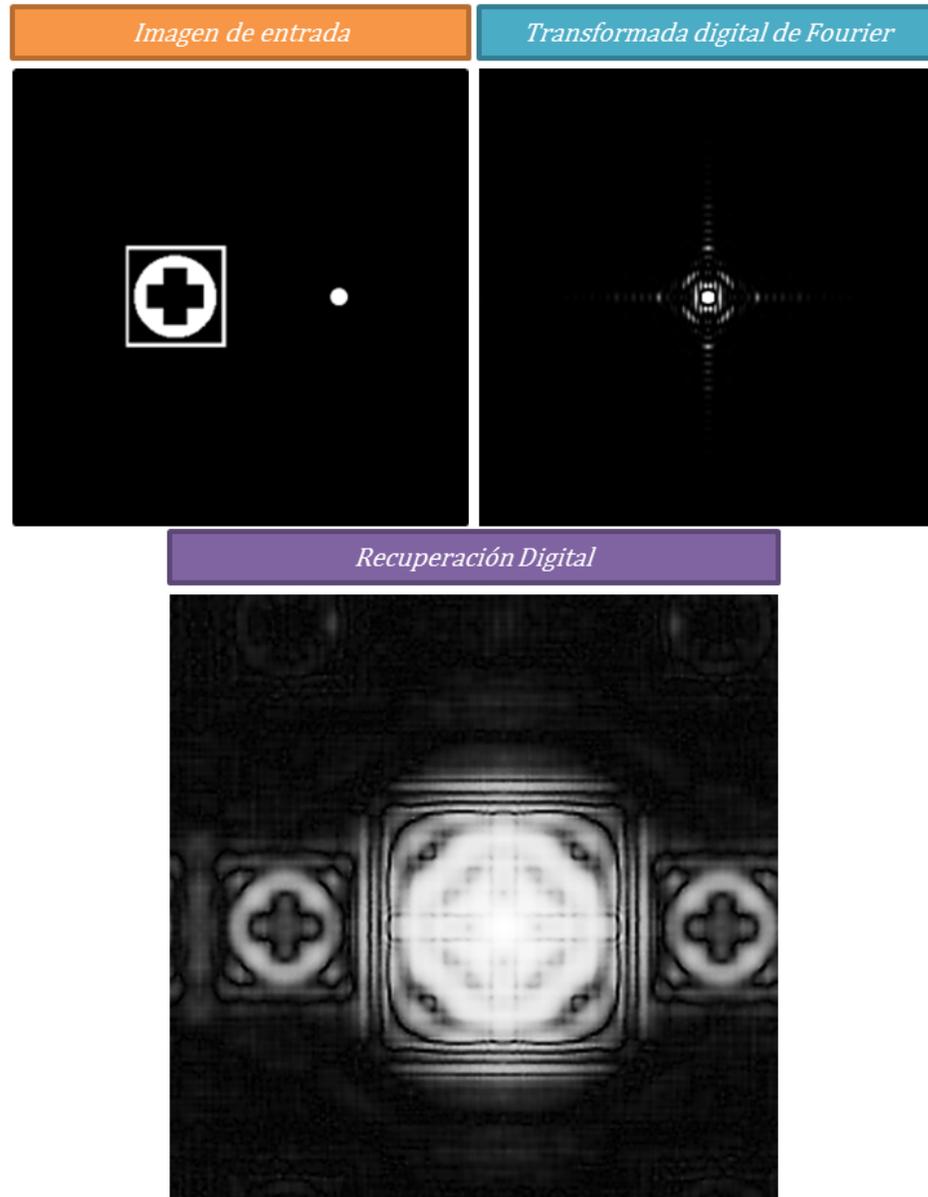


Figura 3.47: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

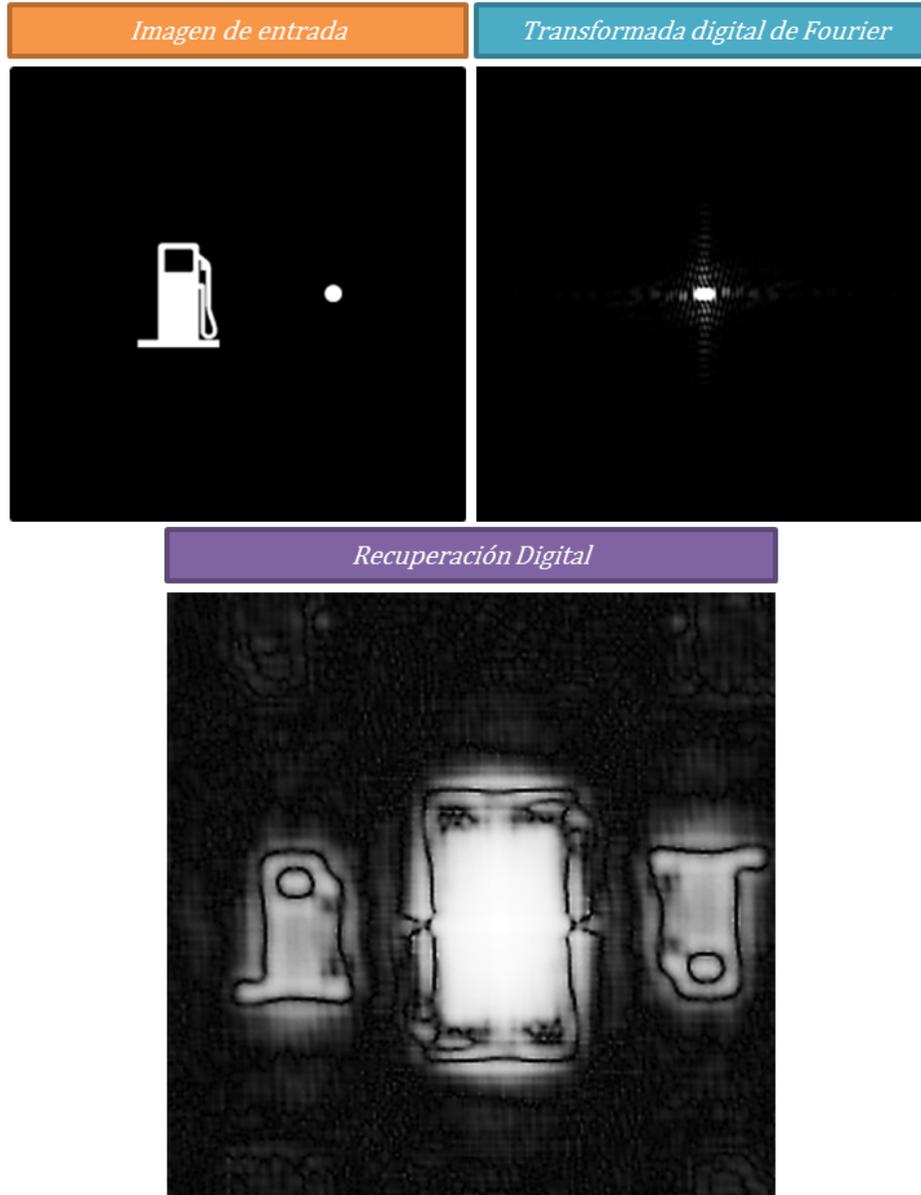


Figura 3.48: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

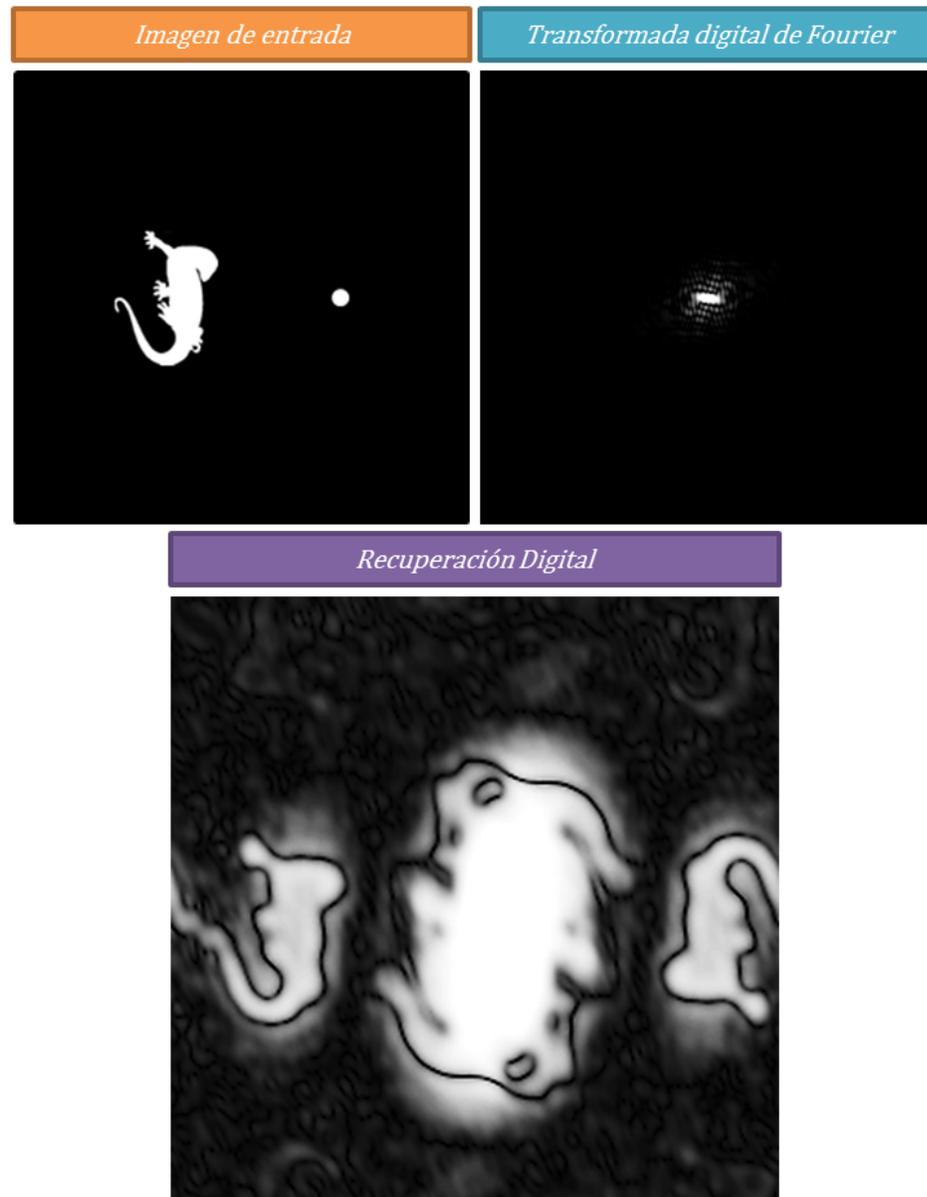


Figura 3.49: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier



Figura 3.50: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro digital de Fourier

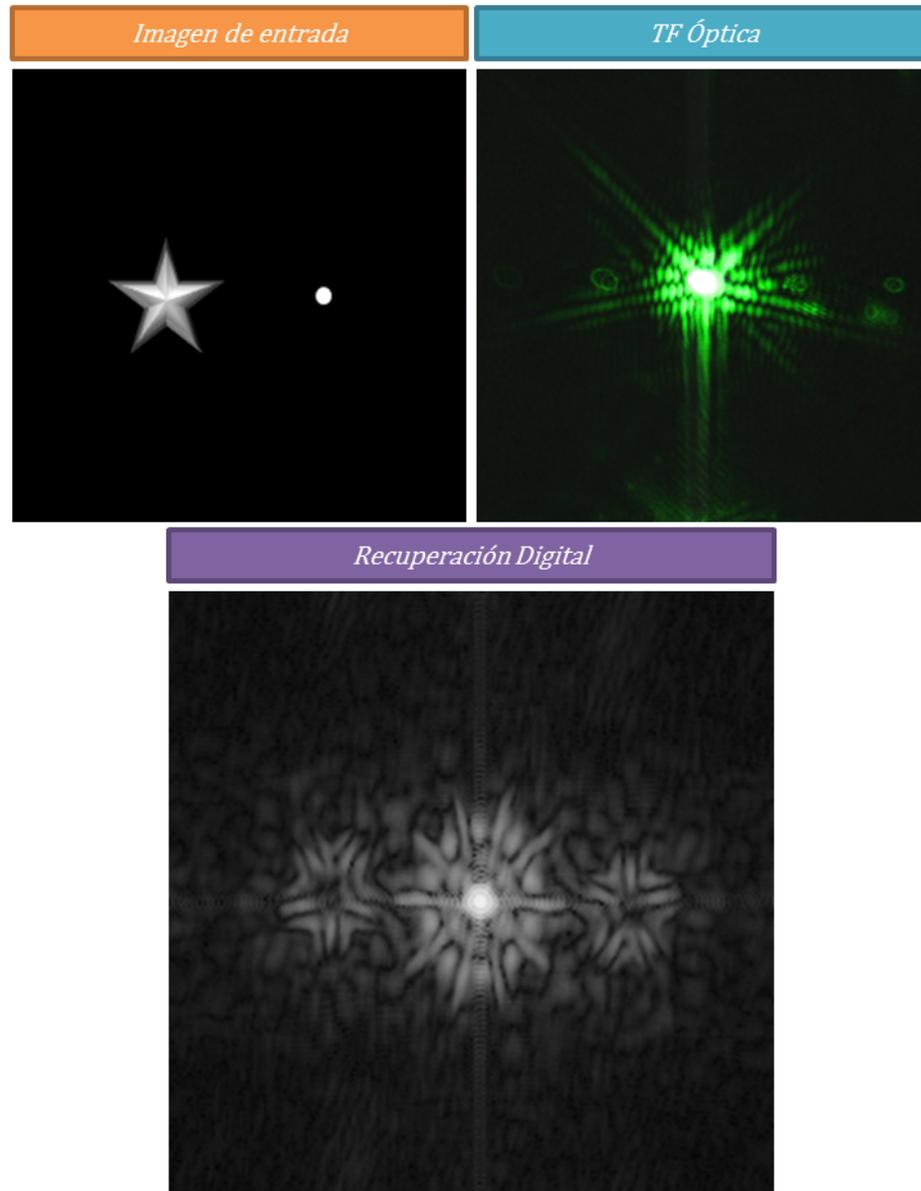


Figura 3.51: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro óptico de Fourier grabado con un láser de  $\lambda = 543nm$

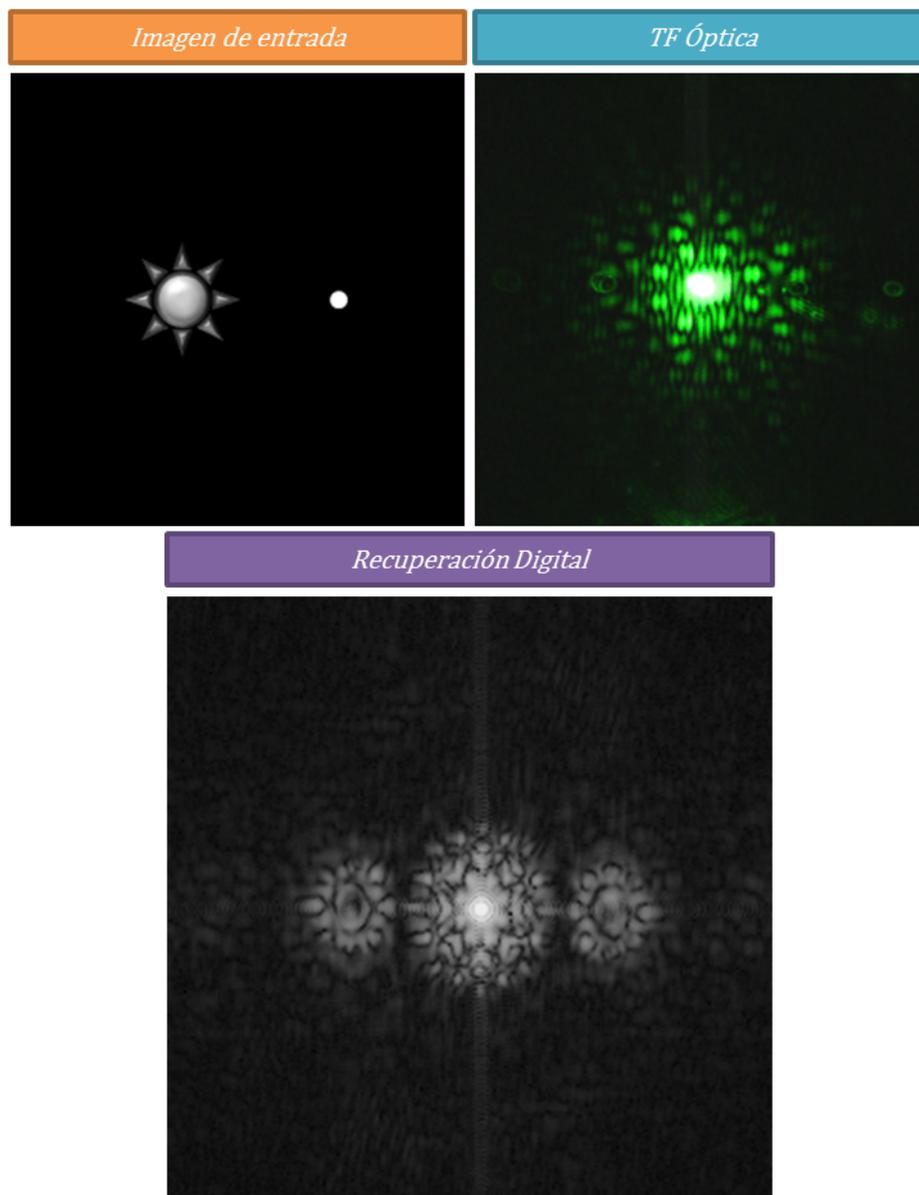


Figura 3.52: Recuperación de intensidades mediante el algoritmo de Fresnel a partir de un filtro óptico de Fourier grabado con un láser de  $\lambda = 543nm$