

U

P

T

**Marca de agua en imágenes  
de gran tamaño y video  
utilizando momentos  
ortogonales discretos  
clásicos**

por

**José Saúl Rivera López**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**MAESTRO EN  
COMPUTACIÓN ÓPTICA**

en la

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE  
TULANCINGO**

Octubre 2017

Tulancingo de Bravo, Hidalgo

Supervisada por:

Dr. César Joel Camacho Bello

©UPT

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y  
distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.





# Dedicatoria

A mis padres y hermanos por su apoyo brindado.

# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo para realizar mis estudios de Maestría a través de la Beca 423649.

A mi asesor el Dr. César Joel Camacho Bello por su apoyo, asesoría y dirección durante el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales, Dr. Alfonso Padilla Vivanco, Dra. Carina Toxqui Quilt, y Mtra. Lucía Gutiérrez Lazcano por sus valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo.

# Prefacio

La marca de agua ha sido una de las principales áreas de investigación en la ocultación de información, en los últimos años los métodos de marca de agua han crecido rápidamente y están siendo propuestos como sistemas que proporcionan protección y seguridad de información útil. Por otra parte, la teoría de momentos ha surgido en la literatura como una área de investigación importante en el procesamiento de imágenes para la descripción de imágenes en aplicaciones como la recuperación de información y codificación.

En este trabajo de tesis se realiza un análisis de reconstrucción de imágenes utilizando el computo de funciones momento basado en polinomios ortogonales discretos y el Error de Reconstrucción Normalizado(NIRE). De igual forma se propone un algoritmo para el marcado de agua y encriptación en imágenes de gran tamaño y video mediante momentos ortogonales.

# Resumen

Se presenta una breve introducción sobre la teoría de la marca de agua. También, se realiza el cálculo de momentos ortogonales mediante conjuntos de polinomios discretos tales como: Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner, Charlier y Racah. De igual forma se elabora un análisis comparativo en términos de reconstrucción de imágenes y errores de reconstrucción para evaluar la capacidad de descripción de diferentes conjuntos de momentos.

Para solucionar algunos problemas como la inestabilidad, precisión numérica y propagación de error se realizó una simplificación para el cálculo de polinomios ortogonales discretos además de la implementación del proceso de ortonormalización de gram-Schmidt durante el cálculo. Por otra parte se propuso un algoritmo para la realización del marcado de agua en video y en imágenes RGB de gran tamaño y finalmente se muestran las conclusiones y trabajos a futuro.

# Abstract

A brief introduction on the theory of the watermark is presented. Also, the calculation of orthogonal moments by sets of polynomials discrete stories such as: Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner, Charlier and Racah. Likewise, a comparative analysis is made in terms of reconstruction of images and reconstruction errors for the ability to describe different sets of moments.

To solve some problems such as instability, numerical precision and error propagation, a simplification was made for the calculation of discrete orthogonal polynomials in addition to the implementation of the gram-Schmidt orthonormalization process during the calculation. On the other hand, an algorithm for the realization of watermarking in video and in large RGB images is presented and finally the conclusions and future works are shown.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.3. Estado del arte . . . . .	5
1.4. Trabajos derivados de la tesis . . . . .	7
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	8
<b>2. Marca de agua digital y esteganografía</b>	<b>16</b>
2.1. Introducción . . . . .	16
2.2. Marca de agua digital . . . . .	16
2.3. Esteganografía digital . . . . .	18
2.4. Clasificación de marca de agua . . . . .	18
2.4.1. Clasificación de marca de agua basada en sus características . . . . .	18
2.4.2. Clasificación de marca de agua basada en sus aplicaciones . . . . .	21
2.5. Algoritmos de marca de agua . . . . .	23
2.5.1. Sustitución de marca de agua en el dominio espacial . . . . .	23
2.5.2. Sustitución de marca de agua en el dominio frecuencial . . . . .	24
<b>3. Polinomios ortogonales discretos</b>	<b>30</b>
3.1. Introducción . . . . .	30
3.2. Polinomios ortogonales discretos clásicos . . . . .	32
3.2.1. Polinomios de Tchebichef . . . . .	35
3.2.2. Polinomios de Krawtchouk . . . . .	36
3.2.3. Polinomios de Hahn . . . . .	37
3.2.4. Polinomios de Meixner . . . . .	38
3.2.5. Polinomios de Charlier . . . . .	40
3.2.6. Polinomios de Racah . . . . .	41
3.3. Relación de recurrencia de los polinomios ortogonales discretos . . . . .	42
<b>4. Teoría de momentos ortogonales</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Momentos circulares . . . . .	48
4.3. Momentos rectangulares . . . . .	50
4.4. Representación matricial . . . . .	51
4.5. Reconstrucción de imágenes de color . . . . .	53

4.5.1. Análisis de error de reconstrucción de imágenes de color . . . . .	56
<b>5. Cómputo de momentos ortogonales discretos</b>	<b>60</b>
5.1. Introducción . . . . .	60
5.2. Precisión numérica en los cálculos . . . . .	60
5.3. Reducción de términos de la relación de recurrencia con respecto a $n$ .	61
5.3.1. Cálculo de los polinomios de Tchebichef en su forma reducida .	62
5.3.2. Cálculo de los polinomios de Krawtchouk en su forma reducida	64
5.3.3. Cálculo de los polinomios de Hahn en su forma reducida . . . . .	66
5.3.4. Cálculo de los polinomios de Meixner en su forma reducida . .	68
5.3.5. Cálculo de los polinomios de Charlier en su forma reducida . .	69
5.3.6. Cálculo de los polinomios de polinomios de Racah en su forma reducida . . . . .	70
5.4. Reconstrucción de imágenes de color . . . . .	74
<b>6. Ortogonalización de Gram-Schmidth</b>	<b>79</b>
6.1. Introducción . . . . .	79
6.2. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidth . . . . .	79
6.3. Cómputo de momentos con Gram-Schmidt . . . . .	82
6.4. Reconstrucción de imágenes de gran tamaño . . . . .	90
<b>7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos</b>	<b>95</b>
7.1. Introducción . . . . .	95
7.2. Marca de agua en video . . . . .	96
7.2.1. Algoritmo propuesto para la marca de agua en video en escala de grises . . . . .	97
7.2.2. Algoritmo propuesto para la marca de agua de video en color .	102
7.3. Resultados obtenidos de la marca de agua en video . . . . .	106
7.3.1. Resultados obtenidos utilizando imagen en escala de grises . . .	108
7.3.2. Resultados obtenidos utilizando imagen de color . . . . .	114
7.3.3. Aplicación de consola . . . . .	120
7.4. Marca de agua en imágenes de gran tamaño . . . . .	126
7.4.1. Algoritmo propuesto para la marca de agua de imágenes de color de gran tamaño . . . . .	127
7.5. Resultados obtenidos de la marca de agua en imágenes de gran tamaño	133
<b>8. Conclusiones y trabajos a futuro</b>	<b>139</b>

# Índice de figuras

2.1. Clasificación de la marca de agua. . . . .	19
2.2. Sustitución de marca de agua en el dominio espacial. . . . .	24
2.3. Extracción de marca de agua. . . . .	25
2.4. Incrustación de marca de agua en el dominio de frecuencias. . . . .	26
3.1. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Tchebichef con $N=100$ . . . . .	36
3.2. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Krawtchouk con $N=100$ y $p=0.5$ . . . . .	37
3.3. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Hahn con $N=100$ , $a=10$ y $b=10$ . . . . .	38
3.4. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Mexnier con $N=100$ , $\mu=0.43$ y $\beta=14$ . . . . .	39
3.5. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Charlier con $N=100$ y $a_1=1$ . . . . .	40
3.6. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Racah con $N=50$ , $\alpha=0.1$ , $\beta=0.5$ y $a=1$ . . . . .	42
4.1. Dominios definidos para los momentos. a) Dominio Circular, b) Dominio Rectangular . . . . .	48
4.2. Representación matricial de una imagen . . . . .	51
4.3. Polinomios de en 1D en coordenadas $x$ y $y$ . . . . .	52
4.4. Representación en imagen de la matriz de ortogonalidad. . . . .	52
4.5. Imagen de prueba de 150x150 pixeles. . . . .	54
4.6. Reconstrucción de una imagen a color utilizando las familias de momentos discretos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner y Charlier, con diferentes ordenes. . . . .	55
4.7. Gráfica de error de reconstrucción de una imagen con dimensiones de 150 x 150 pixeles utilizando las familias de momentos de Tchebichef, Krawtchouk con $p=0.5$ , Hahn con $a=b=10$ , Meixner con $\mu=0.43$ y $\beta=14$ . y Charlier con $a_1=1$ . . . . .	56
5.1. Polinomios de Tchebichef reducidos de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=100$ . . . . .	64
5.2. Polinomios de Krawtchouk reducidos de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=100$ , $p=0.5$ . . . . .	65
5.3. Polinomios de Hahn reducidos de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=100$ , $a=10$ y $b=10$ . . . . .	67
5.4. Polinomios de Mexnier reducidos de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=100$ , $\mu=0.43$ , $\beta=14$ . . . . .	69
5.5. Polinomios de Charlier de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=100$ y $a_1=1$ . . . . .	70
5.6. Polinomios de Racah de orden $n=0,1,\dots,9$ , $N=50$ , $\alpha=0.1$ , $\beta=0.5$ y $a=1$ . . . . .	73

5.7. Imagen de $256 \times 256$ pixeles, para la reconstrucción de una imagen de color mediante el cálculo propuesto. . . . .	75
5.8. Reconstrucción de una imagen a color utilizando las familias de momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner y Charlier, con diferentes órdenes. . . . .	76
5.9. Gráfica del error obtenido de la reconstrucción mediante la reducción del cálculo de los momentos de Tchebichef, Krawtchouk con $p=0.5$ , Hahn con $a=b=10$ , Meixner con $\mu=0.43$ y $\beta=14$ , Charlier con $a_1=1$ y Racah con $a=1$ , $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$ . . . . .	77
6.1. a) Vector unitario en dirección de $v_1$ , b) Proyección de $\hat{u}_1$ de dirección de $v_2$ . . . . .	81
6.2. Proyección de vector unitario $\hat{u}_2$ en $v_3$ . . . . .	81
6.3. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Tchebichef con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=100$ . . . . .	83
6.4. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Krawtchouk con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=100$ , $p=0.5$ . . . . .	85
6.5. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Hahn con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=100$ , $a=10$ y $b=10$ . . . . .	85
6.6. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Meixner con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=100$ , $\mu=0.43$ y $\beta=14$ . . . . .	87
6.7. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Charlier con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=100$ y $a_1=1$ . . . . .	89
6.8. Primeros 10 ordenes de los polinomios de Racah con ortogonalización de Gram-Schmidt con $N=50$ , $\alpha=0.1$ , $\beta=0.5$ y $a=1$ . . . . .	89
6.9. Imagen de prueba para la reconstrucción de imagen de gran tamaño. . . . .	91
6.10. Resultados obtenidos de la reconstrucción de imágenes utilizando diferentes familias de momentos. . . . .	92
6.11. Gráfica obtenida del error de reconstrucción utilizando altos ordenes de los momentos de Tchebichef, Krawtchouk con $p=0.5$ , Hahn con $a=b=10$ , Meixner con $\mu=0.43$ y $\beta=14$ , Charlier con $a_1=1$ y Racah con $a=1$ , $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$ . . . . .	93
7.1. Representación de un video en una secuencia de imágenes. . . . .	96
7.2. División de la imagen de video en bloques. . . . .	97
7.3. División de la imagen a encriptar en bloques. . . . .	97
7.4. Obtención de valores de forma binarios del bloque. . . . .	98
7.5. Cálculo de momentos del bloque. . . . .	98
7.6. Encriptación de la imagen. . . . .	99
7.7. Recuperación del bloque del cuadro del video. . . . .	99
7.8. Recuperación del cuadro de video. . . . .	99
7.9. División del cuadro de video con la imagen encriptada. . . . .	100
7.10. Cálculo de momentos del bloque. . . . .	100
7.11. Recuperación de la imagen encriptada. . . . .	101
7.12. Recuperación de imagen encriptada. . . . .	101
7.13. Separación de cuadro de video en los canales RGB. . . . .	102

7.14. Separación de la imagen a encriptar en los canales RGB. . . . .	103
7.15. División del cuadro de video en su canal azul. . . . .	103
7.16. Encriptación de una imagen de color en video. . . . .	104
7.17. Recuperación de cuadro de video en color. . . . .	104
7.18. Encriptación del canal G de imagen en video. . . . .	105
7.19. Encriptación del canal R de imagen en video. . . . .	105
7.20. Imagen de color recuperada. . . . .	106
7.21. Imágenes de prueba utilizadas para la marca de agua en video, a) Imágenes de color, b) Imágenes a en escala de grises. . . . .	107
7.22. Video predeterminado en Windows 7 de 2008 Microsoft Corp en escala de grises. . . . .	107
7.23. Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la Imagen 1 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas. . . . .	109
7.24. Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la imagen 2 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas. . . . .	110
7.25. Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la Imagen 3 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas. . . . .	111
7.26. Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 1"por cuadro del video. . . . .	112
7.27. Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 2"por cuadro del video. . . . .	112
7.28. Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 3"por cuadro del video. . . . .	113
7.29. Comparación de las imágenes originales y las imágenes recuperadas con con cada una de las familias de momentos mencionadas. . . . .	114
7.30. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 1 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier. . .	115
7.31. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 2 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier. . .	116
7.32. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 3 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier. . .	117
7.33. Error RMES de la encriptación de la Imagen 1 por cada cuadro del video.	118
7.34. Error RMES de la encriptación de la Imagen 2 por cada cuadro del video.	118
7.35. Error RMES de la encriptación de la Imagen 3 por cada cuadro del video.	119
7.36. Comparación de las imágenes recuperadas y las imágenes originales y mediante los momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier. . . . .	120
7.37. Pantalla de inicio de la aplicación desarrollada. . . . .	121
7.38. Selección de imagen y video para el proceso de inserción de la marca de agua. . . . .	121
7.39. Inicio de inserción de marca de agua. . . . .	122

7.40. Proceso de marcado de agua en video de una imagen RGB a) Encriptación del canal azul de la imagen, b) Encriptación del canal verde de la imagen, c) Encriptación del canal rojo de la imagen, d) Terminación de la encriptación de la imagen. . . . .	123
7.41. Selección de video con marca de agua. . . . .	124
7.42. Proceso de recuperación de una marca de agua, a) Inicio del proceso de recuperación mediante la selección de una familia de momentos, b) Recuperación de canal azul de la imagen, c) Recuperación de canal verde de la imagen, d) Recuperación de canal Rojo de la imagen. . . . .	125
7.43. Marca de agua recuperada. . . . .	126
7.44. Obtención de los canales RGB de una imagen. . . . .	127
7.45. Separación de la imagen de marca de agua en los canales RGB. . . . .	127
7.46. Cálculo de momentos de un canal de la imagen de gran tamaño. . . . .	128
7.47. Cálculo de momentos de un canal de la imagen a encriptar. . . . .	128
7.48. Proceso de inserción de marca de agua en imagenes de gran tamaño. . . . .	129
7.49. Proceso de inserción de marca de agua en imagenes de gran tamaño de color utilizando los canales de color G y B. . . . .	129
7.50. Recuperación de la imagen de gran tamaño con marca de agua. . . . .	130
7.51. Separación RGB de una imagen con marca de agua. . . . .	130
7.52. Cálculo de momentos de los canales RGB de una imagen de gran tamaño con marca de agua. . . . .	131
7.53. Recuperación del canal R(rojo) de la marca de agua. . . . .	132
7.54. Recuperación del canal G(verde) de la marca de agua. . . . .	132
7.55. Recuperación del canal B(azul) de la marca de agua. . . . .	132
7.56. Imagen de marca de agua recuperada. . . . .	133
7.57. Imágenes de prueba, para la marca de agua. . . . .	133
7.58. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de 512×512 píxeles, en una imagen de 3840×2160 píxeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah. . . . .	134
7.59. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de 512×512 píxeles, en una imagen de 3840×2160 píxeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah. . . . .	135
7.60. Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de 512x512 pixeles, en una imagen de 3840x2160 pixeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah. . . . .	136

# Índice de tablas

3.1. Tabla de datos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Charlier $a_1 > 0$ . . .	34
3.2. Tabla de datos para los cinco términos polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Charlier $a_1 > 0$ . . . . .	44
5.1. comparación del total de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones utilizadas durante el cálculo de los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Carlier $a_1 > 0$	74
5.2. Comparación de datos de Tamaño y orden máximos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Carlier $a_1 > 0$ . . . . .	75
6.1. Tabla de comparación de datos de Tamaño y orden máximos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Carlier $a_1 > 0$ . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introducción

Hoy en día, el envío y recepción de la información de datos digitales a través de internet son más frecuentes. Las imágenes digitales, el vídeo y el audio han sido mejorados de tal forma que pueden ser capturados, almacenados, transmitidos y manipulados. Esto da lugar a una amplia gama de aplicaciones en la educación, el entretenimiento, medios de comunicación, la fabricación industrial, la medicina entre otros campos [1].

Los enfoques creativos para almacenar, acceder y distribuir datos han generado muchos beneficios para la multimedia digital, principalmente debido a propiedades de transmisión sin distorsión, almacenamiento compacto y edición fácil. Desafortunadamente, dentro de la comunicación multimedia digital de libre acceso, también ofrece oportunidades para llevar a cabo robo de material con derechos de autor. Por lo tanto, la idea de usar una marca de agua digital para detectar y rastrear violaciones de derechos de autor ha estimulado un interés significativo entre ingenieros, científicos, abogados, artistas y editores, por nombrar algunos. Además, la incrustación de marca de agua, las operaciones de procesamiento de imágenes y los ataques criptográficos, se han vuelto muy activas en los últimos años. Por otra parte, las técnicas desarrolladas han crecido y mejorado de manera significativa [2].

### 1.1. Antecedentes

El término de marca de agua se deriva de la historia de la fabricación tradicional de papel. A finales del siglo XIII aproximadamente en la Edad Media se originó la industria del papel. Durante sus inicios se utilizaba una fibra húmeda, la cual se presionaba para expulsar el agua y obtener un contraste mejorado entre las áreas con marcas de agua y no marcadas en el papel formando un patrón particular. La marca de agua se utilizaba por primera vez para registrar la marca del papel de las

## 1. Introducción

---

fábricas que lo producían para que su autenticidad pudiera ser claramente reconocida [2].

En 1280, se empezó a utilizar la marca de agua en Italia con el propósito del registro de la marca del papel, técnica vigente al día de hoy. La marca de agua ha sido modificada y mejorada con el paso del tiempo, en 1400 comienza los primeros estándares de la marca de agua. Se empezó a establecer como marca de agua una imagen reconocida, esta era un payaso con un sombrero y dos campanas, con la que cada empresa le agregaba una modificación notable a la imagen que debería ser diferente a los demás. Posteriormente surgieron nuevas técnicas para realizar la marca de agua en papel, una de las más utilizadas fue la marca de agua de alambre. En 1559 fue utilizada para marcar diferentes patrones con relieve sobre el papel de manera similar. En 1672 se registra uno de los primeros libros científicos de botánica con marca de agua con un molde, parecida a la marca de agua de alambre sólo que esta no presentaba relieves en el papel. En Alemania en 1785, Hauerz muestra una marca de agua con una imagen de una sombra, la primera imagen de este tipo [3]. Años después en 1885 se presenta el primer sobre postal de papelería en Estados Unidos mostrando una marca de agua clara sobre papel. Posteriormente en 1953 surge una nueva forma de realizar el proceso de marca de agua con la invención de un sistema electrónico de control de la velocidad, donde se utilizaba un rodillo para realizar la marca durante la fabricación del papel, desarrollado por Robert Gladstone. Décadas más tarde en 1989, Komatsu y Tominaga propusieron las marcas de agua digitales para detectar copias ilegales [4]. Codificaron una etiqueta secreta en una copia usando ligeras modificaciones a la información redundante. Cuando la etiqueta coincide con la del propietario registrado, el proveedor puede asegurarse de que el titular del documento es la misma persona [5]. Durante todo ese tiempo la marca de agua no tenía suficiente importancia, fue hasta en año de 1990 que la marca de agua ganó gran interés a nivel internacional de tal manera que en 1996 se realizó la primera conferencia internacional sobre la historia, la función y el estudio de marcas de agua que se celebró en Roanoke, Virginia.

Actualmente, muchos países marcan su papel, monedas y sellos postales para dificultar la falsificación. La digitalización de nuestro mundo ha complementado las marcas de agua tradicionales con formas digitales. Mientras que las marcas de agua de papel se utilizaron originalmente para diferenciar fabricantes, las marcas de agua digitales actuales tienen usos más amplios, debido a la necesidad legal de proteger la propiedad intelectual del creador contra el uso no autorizado, la tecnología de marca de agua digital intenta reforzar los derechos de autor mediante la incorporación de un mensaje digital que puede identificar al creador o destinatarios. Cuando se rompe la encriptación, la marca de agua es esencialmente la tecnología para proteger el contenido

## 1. Introducción

---

multimedia no cifrado.

Hoy en día, se realizan conferencias, talleres y publicaciones en revistas científicas sobre marcas de agua, el interés científico en el mercado de agua digital ha llamado rápidamente la atención de la industria, ya que sus aplicaciones son ampliamente utilizadas, incluyen protección de derechos de autor, etiquetado, monitoreo, protección contra falsificaciones y acceso condicional.

Por otra parte, la marca de agua o incrustación de información está muy relacionada con la esteganografía. El término esteganografía se deriva de las palabras griegas "στεγανος" (steganos): cubierto u oculto, y "γραφος" (graphos): escritura. La esteganografía pretende ocultar la información en un medio de tal manera que nadie excepto el destinatario anticipado sabe la existencia de la información. Esto contrasta con la criptografía, que se centra en hacer que la información sea ilegible para cualquier persona no autorizada [6].

La historia de la esteganografía se remonta a la antigua Grecia, en la época de Heródoto (484 y el 425 a. C), en la que se registran los ejemplos más antiguos, donde el procedimiento de los mensajes ocultos se realizaban de dos formas: el tatuar la cabeza de un mensajero afeitado esperando que su cabello creciera de nuevo y luego enviarlo a entregar personalmente el mensaje; el destinatario afeitaría de nuevo la cabeza del mensajero para leer el contenido. Otro procedimiento incluyó grabar mensajes en tabletas de madera y cubrirlas con cera. Durante ese tiempo varios tipos de esteganografía y criptografía se prosperaron en la antigua India, y en la antigua China, generales militares y diplomáticos ocultaron mensajes secretos en finas hojas de seda o papel, ejemplo de esto fue la victoria de los chinos contra los mongoles durante la dinastía Yuan en la que se utilizó una técnica de esteganografía.

En el Festival de Otoño, la gente hizo mooncakes (como cubrir objetos) con un mensaje detallando un plan de ataque dentro (como información oculta). Los mooncakes fueron distribuidos a los miembros para informarles de la revuelta planeada, que derrocó con éxito el régimen mongol [7]. Tiempo después surgieron nuevas técnicas de esteganografía, las más destacadas en el siglo XV, donde el científico italiano Giovanni Battista descubrió cómo esconder un mensaje dentro de un huevo cocido, el método consistía en preparar una tinta mezclando una onza de sulfato de aluminio y vinagre, con esto escribía en la cáscara, la solución penetra en la cáscara porosa y deja un mensaje en la superficie de la albúmina del huevo duro, que sólo se puede leer si se quita la cascara. Más tarde en el siglo XVI el alemán Johannes Trithemius escribió el primer libro al que tituló "Steganographia", en él se trataban temas referentes a la ocultación de mensajes.

Durante la segunda guerra mundial fue necesario crear nuevas técnicas de esteganografía, tal es el caso de la utilización de microfilmes o una escritura con signos

## 1. Introducción

---

de puntuación para enviar mensajes (conocido como código morse), pero uno de los sistemas más ingeniosos se conoce con el nombre de "Null Cipher"; consiste en enviar un mensaje, de lo más común posible, y elegir cierta parte de él para ocultar el mensaje un ejemplo es el texto siguiente: "*Apparently neutral's protest is thoroughly discounted and ignored. Isman hard hit. Blockade issue affects pretext for embargo on by products, ejecting suets and vegetable oils*"; si tomamos la segunda letra de cada palabra aparece el mensaje: "Pershing sails from NYr June i (Pershing zarpa desde Nueva York el 1 de junio)". Otra técnica importante fue empleada a finales de los siglos XIX y XX, en la cual utilizan sustancias como jugo de limón, leche, vinagre entre otras para escribir en papel sin que fuera percibido fácilmente a simple vista, poco después esta técnica se fue perfeccionando utilizando diferentes sustancias hasta dar paso a lo que hoy en día se conoce como tinta invisible [8].

Las tintas invisibles más conocidas se pueden clasificar en dos categorías:

- Básicas: son aquellas sustancias con alto contenido en carbono como: leche, orina, zumo de limón, jugo de naranja, jugo de manzana, jugo de cebolla, solución azucarada, miel diluida, coca cola diluida, vino o vinagre, etc, básicamente, al calentar la superficie donde se escribió, el mensaje reacciona apareciendo en un tono café.
- Sofisticadas: son aquellas donde aparecen tras una reacción química, y otras al ser expuestas a la luz de cierta longitud de onda.

Finalmente a partir de finales del siglo XX hasta la fecha se ha se logró realizar proceso relacionados con la esteganografía digitalmente.

## 1.2. Objetivos

### Objetivo general

Desarrollo de un software para la marca de agua en video y en imágenes RGB de gran tamaño mediante momentos ortogonales discretos.

### Objetivos particulares

- Estudio y orígenes de los polinomios ortogonales discretos.
- Revisión de la teoría de momentos y su cómputo.
- Realizar un análisis comparativo de las distintas familias de momentos ortogonales discretos a través de la reconstrucción de imágenes en color.
- Reducir los errores inherentes de los momentos ortogonales en imágenes de gran tamaño.

## 1. Introducción

---

- Desarrollo de un algoritmo para la marca de agua en imágenes en video.
- Desarrollo de un algoritmo para la marca de agua en imágenes RGB.

### 1.3. Estado del arte

La marca de agua digital ha sido una de las principales áreas de investigación en la ocultación de la información debido a su capacidad para garantizar la integridad, autoridad y autenticidad de las obras multimedia, se ha propuesto como un posible sistema que proporcione protección y seguridad de identificación imperceptible que contiene información útil acerca de su propietario o receptor autorizado [9].

En los últimos años los métodos de marca de agua han crecido rápidamente, actualmente existen artículos y revistas en las que emplean diversas técnicas y aportan soluciones a algunos problemas de ataques de procesamiento de imágenes (compresión, adición de ruido, recorte, etc.) y algunas distorsiones geométricas (rotación, escalamiento, traslación, etc) [10]-[13], por ejemplo, los métodos especializados de marca de agua para tratar las distorsiones geométricas. Estos métodos se pueden clasificar en esquemas basados en plantillas [15], [16], normalizaciones de imágenes basadas en esquemas [17], [18] y esquemas utilizando propiedades invariantes [19]-[24]. Otra forma de hacer frente a estos problemas es mediante diversos métodos en los que emplean transformaciones, las más conocidas y usadas para la marca de agua son Transformada Discreta de Coseno[20], [26]-[27], Transformación de Wavelet Discreta[14], [28], [29], Transformada de Fourier [30]-[32] , Transformada de Fourier-Mellin [9], [19], [33]-[37], Transformada armónica polar [38], la Transformación de Ridgelet [40], Momentos armónicos radiales de Fourier [41], Momentos de Zernike[24], [42]-[44], [47]-[51] y Momentos geométricos [20]-[22],[35], [53]-[62], Momentos Tchebichef [20], [63], [64], Momentos de Krawtchouk [52], [58]-[60], [63], Momentos de Hahn [25], [39], [45], [46].

Algunos de los trabajos que han sido propuestos son:

- **Ali et al.** [14] presentó una transformada discreta Wavelet óptima al valor de la descomposición (DWT-SVD) basado en imagen de marca de agua utilizando el sistema auto adaptativo de evolución diferencial (SDE).
- **Tsung-Han et al.** [26] utiliza la transformación discreta coseno para realizar la incrustación de la marca de agua binaria mediante un esquema basado en las relaciones vecinas de un bloque DCT cuantificado para autenticar datos comprimidos, tales como imágenes JPEG.

## 1. Introducción

---

- **Savelonas et al. [30]** emplearon coeficientes de Fourier para el análisis de imagen basado en momentos y la transformación de Fourier fraccional para la incrustación de marca de agua. Este enfoque mantiene las ventajas de las representaciones de dominio espacial y frecuencial, ofrece dos grados de libertad adicionales asociados con los ángulos fraccionarios de transformación de Fourier, mientras que proporciona una mayor detección de las marcas de agua incrustadas.
- **Li et al.[38]** presentó un esquema de marca de agua de imagen invariante mediante la introducción de la transformación armónica polar (PHT). En primer lugar, se investigan las propiedades invariables de los PHT y se modifica un subconjunto de los PHTs exactos de acuerdo con la secuencia de marca de agua binarias.
- **Ren et al. [41]** introdujeron los momentos de Fourier armónicos radiales (RHFMs) pertenecientes a la clase de ORIMs. Los RHFMs soportan características inherentes como magnitud en varianza, redundancia mínima de información y resiliencia al ruido los cuales son esenciales en el desarrollo de esquemas de marcas de agua invariantes.

Recientemente los momentos y los momentos invariantes han encontrado extensas aplicaciones en el campo de marca de agua en imagen [53].

Los momentos son descriptores del contenido de una imagen, los cuales tienen la ventaja de reconstruir completamente la imagen inicial después de incrustar información de marca de agua. Algunos de estos trabajos se describen a continuación,

- **Kim y Lee [24]**, propuso un patrón de marca de agua de bits se incrusta en la imagen del host modificando algunos ZMs de bajo orden.
- **M.Farzam et al. [49]** propuso una técnica de marca de agua basada en momentos Zernike que divide la imagen dada en anillos concéntricos y la señal de marca de agua se agrega a los momentos de cada anillo. La imagen de la marca de agua se obtiene reconstruyendo la imagen a partir de los momentos similares de los anillos céntricos.
- **Hyung Shin Kim et al. [50]** propuso un esquema robusto de la marca de agua usando momentos del Zernike, logrando invariancia a la rotación tomando la magnitud de los momentos.
- **Farzam y Shirani [51]** investigaron el uso de los momentos de Zernike (ZMs) para el marcado de agua de imágenes multimedia e incorporan la marca de agua

## 1. Introducción

---

binaria en sub blocks de la imagen a proteger, sin embargo, sufre de una enorme carga computacional y mala calidad de las imágenes reconstruidas debido a las transformaciones inversas de los momentos de Zernike.

Por otra parte, se han realizado trabajos con momentos geométricos,

- **Papakostas et al.** [53], [59] aplicó momentos de imagen para la inserción de marca de agua, incluyendo nuevas familias de momentos con capacidades de descripción mejorada en comparación con los momentos de Zernike. La técnica introducida utiliza un algoritmo genético para optimizar el conjunto de parámetros que influyen significativamente en las propiedades de la localidad junto con el rendimiento general del procedimiento de marca de agua.

De igual forma inserta una marca de agua en los momentos invariantes de Krawtchouk significativos de la imagen original y la marca de agua, los momentos de Krawtchouk son locales, es decir, la marca de agua incrustada afecta solamente a una porción seleccionada de la imagen original, que puede ser decidido por el usuario.

- **Alghoniemy y Tewfik** [54] son los pioneros en incorporar invariantes de momentos geométricos para la marca de agua robusta. Utilizaron dos de los siete momentos invariantes geométricos propuestos por Hu [55] para incorporar una marca de agua no informativa robusta contra la traslación, el escalamiento y rotación.
- **Elshoura et al.** [65] examinó el problema de la reconstrucción de la imagen ruidosa mediante momentos ortogonales, y presentó un estudio comparativo empírico de los momentos de Tchebichef y Zernike en aplicaciones de marcas de agua.
- **Venkataramana et al.** [63] propuso un método de marca de agua robusto RST que utiliza momentos invariantes de Krawtchouk para la construcción de marca de agua. La novedad de este método radica en el uso de los momentos invariantes en la etapa de detección, mientras que la inserción se realiza en el espacio de los momentos y la imagen de marca de agua se calcula mediante reconstrucción.

### 1.4. Trabajos derivados de la tesis

- Presentación de cartel en noveno Congreso Internacional de Investigación, “Reconstrucción de imágenes biomédicas de color mediante momentos rectangulares ortogonales discretos clásicos”.

## 1. Introducción

---

- Rivera-López, J. S., & Bello, C. C. “Efficient encryption of image data in video sequences using discrete orthogonal moments”. In Applications of Digital Image Processing XL (Vol. 10396, p. 103962Z). International Society for Optics and Photonics.
- César Camacho-Bello, José. S. Rivera Lopez, “Some computational aspects of Tchebichef moments for higher orders”, Pattern Recognition Letters, (en revisión).

### 1.5. Estructura de la tesis

A continuación se muestra el contenido de este trabajo de tesis estructurado de la siguiente manera:

**Capítulo 2:** Se presenta una descripción sobre la marca de agua y esteganografía digital, de igual forma se muestra una clasificación de la marca de agua con base a sus características que tiene y a sus diferentes aplicaciones; a demás, se presentan técnicas que han sido implementadas para realizar el marcado de agua.

**Capítulo 3:** Se menciona una breve introducción de la ecuación hipergeométrica para el cálculo de los polinomios ortogonales clásicos, la propiedad de la condición de ortogonalidad y el cálculo de los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner, Charlier y Racah mediante el uso de relaciones de recurrencia de tres términos.

**Capítulo 4:** Se presenta una revisión de la teoría de momentos y su representación matricial, así como el análisis de la capacidad de descripción de los momentos ortogonales discretos mediante la reconstrucción de imágenes.

**Capítulo 5:** Se presenta una reducción de los cálculos de los polinomios ortogonales discretos mediante una relación de recurrencia de tres términos con la finalidad de reducir costos computacionales y de eliminar problemas de propagación de error numérico durante el uso de fórmulas recursivas respecto a  $n$ , y se realiza un análisis la capacidad de descripción de los momentos ortogonales discretos mediante la reconstrucción de imágenes utilizando el cálculo reducido.

**Capítulo 6:** Se presenta un nuevo cálculo de los polinomios ortogonales discretos utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con la finalidad de eliminar la inestabilidad numérica durante el cálculo de momentos con altos ordenes conservando la propiedad de ortogonalidad. También, se muestran los algoritmos para el cómputo de cada familia de polinomios, así como una comparación de los órdenes y tamaños obtenidos con este nuevo cálculo. Finalmente se muestra la capacidad de descripción del cálculo de los momentos ortogonales discretos mediante

## 1. Introducción

---

la reconstrucción de imágenes.

**Capítulo 7:** Se presenta un nuevo algoritmo para realizar el marcado de agua en video y su recuperación mediante momentos ortogonales discretos, además se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto. De igual forma, se presenta el diseño de una aplicación de consola para la realización del marcado de agua y recuperación. Por otra parte, se presenta un nuevo algoritmo que permite la realización del marcado de agua y su recuperación en imágenes de gran tamaño mediante momentos ortogonales discretos. Finalmente se muestran los resultados de la marca de agua en imágenes de gran tamaño utilizando diferentes familias de polinomios.

**Capítulo 8:** Se presentan las conclusiones generales del trabajo de tesis y el trabajo a futuro.

# Bibliografía

- [1] Berghel, H., & O’Gorman, L. (1996). Protecting ownership rights through digital watermarking. *Computer*, 29(7), 101-103.
- [2] Shih, F. Y. (2017). *Digital watermarking and steganography: fundamentals and techniques*. CRC Press.
- [3] Katzenbeisser, S., & Petitcolas, F. (2000). *Information hiding techniques for steganography and digital watermarking*. Artech house.
- [4] Zheng, D., Liu, Y., Zhao, J., & Saddik, A. E. (2007). A survey of RST invariant image watermarking algorithms. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 39(2), 5.
- [5] Komatsu, N., & Tominaga, H. (1990). A proposal on digital watermark in document image communication and its application to realizing a signature. *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, 73(5), 22-33.
- [6] Johnson, N. F., Duric, Z., & Jajodia, S. (2001). *Information Hiding: Steganography and Watermarking-Attacks and Countermeasures: Steganography and Watermarking: Attacks and Countermeasures (Vol. 1)*. Springer Science & Business Media.
- [7] I.J.Cox.G. Deorr, Cox, I., Miller, M., Bloom, J., Fridrich, J., & Kalker, T. (2010). *Digital watermarking and steganography*. Morgan Kaufmann.
- [8] Lu, C. S. (2005). *Multimedia Security: Steganography and Digital Watermarking Techniques for Protection of Intellectual Property*.
- [9] Singh, C., & Ranade, S. K. (2013). A high capacity image adaptive watermarking scheme with radial harmonic Fourier moments. *Digital signal processing*, 23(5), 1470-1482.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [10] Bianchi, T., & Piva, A. (2013). Secure watermarking for multimedia content protection: A review of its benefits and open issues. *IEEE signal processing magazine*, 30(2), 87-96.
- [11] Cao, J., & Huang, J. (2012). Controllable secure watermarking technique for tradeoff between robustness and security. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 7(2), 821-826.
- [12] Mathon, B., Cayre, F., Bas, P., & Macq, B. (2014). Optimal transport for secure spread-spectrum watermarking of still images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(4), 1694-1705.
- [13] Khan, M. K. (2011). Research advances in data hiding for multimedia security. *Multimedia Tools and Applications*, 52(2-3), 257-261.
- [14] Ali, M., & Ahn, C. W. (2014). An optimized watermarking technique based on self-adaptive DE in DWT–SVD transform domain. *Signal Processing*, 94, 545-556.
- [15] Pereira, S., & Pun, T. (2000). Robust template matching for affine resistant image watermarks. *IEEE transactions on image Processing*, 9(6), 1123-1129.
- [16] Pereira, S., & Pun, T. (1999, September). Fast robust template matching for affine resistant image watermarks. In *Information Hiding* (pp. 199-210).
- [17] Dong, P., & Galatsanos, N. P. (2002, June). Affine transformation resistant watermarking based on image normalization. In *Image Processing. 2002. Proceedings. 2002 International Conference on* (Vol. 3, pp. 489-492). IEEE.
- [18] Lu, W., Lu, H., & Chung, F. L. (2010). Feature based robust watermarking using image normalization. *Computers & electrical engineering*, 36(1), 2-18.
- [19] Ruanaidh, J. J. O., & Pun, T. (1998). Rotation, scale and translation invariant spread spectrum digital image watermarking. *Signal processing*, 66(3), 303-317.
- [20] Deng, C., Gao, X., Li, X., & Tao, D. (2009). A local Tchebichef moments-based robust image watermarking. *Signal Processing*, 89(8), 1531-1539.
- [21] Seo, J. S., & Yoo, C. D. (2006). Image watermarking based on invariant regions of scale-space representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(4), 1537-1549.
- [22] Li, L., Guo, B., & Shao, K. (2007). Geometrically robust image watermarking using scale-invariant feature transform and Zernike moments. *Chinese Optics Letters*, 5(6), 332-335.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [23] Alghoniemy, M., & Tewfik, A. H. (2004). Geometric invariance in image watermarking. *IEEE transactions on image processing*, 13(2), 145-153.
- [24] Kim, H. S., & Lee, H. K. (2003). Invariant image watermark using Zernike moments. *IEEE transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 13(8), 766-775.
- [25] Zhou, J., Shu, H., Zhu, H., Toumoulin, C., & Luo, L. (2005). Image analysis by discrete orthogonal Hahn moments. *Image analysis and recognition*, 524-531.
- [26] Hsieh, T. H., Li, C. T., & Wang, S. (2003, November). Watermarking scheme for authentication of compressed image. In *Proceedings of SPIE (Vol. 5241, pp. 1-9)*.
- [27] Gonge, S. S., & Ghatol, A. (2016). Aggregation of Discrete Cosine Transform Digital Image Watermarking with Advanced Encryption Standard Technique. *Procedia Computer Science*, 89, 732-742.
- [28] Wang, X. Y., Yang, Y. P., & Yang, H. Y. (2010). Invariant image watermarking using multi-scale Harris detector and wavelet moments. *Computers & electrical engineering*, 36(1), 31-44.
- [29] Gauglitz, S., Höllerer, T., & Turk, M. (2011). Evaluation of interest point detectors and feature descriptors for visual tracking. *International journal of computer vision*, 94(3), 335-360.
- [30] Savelonas, M. A., & Chountasis, S. (2010). Noise-resistant watermarking in the fractional Fourier domain utilizing moment-based image representation. *Signal Processing*, 90(8), 2521-2528.
- [31] Deng, C., Li, J., & Gao, X. (2010). Geometric attacks resistant image watermarking in affine covariant regions. *Acta Automatic Sinica*, 26(2), 221-228.
- [32] Jiang, Y. J. (2011). Exponent moments and its application in pattern recognition. Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing.
- [33] Kang, X., Huang, J., & Zeng, W. (2010). Efficient general print-scanning resilient data hiding based on uniform log-polar mapping. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 5(1), 1-12.
- [34] Lin, C. Y., Wu, M., Bloom, J. A., Cox, I. J., Miller, M. L., & Lui, Y. M. (2001). Rotation, scale, and translation resilient watermarking for images. *IEEE Transactions on image processing*, 10(5), 767-782.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [35] Cheddad, A., Condell, J., Curran, K., & Mc Kevitt, P. (2010). Digital image steganography: Survey and analysis of current methods. *Signal processing*, 90(3), 727-752.
- [36] Geusebroek, J. M., Van den Boomgaard, R., Smeulders, A. W. M., & Geerts, H. (2001). Color invariance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(12), 1338-1350.
- [37] Mohammad, A. A. (2012). A new digital image watermarking scheme based on Schur decomposition. *Multimedia Tools and Applications*, 59(3), 851-883.
- [38] Li, L., Li, S., Abraham, A., & Pan, J. S. (2012). Geometrically invariant image watermarking using Polar Harmonic Transforms. *Information Sciences*, 199, 1-19.
- [39] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2003). Image analysis by Krawtchouk moments. *IEEE Transactions on image processing*, 12(11), 1367-1377.
- [40] Lowe, D. G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International journal of computer vision*, 60(2), 91-110.
- [41] Ren, H., Ping, Z., Bo, W., Wu, W., & Sheng, Y. (2003). Multidistortion-invariant image recognition with radial harmonic Fourier moments. *JOSA A*, 20(4), 631-637.
- [42] Xin, Y., Liao, S., & Pawlak, M. (2007). Circularly orthogonal moments for geometrically robust image watermarking. *Pattern Recognition*, 40(12), 3740-3752.
- [43] Xiang, S., Huang, J., Yang, R., Wang, C., & Liu, H. (2006, November). Robust audio watermarking based on low-order Zernike moments. In *IWDW* (Vol. 6, pp. 226-240).
- [44] Tzouveli, P. K., Ntalianis, K. S., & Kollias, S. D. (2006, April). Video Object Watermarking Based on Moments. In *Visual Content Processing and Representation: 9th International Workshop, VLBV 2005, Sardinia, Italy, September 15-16, 2005, Revised Selected Papers* (Vol. 3893, p. 68). Springer Science & Business Media.
- [45] Mukundan, R., Ong, S. H., & Lee, P. A. (2001). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing*, 10(9), 1357-1364.
- [46] Ahmad, S., Zhang, Q., Lu, Z. M., & Anwar, M. W. (2009, December). Feature-based watermarking using discrete orthogonal Hahn moment invariants. In *Proceedings of the 7th International Conference on Frontiers of Information Technology* (p. 38). ACM.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [47] Wang, X. Y., & Hou, L. M. (2010). A new robust digital image watermarking based on Pseudo-Zernike moments. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 21(2), 179-196.
- [48] Yuan, X. C., Pun, C. M., & Chen, C. L. P. (2013). Geometric invariant watermarking by local Zernike moments of binary image patches. *Signal Processing*, 93(7), 2087-2095.
- [49] Kantor, I. L., & Solodovnikov, A. S. (1989). *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*. Springer.
- [50] Barni, M. (2005). Effectiveness of exhaustive search and template matching against watermark desynchronization. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(2), 158-161.
- [51] Farzam, M., & Shirani, S. (2001). A robust multimedia watermarking technique using Zernike transform. In *Multimedia Signal Processing, 2001 IEEE Fourth Workshop on* (pp. 529-534). IEEE.
- [52] Zhang, L., Xiao, W., Qian, G., & Ji, Z. (2007). Rotation, scaling, and translation invariant local watermarking technique with Krawtchouk moments. *Chinese Optics Letters*, 5(1), 21-24.
- [53] Tsougenis, E. D., Papakostas, G. A., Koulouriotis, D. E., & Tourassis, V. D. (2012). Performance evaluation of moment-based watermarking methods: a review. *Journal of Systems and Software*, 85(8), 1864-1884.
- [54] Alghoniemy, M., & Tewfik, A. H. (2000, September). Image watermarking by moment invariants. In *Image Processing, 2000. Proceedings. 2000 International Conference on* (Vol. 2, pp. 73-76). IEEE.
- [55] Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE transactions on information theory*, 8(2), 179-187.
- [56] Singhal, N., Lee, Y. Y., Kim, C. S., & Lee, S. U. (2009). Robust image watermarking using local Zernike moments. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 20(6), 408-419.
- [57] Li, L. D., Guo, B. L., & Guo, L. (2009). Combining Interest Point and Invariant Moment for Geometrically Robust Image Watermarking. *Journal of Information Science & Engineering*, 25(2).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [58] Papakostas, G. A., Tsougenis, E. D., & Koulouriotis, D. E. (2010, July). Near optimum local image watermarking using Krawtchouk moments. In *Imaging Systems and Techniques (IST), 2010 IEEE International Conference on* (pp. 464-467). IEEE.
- [59] Papakostas, G. A., Tsougenis, E. D., & Koulouriotis, D. E. (2014). Moment-based local image watermarking via genetic optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 227, 222-236.
- [60] Zhang, L., Xiao, W. W., & Ji, Z. (2007). Local affine transform invariant image watermarking by Krawtchouk moment invariants. *IET Information Security*, 1(3), 97-105.
- [61] Golabi, S., Helfroush, M. S., Danyali, H., & Owjimehr, M. (2014). Robust watermarking against geometric attacks using partial calculation of radial moments and interval phase modulation. *Information Sciences*, 269, 94-105.
- [62] Nikolaidis, A. (2011, September). Affine transformation invariant image watermarking using moment normalization and radial symmetry transform. In *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on* (pp. 2729-2732). IEEE.
- [63] Venkataramana, A., & Raj, P. A. (2007, March). Image watermarking using Krawtchouk moments. In *Computing: Theory and Applications, 2007. ICCTA'07. International Conference on* (pp. 676-680). IEEE.
- [64] Chang, W. H., & Chang, L. W. (2010, October). Semi-fragile watermarking for image authentication, localization, and recovery using Tchebichef moments. In *Communications and Information Technologies (ISCIT), 2010 International Symposium on* (pp. 749-754). IEEE.
- [65] Elshoura, S. M., & Megherbi, D. B. (2013). Analysis of noise sensitivity of Tchebichef and Zernike moments with application to image watermarking. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 24(5), 567-578.
- [66] Komatsu, N., & Tominaga, H. (1988). Authentication system using concealed images in telematics. *Memoirs of the school of Science and Engineering, Waseda University*, 52, 45-60. Zheng, D., Liu, Y., Zhao, J., & Saddik, A. E. (2007). A survey of RST invariant image watermarking algorithms. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 39(2), 5.

## Capítulo 2

# Marca de agua digital y esteganografía

### 2.1. Introducción

La marca de agua y la esteganografía están muy relacionadas sin embargo, existen algunas diferencias entre los dos. La marca de agua principalmente se ocupa de la autenticación de la imagen, la información incrustada está relacionada con un atributo del portador y transmite información adicional. El principal objetivo del canal de comunicación es el propio portador, se utiliza a menudo siempre que la imagen está disponible para los usuarios que son conscientes de la existencia de la información oculta y pueden intentar eliminarla; mientras que la esteganografía trata de ocultar datos, los mensajes incrustados normalmente no tienen nada que ver con el portador que se utiliza simplemente como un mecanismo para transmitir el mensaje; El objetivo del canal de comunicación es el mensaje oculto y están diseñados para hacer que la información extremadamente importante sea imperceptible para cualquier interceptor.

### 2.2. Marca de agua digital

La marca de agua puede ser considerada como un diseño impreso en una hoja de papel durante la producción y ser utilizada para la identificación de derechos de autor. El diseño puede ser un patrón, un logotipo o alguna otra imagen; actualmente la mayoría de los datos se almacenan y se transmiten en forma digital, por lo tanto es cada vez más importante y complicado probar su autenticidad.

Como resultado, la marca de agua digital es un proceso en el cual la información arbitraria se codifica en una imagen de tal manera que sea imperceptible para los observadores, por tal motivo se ha propuesto como una herramienta adecuada

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

para identificar la fuente, el creador, el propietario, el distribuidor o el consumidor autorizado de un documento o una imagen. [1], [2], así como para detectar un documento o una imagen que se ha distribuido o modificado ilegalmente.

Una marca de agua digital, es un patrón de bits insertados. Las marcas de agua digitales a diferencia de las marcas de agua impresas y visibles, están diseñadas para ser invisibles para los espectadores; los bits incrustados en una imagen se dispersan por todas partes para evitar la identificación o modificación.

Por otra parte, el cifrado es el proceso de ocultar información para que sea ilegible para los observadores sin claves o conocimientos específicos, este método se denomina codificación de datos. La marca de agua y el cifrado pueden ser utilizados para diferentes propósitos, como lo son la protección de derechos de autor, monitoreo de radiodifusión y autenticación de datos, por tal motivo debe ser lo suficientemente robusta como para sobrevivir a la detección, compresión y otras operaciones que se pueden aplicar a un documento. Las características que deben presentar son: imperceptibilidad, seguridad, capacidad y robustez; un sistema de marca de agua ideal debe incrustar gran cantidad de información, pero sin degradación visible a la imagen original, por tal motivo, la marca de agua incrustada debe ser robusta a ataques intencionales ( ruido) o no intencionales (cambio de tamaño o compresión).

Muchos investigadores se han centrado en la seguridad y la robustez, pero rara vez en la capacidad de marca de agua [3], [4]; la seguridad como la robustez son importantes para que la marca de agua incrustada sea imperceptible e inamovible.

Mediante la inserción de la marca de agua es posible clasificarse en tres tipos: robusta, semifrágil y frágil. Una marca de agua robusta está diseñada para soportar ataques arbitrarios, maliciosos, tales como: escalado de la imagen, flexión, recorte, y la compresión con pérdidas [5]- [8], se utilizan generalmente para la protección de derechos de autor. Por otra parte una marca semifrágil es capaz de detectar modificaciones no autorizadas del contenido, al mismo tiempo que permite algunas operaciones de procesamiento de imagen [9]; una marca frágil detecta cualquier modificación no autorizada.

En general, se pueden integrar marcas de agua en dos tipos de dominios; el dominio espacial o el dominio frecuencial [6], [10], [12],[13]. En el dominio espacial podemos reemplazar los píxeles de la imagen original con los píxeles en la imagen con marca de agua [8], [9] y en el dominio frecuencial, podemos reemplazar los coeficientes de una imagen transformada con los píxeles de la imagen con marcas de agua [7], [14]. Las transformaciones del dominio de frecuencia más utilizadas son: la transformada de coseno discreta, la transformada de Fourier discreta y la transformada de Wavelet discreta([16], [17]).

### 2.3. Esteganografía digital

El propósito de la esteganografía digital es ocultar información digital en canales encubiertos y evitar la detección del mensaje oculto. El estegoanálisis, es el arte de descubrir la existencia de información oculta. Un sistema estegoanalítico es capaz de detectar imágenes al analizar las diversas características de las imágenes (contienen mensajes ocultos) y las imágenes originales (que no contienen mensajes ocultos). La criptografía es la práctica de codificar un mensaje para evitar que otros lo entiendan, mientras que la esteganografía es la práctica de ocultar el mensaje para que no pueda ser descubierto [2]. Para los sistemas digitales esteganográficos, el requisito fundamental es que la imagen sea perceptualmente indistinguible en la medida en que no genere sospechas, es decir, la información oculta sólo realiza ligeras modificaciones en el objeto cubierto. En general, los sistemas estegoanalíticos se pueden clasificar en sistemas del dominio espacial (SDE) y sistemas del dominio de la frecuencia (SDF). Esta primera clase [18], [19] se utiliza para la comprobación de imágenes comprimidas sin pérdidas mediante el análisis de las características estadísticas del dominio espacial; las imágenes comprimidas con pérdidas, como archivos JPEG, los SDF se utilizan para analizar las características estadísticas del dominio frecuencial [20], [21]). Westfeld y Pfitzmann han presentado dos SDF basado en ataques visuales [19]. Un ataque visual usa ojos humanos para inspeccionar las stegoimágenes comprobando sus planos de bits inferiores, mientras que un ataque de chi-cuadrado puede detectar automáticamente las características específicas generadas por la técnica de esteganografía de menor peso significativo.

### 2.4. Clasificación de marca de agua

La marca de agua es una tecnología que se ha estado desarrollando mediante diferentes técnicas que brindan características las cuales han permitido utilizar la marca de agua en diversas aplicaciones. Debido a esto es posible realizar clasificaciones de la marca de agua como la que se muestra en la Fig.2.1.

#### 2.4.1. Clasificación de marca de agua basada en sus características

De acuerdo con las características que presenta una marca de agua han realizado clasificaciones de la siguiente forma [2]:

- **Oculto y no oculto**

Las marcas de agua que son consideradas como ocultas son aquellas que no necesitan acceder a los datos originales sin marca de agua (imagen, audio, video, etc.)

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

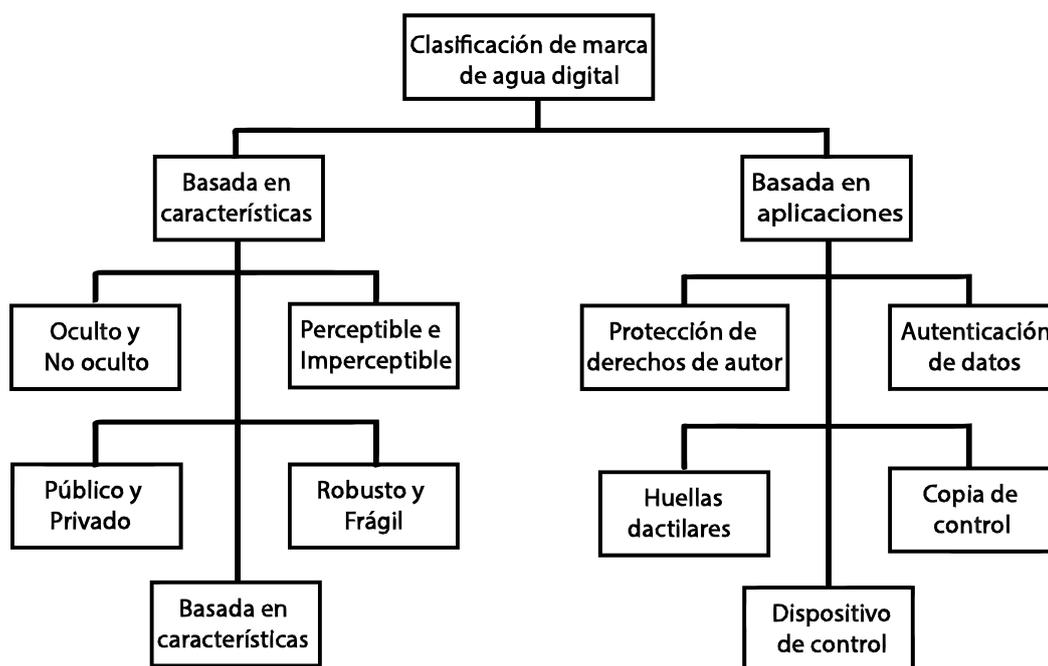


Figura 2.1: Clasificación de la marca de agua.

para realizar la recuperación de la marca. Mientras que las técnicas de marca de agua no ocultas, necesitan los datos originales para la extracción de la marca de agua. En general, las técnicas ocultas son más utilizadas en la mayoría de las aplicaciones.

### ■ Perceptible e imperceptible

Las marcas de agua consideradas como perceptible son aquellas en las que la marca de agua incrustada es visible para todos, por ejemplo, un logotipo insertado en una imagen. Para tener una marca de agua perceptible y segura debe ser difícil para eliminar y pueda resistir la falsificación, por el contrario, la marca de agua imperceptible es aquella que se incrusta mediante sofisticados algoritmos, es invisible a simple vista, y podría ser extraída.

### ■ Privado y público

Las marcas de agua privadas son aquellas que sólo usuarios autorizados pueden detectarlas. En otras palabras, las técnicas privadas de marca de agua invierten todos los esfuerzos para que sea imposible por usuarios no autorizados extraer la marca de agua a través de una clave pública.

Las técnicas de marca de agua públicas son aquellas que permiten a cualquiera leer la marca de agua. Las marcas de agua públicas están incrustadas en una ubicación

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

conocida por todos, por lo que el software de detección de marcas de agua puede extraer fácilmente la marca de agua escaneando toda la imagen. En general, las técnicas privadas de marca de agua son más robustas que las públicas, en las cuales los atacantes pueden eliminar o destruir fácilmente el mensaje una vez que se conoce el código incrustado o en la que cualquier usuario puede leer la marca de agua sin poder eliminarla.

### ▪ Robusto y público

La robustez de la marca de agua explica la capacidad de la marca de agua oculta para sobrevivir al uso diario legítimo o la manipulación del procesamiento de imágenes, como los ataques intencionales o no intencionales. Los ataques intencionales apuntan a destruir la marca de agua, mientras que los ataques no intencionales no pretenden modificarlo explícitamente. Para fines de inclusión, las marcas de agua se pueden clasificar en tres tipos: robusto, semifágil, y frágil. Las marcas de agua robustas están diseñadas para sobrevivir a modificaciones intencionales (maliciosas) y no intencionales (no maliciosas) de la imagen [8], [23] - [25]. Las modificaciones intencionales no amistosas incluyen la eliminación o alteración no autorizada de la marca de agua incrustada y la incorporación no autorizada de cualquier otra información. Las modificaciones no intencionales incluyen operaciones de procesamiento de imágenes tales como escalado, recorte, filtrado y compresión. Las marcas de agua robustas se utilizan generalmente para la protección del copyright para declarar la propiedad intelectual.

Las marcas de agua semifrágiles están diseñadas para detectar cualquier modificación no autorizada, al mismo tiempo que permite algunas operaciones de procesamiento de imágenes [26]. Se utilizan para la autenticación selectiva que detecta la distorsión ilegítima, ignorando las aplicaciones de la distorsión legítima. En otras palabras, las técnicas de marca de agua semifrágil pueden discriminar el procesamiento de imágenes, el ruido que preserva el contenido, la compresión con pérdida, el error de bit y el ruido de sal y pimienta.

Para fines de autenticación, se adoptan marcas de agua frágiles para detectar cualquier modificación no autorizada [11], [15], [22], [27], [28]. Las técnicas de marca de agua frágiles están relacionadas con la verificación completa de la integridad. La modificación más leve de la imagen con marca de agua alterará o destruirá la marca de agua frágil.

### ▪ Dominio especial y frecuencial

Hay dos dominios de imagen para incrustar marcas de agua: el dominio espacial y el dominio de frecuencia. En el dominio espacial [1], podemos simplemente insertar

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

una marca de agua en una imagen mediante el cambio de los niveles de gris de algunos píxeles en la imagen. Esto tiene las ventajas de tener baja complejidad y fácil implementación, pero la información insertada puede ser detectada fácilmente usando el análisis de imágenes. Podemos incrustar la marca de agua en los coeficientes de una imagen transformada en el dominio de la frecuencia [5], [23]. Las transformaciones incluyen: la transformada discreta coseno, transformada discreta de Fourier. Sin embargo, si incorporamos demasiados datos en el dominio de frecuencia, la calidad de la imagen se degradará significativamente.

Las técnicas de marca de agua del dominio espacial suelen ser menos robustas a ataques como la compresión y el ruido añadido. Sin embargo, tienen una complejidad computacional baja y por lo general pueden sobrevivir a ataques. Otra técnica consiste en combinar la marca de agua del dominio espacial y la marca de agua del dominio de frecuencias para aumentar la robustez y reducir su complejidad.

### 2.4.2. Clasificación de marca de agua basada en sus aplicaciones

Las técnicas de marca de agua representan una tecnología eficiente para garantizar la integridad de los datos, así como la autenticidad del origen de información con seguridad, la cual se puede incrustar utilizando una clave secreta en una imagen y de acuerdo a sus diferentes aplicaciones se pueden dividir en [2]:

- **Protección de derechos de autor**

Las marcas de agua para la protección de derechos de autor están diseñadas para identificar tanto la fuente de la imagen como sus usuarios autorizados. El cifrado de la imagen con clave pública, no evita completamente la copia no autorizada debido a la facilidad con que las imágenes pueden ser reproducidas a partir de documentos publicados anteriormente. Todos los documentos e imágenes cifrados deben descifrarse antes de la inspección. Una vez eliminado el cifrado, el documento puede ser legible y difundido. La idea de incrustar una marca de agua invisible para identificar la propiedad y los receptores, ha llamado la atención en las industrias de impresión y publicación.

Un método de protección de derechos de autor de un video consiste en añadir una marca de agua al flujo de vídeo que manda información sobre el remitente y el destinatario. De esta manera, la marca de agua de video puede permitir la identificación y rastreo de diferentes copias del vídeo.

- **Autenticación de datos**

Los medios tradicionales de autenticación de datos se aplican a un documento en forma de firma manuscrita. Dado que la firma se fija a un documento, es difícil de

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

modificar o transportar a otro documento. La comparación de dos firmas manuscritas puede determinar si fueron creadas por la misma persona.

Una firma digital reproduce la firma manuscrita y ofrece un grado aún mayor de autenticación. Un usuario puede firmar un documento digital cifrándolo con una clave privada y un esquema de cifrado. Las firmas digitales hacen uso de una clave pública o criptografía asimétrica, en la que se utilizan dos claves que están relacionadas entre sí de forma matemática. Los usuarios pueden verificar las firmas digitales utilizando sólo la clave pública, pero necesitarán la clave secreta para la generación de firmas digitales. Por lo tanto, la clave pública está disponible para cualquier persona que desee llevar a cabo la verificación, pero la clave privada sólo se da a las personas autorizadas.

### ▪ Huella digital

La tecnología biométrica, como la cara, las huellas dactilares y el reconocimiento del iris, desempeña un papel importante en los sistemas de identificación personal. La verificación de documentos digitales requiere algunas características fiables, tales como huellas dactilares. Las imágenes de huellas dactilares pueden aplicarse para proteger las imágenes contra ataques maliciosos, detectar imágenes fraudulentas y asegurar una transmisión segura. La huella dactilar en la marca de agua digital se utiliza generalmente para incrustar una identidad en una imagen de tal manera que es difícil de borrar. Esto permite al propietario de los derechos de autor rastrear piratas si la imagen se distribuye ilegalmente. En este uso, la marca de agua es un método de incrustar información oculta, conocida como la carga útil, dentro del contenido; el contenido puede ser audio, imagen o video, mientras que la carga útil puede identificar el propietario del contenido o el permiso de uso para el contenido. La carga útil de la marca de agua con huellas dactilares es un número de identificación único para cada destinatario, con el objetivo de determinar la fuente de copias distribuidas ilegalmente.

### ▪ Control de copia

El control de copias permite que los dispositivos de reproducción y grabación de DVD impidan automáticamente la reproducción de copias no autorizadas y la grabación no autorizada mediante la información de control detectada en el contenido de vídeo digital. Los datos digitales se transmiten desde un aparato del lado del transmisor a un aparato del lado del receptor a través de interfaces que permiten la transmisión y recepción de los datos digitales solamente entre aparatos autorizados. La información del control de copias indica un nivel de restricción de las copias, la cual se añade a los datos principales registrados en el medio de grabación digital de tal manera que los datos principales comprenden una primera porción que contiene

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

información de imagen o voz y una segunda porción que contiene la información del número de copias. La marca de agua digital está incrustada en la segunda parte de los datos principales.

### ▪ Dispositivos de control

Estas marcas de agua también se pueden incrustar en una señal de audio para controlar remotamente un dispositivo como un juguete o un aparato. El dispositivo está equipado con un detector apropiado para identificar señales ocultas, que pueden activar una acción o cambiar un estado del dispositivo. Estas marcas de agua se pueden utilizar con un dispositivo de compuerta de tiempo, por lo que la marca de agua contiene un intervalo de tiempo dentro del cual se permite al usuario realizar una acción tal como escribir o empujar un botón.

Por otra parte, la incorporación de marcas de agua de control en dispositivo para acceder a un recurso mediante un dispositivo de verificación, utiliza un sistema de marca de agua para incorporar un código de autorización en una señal y lo transmite (por ejemplo, como un programa de televisión o radio) a un dispositivo de verificación. En el dispositivo, el código de autorización se extrae de la señal con marca de agua y se autoriza por separado una operación a realizar en el recurso sobre el código de autorización extraído, que puede consistir en permiso para ejecutar un programa o copiar un objeto multimedia.

## 2.5. Algoritmos de marca de agua

Actualmente existen gran cantidad de algoritmos propuestos para lograr realizar la incrustación de marca de agua, así como su detección y decodificación. Estas técnicas de marca de agua utilizan el dominio espacial y el dominio frecuencial durante el proceso de marcado.

### 2.5.1. Sustitución de marca de agua en el dominio espacial

La marca de agua en el dominio espacial es el algoritmo de marca de agua más simple [11], [4]. Básicamente, las ubicaciones de incrustación, con los bits específicos de todos los píxeles, se predefinen antes de incrustar la marca de agua. Una vez que el destinatario obtiene la imagen con marca de agua, saben los lugares exactos para extraer la marca de agua. Durante el procedimiento de incrustación de marca de agua, se convierte primero en un flujo de bits. Entonces, cada bit del flujo de bits se incrusta en el bit específico de las ubicaciones seleccionadas para la imagen como se muestra en la Fig.2.2 .

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

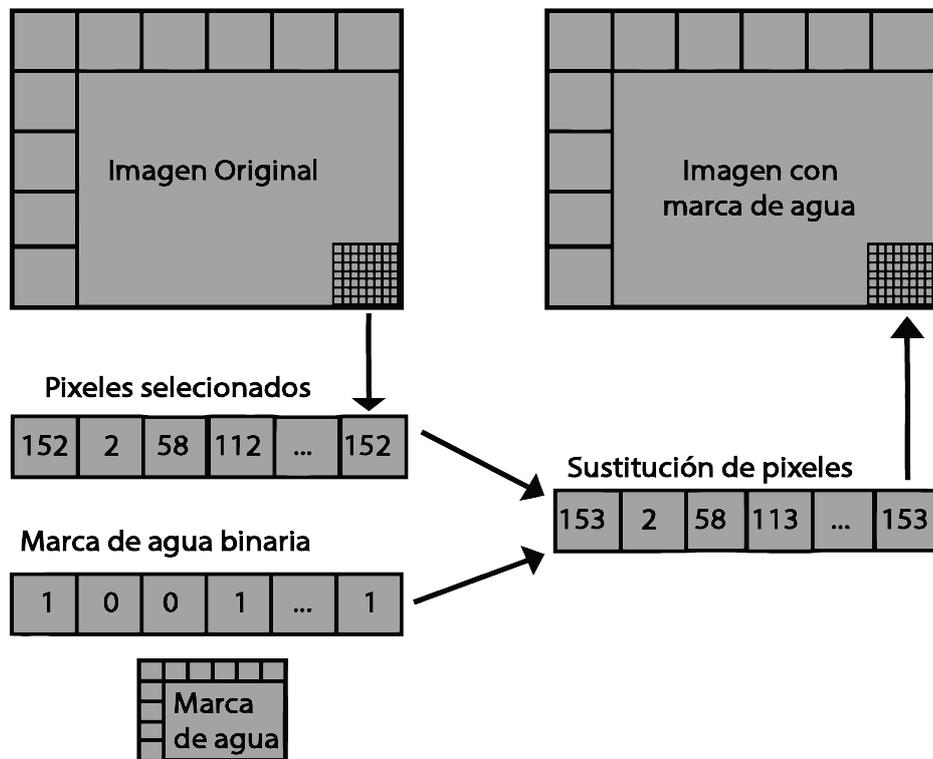


Figura 2.2: Sustitución de marca de agua en el dominio espacial.

Durante el procedimiento de extracción de la marca de agua, ya se conocen las ubicaciones de los píxeles específicos de la imagen con marca de agua. A continuación, cada valor de píxel se convierte en su formato binario. Finalmente, la marca de agua recoge el bit en el que está incrustado. La Fig. 2.3 muestra un ejemplo del procedimiento de extracción de marca de agua de marca de agua en el dominio espacial.

### 2.5.2. Sustitución de marca de agua en el dominio frecuencial

El esquema sustitutivo de marca de agua en el dominio de la frecuencia es básicamente similar al del dominio espacial, excepto que la marca de agua se incrusta en los coeficientes de la imagen transformada como se muestra en la Fig. 2.4.

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

---

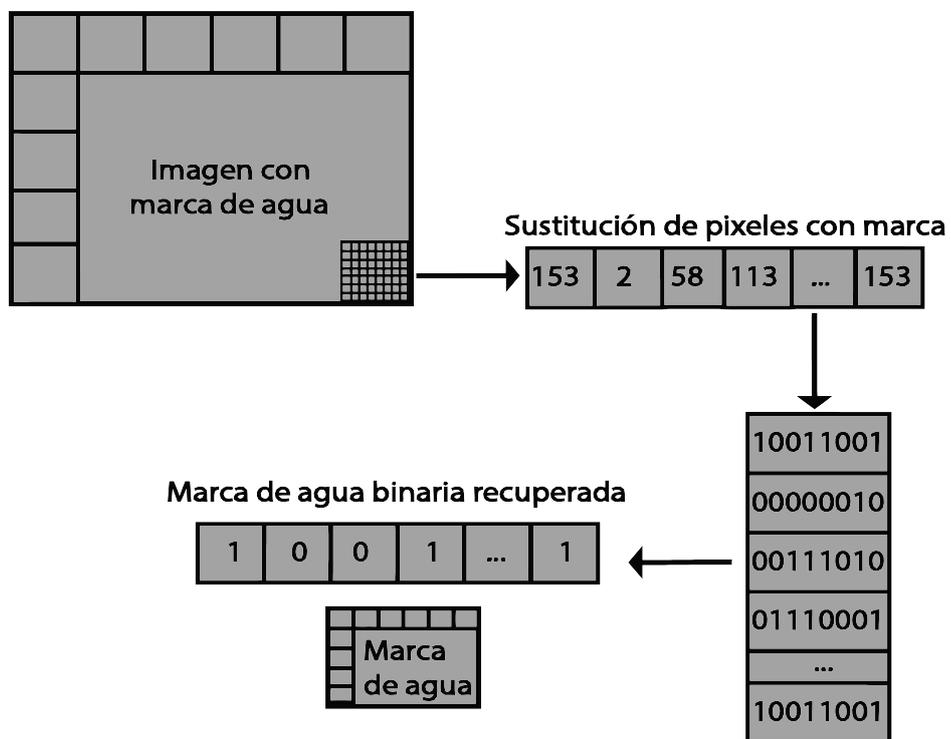


Figura 2.3: Extracción de marca de agua.

## 2. Marca de agua digital y esteganografía

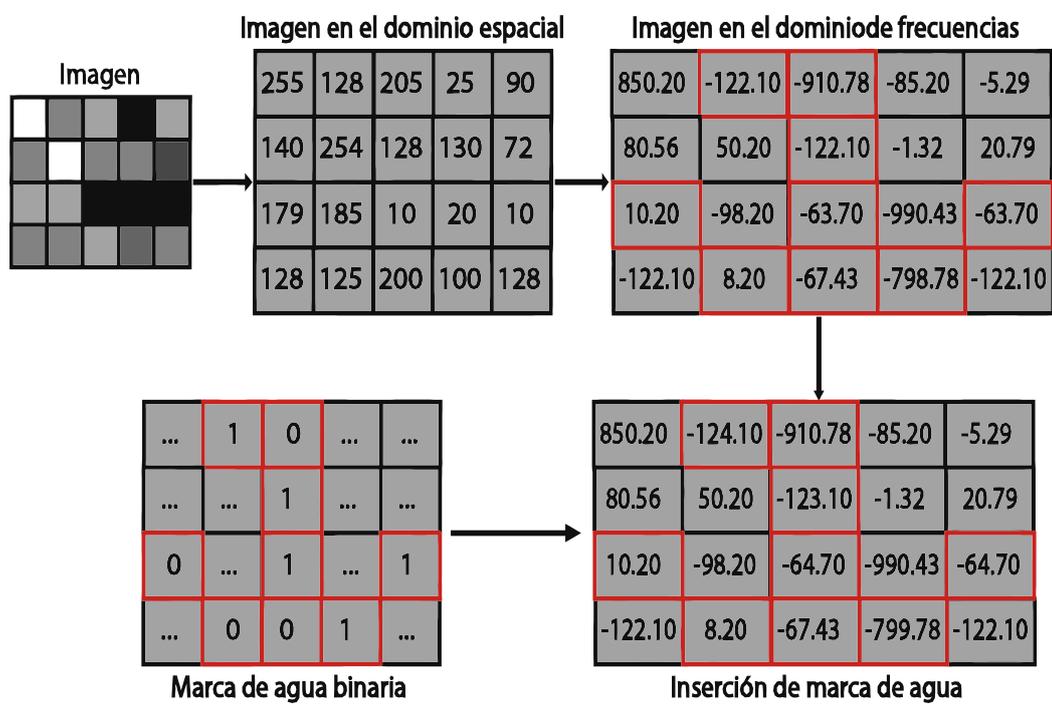


Figura 2.4: Incrustación de marca de agua en el dominio de frecuencias.

# Bibliografía

- [1] Berghel, H., & O’Gorman, L. (1996). Protecting ownership rights through digital watermarking. *Computer*, 29(7), 101-103.
- [2] Shih, F. Y. (2017). *Digital watermarking and steganography: fundamentals and techniques*. CRC Press.
- [3] Barni, M., Bartolini, F., De Rosa, A., & Piva, A. (1999). Capacity of the watermark channel: How many bits can be hidden within a digital image?. *Security and Watermarking of Multimedia Contents*, 3657, 437-448.
- [4] Shih, F. Y., & Wu, S. Y. (2003). Combinational image watermarking in the spatial and frequency domains. *Pattern Recognition*, 36(4), 969-975.
- [5] Cox, I. J., Kilian, J., Leighton, T., & Shamoon, T. (1996, September). Secure spread spectrum watermarking for images, audio and video. In *Image Processing, 1996. Proceedings., International Conference on* (Vol. 3, pp. 243-246). IEEE.
- [6] Cox, I. J., Kilian, J., Leighton, F. T., & Shamoon, T. (1997). Secure spread spectrum watermarking for multimedia. *IEEE transactions on image processing*, 6(12), 1673-1687.
- [7] Lin, S. D., & Chen, C. F. (2000). A robust DCT-based watermarking for copyright protection. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 46(3), 415-421.
- [8] Nikolaidis, N., & Pitas, I. (1998). Robust image watermarking in the spatial domain. *Signal processing*, 66(3), 385-403.
- [9] Acharya, U. R., Acharya, D., Bhat, P. S., & Niranjana, U. C. (2001). Compact storage of medical images with patient information. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 5(4), 320-323.
- [10] Langelaar, G. C., Setyawan, I., & Lagendijk, R. L. (2000). Watermarking digital image and video data. A state-of-the-art overview. *IEEE Signal processing magazine*, 17(5), 20-46.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] Wolfgang, R. B., & Delp, E. J. (1997, June). A watermarking technique for digital imagery: further studies. In *International Conference on Imaging, Systems, and Technology* (pp. 279-287).
- [12] Petitcolas, F. A., Anderson, R. J., & Kuhn, M. G. (1999). Information hiding-a survey. *Proceedings of the IEEE*, 87(7), 1062-1078.
- [13] Cox, I. J., & Miller, M. L. (2002). The first 50 years of electronic watermarking. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2002(2), 820936.
- [14] Huang, J., Shi, Y. Q., & Shi, Y. (2000). Embedding image watermarks in DC components. *IEEE transactions on circuits and systems for video technology*, 10(6), 974-979.
- [15] Pitas, I., & Kaskalis, T. H. (1995). Applying signatures on digital images. *Proc. IEEE Nonlinear Signal and Image Processing*, 460-463.
- [16] Singhal, N., Lee, Y. Y., Kim, C. S., & Lee, S. U. (2009). Robust image watermarking using local Zernike moments. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 20(6), 408-419.
- [17] Gonge, S. S., & Ghatol, A. (2016). Aggregation of Discrete Cosine Transform Digital Image Watermarking with Advanced Encryption Standard Technique. *Procedia Computer Science*, 89, 732-742.
- [18] Avcibas, I., Memon, N., & Sankur, B. (2003). Steganalysis using image quality metrics. *IEEE transactions on Image Processing*, 12(2), 221-229.
- [19] Pfitzmann, A. (1999). Attacks on steganographic systems breaking the steganographic utilities EzStego Jsteg Steganos and Stools and some lessons learned. In *Proc. 3rd Int. Workshop on Information Hiding* (pp. 1-76).
- [20] Farid, H. (2001). Detecting steganographic messages in digital images. Report TR2001-412, Dartmouth College, Hanover, NH.
- [21] Fridrich, J., Goljan, M., & Hogeia, D. (2003, June). New methodology for breaking steganographic techniques for JPEGs. In *Proceedings of SPIE* (Vol. 5020, pp. 143-155).
- [22] Caronni, G. (1995). Assuring ownership rights for digital images. In *Verlässliche IT-Systeme* (pp. 251-263). Vieweg+ Teubner Verlag.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [23] Cox, I. J., Kilian, J., Leighton, F. T., & Shamoon, T. (1997). Secure spread spectrum watermarking for multimedia. *IEEE transactions on image processing*, 6(12), 1673-1687.
- [24] Lin, S. D., & Chen, C. F. (2000). A robust DCT-based watermarking for copyright protection. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 46(3), 415-421.
- [25] Deguillaume, F., Voloshynovskiy, S., & Pun, T. (2003). Secure hybrid robust watermarking resistant against tampering and copy attack. *Signal Processing*, 83(10), 2133-2170.
- [26] Sun, Q., & Chang, S. F. (2002). Semi-fragile image authentication using generic wavelet domain features and ECC. In *Image Processing. 2002. Proceedings. 2002 International Conference on* (Vol. 2, pp. II-II). IEEE.
- [27] Wong, P. W. (1998, October). A public key watermark for image verification and authentication. In *Image Processing, 1998. ICIP 98. Proceedings. 1998 International Conference on* (Vol. 1, pp. 455-459). IEEE.
- [28] Celik, M. U., Sharma, G., Saber, E., & Tekalp, A. M. (2002). Hierarchical watermarking for secure image authentication with localization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(6), 585-595.

## Capítulo 3

# Polinomios ortogonales discretos

### 3.1. Introducción

Muchos de los problemas de la matemática aplicada, y problemas de la física teórica se presentan mediante ecuaciones de la siguiente forma [2]:

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma(x)$  y  $\tau(x)$  son polinomios de segundo y primer grado respectivamente y  $\lambda$  es una constante. Consideramos a la Ec. (3.1) como una ecuación de tipo hipergeométrica, y sus soluciones como funciones de tipo hipergeométrica.

Cualquier solución de la Ec. (3.1) satisface la siguiente propiedad fundamental [3] : *todas las derivadas de las funciones de tipo hipergeométrica son también funciones de tipo hipergeométrica.*

Para probar esto, se derivamos a la Ec. (3.1).

$$\frac{d(\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y)}{dy} = 0, \quad (3.2)$$

obtenemos, la función,

$$\sigma(x)y''' + y''\sigma'(x) + \tau(x)y'' + y'\tau'(x) + \lambda y' = 0, \quad (3.3)$$

realizando una agrupación de términos de la Ec. (3.3) se puede reescribir como,

$$\sigma(x)y''' + [\tau(x) + \sigma'(x)]y'' + [\lambda + \tau'(x)]y' = 0, \quad (3.4)$$

la cual satisface la Ec. (3.5) tomando  $v_1(x) = y'(x)$ ,

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0, \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \tau(x) + \sigma'(x) \\ \mu_1 &= \lambda + \tau'(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

de la cual,  $\tau_1(x)$  es un polinomio de primer grado, y  $\mu_1$  es una variable independiente, note que la Ec. (3.5) es una ecuación de tipo hipergeométrica.

Dejando  $v_1(x)$  como una solución de la Ec. (3.5). Si la función  $v_1(x)$  fue la derivada de una solución  $y(x)$  de la Ec. (3.1), de acuerdo con esta ecuación las funciones  $y(x)$  y  $v_1(x)$  estarían relacionadas de la siguiente forma [3],[4]

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)v_1' + \tau'(x)v_1]. \quad (3.7)$$

Se puede demostrar que la función  $y(x)$  definida por esta fórmula realmente satisfice la Ec. (3.1) y que su derivada es  $v_1(x)$ , como se muestra a continuación mediante la derivada de la Ec. (3.7),

$$\frac{d}{dy} \left[ y(x) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)v_1' + \tau'(x)v_1] \right] \quad (3.8)$$

resolviendo la Ec. (3.8) obtenemos,

$$\lambda y' = -\sigma(x)v_1'' - v_1'\sigma'(x) - \tau(x)v_1' - v_1\tau'(x) \quad (3.9)$$

nuevamente reagrupando terminos la Ec. (3.9) como,

$$\lambda y' = -\sigma(x)v_1'' - [\sigma'(x) - \tau(x)]v_1' - v_1\tau'(x) \quad (3.10)$$

utilizando la Ec. (3.6) en la Ec. (3.10) obtenemos,

$$\lambda y' = -[\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \tau'(x)v_1] = \lambda v_1, \quad (3.11)$$

donde  $y' = v_1(x)$  y sustituyendo  $v_1 = y'(x)$  en la expresión original para  $y(x)$  se obtiene Ec. (3.1) para  $y(x)$ .

De manera similar diferenciando la Ec. (3.1)  $n$  veces podemos obtener una ecuación de tipo hipergeométrica para la función  $v_n(x) = y^n(x)$ , [3], [5]:

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0, \quad (3.12)$$

donde

$$\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x), \quad (3.13)$$

$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''. \quad (3.14)$$

En esta parte, cada solución de Ec. (3.12) para  $\mu_k \neq 0$  y  $(k = 0, 1, \dots, n-1)$  puede ser representada en forma  $v_n(x) = y^n(x)$ , donde  $y(x)$  es una solución de la Ec. (3.1) [3].

Muchas de las funciones especiales conocidas se pueden representar en términos de la función hipergeométrica [6]. Tal es el caso de las familias de polinomios ortogonales clásicos, estas familias de polinomios, tanto continuos como discretos, admiten una representación en términos de series hipergeométricas [7], la cual está definida de la siguiente forma,

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.15)$$

donde  $(a)_n$  representa la función de Pochhammer expresada como,

$$a_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a).$$

### 3.2. Polinomios ortogonales discretos clásicos

Los polinomios de espacio uniforme son definidos como la solución de la siguiente ecuación diferencial [2], [3], [7].

$$\sigma(x)\Delta\nabla p_n(x) + \tau(x)\Delta p_n(x) + \lambda_n p_n = 0, \quad (3.16)$$

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

donde  $\Delta p_n(x) = p_n(x+1) - p_n(x)$ ,  $\nabla p_n(x) = p_n(x) - p_n(x+1)$  denotan el operador hacia adelante y hacia atrás,  $\sigma(x)$  y  $\tau(x)$  son funciones de segundo y primer grado, respectivamente,  $\lambda_n$  es una constante apropiada.

Los polinomios ortogonales clásicos con una variable discreta satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos,

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n+1}(x) + \gamma_n p_{n+1}(x), \quad (3.17)$$

donde  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  son los coeficientes de cada familia de polinomios discretos.

La propiedad básica de los polinomios  $p_n(x)$  es que satisfacer la condición de ortogonalidad de la forma discreta

$$\sum_{x=0}^s p_n(x)p_m(x)w(x) = d_n^2 \cdot \delta_{mn}, \quad 0 \leq m, n \leq s, \quad (3.18)$$

donde  $w(x)$  es una función de peso,  $d_n^2 = \|p_n(x)\|^2$  y  $\delta_{mn}$  denota la delta de Kronecker. Algunos de los polinomios discretos clásicos son: los polinomios de Tchebichef, polinomios de Krawtchouk, polinomios de Hahn, polinomios de Meixner, polinomios de Charlier y polinomios de Racah.

Los polinomios ortogonales normalizados se pueden obtener con la norma cuadrada y la función de peso,

$$\tilde{p}_n(x) = p_n(x) \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}}, \quad n = 0, 1, \dots, s \quad (3.19)$$

por lo tanto, la condición de ortogonalidad de los polinomios ortonormalizados están dados por

$$\sum_{x=0}^s \tilde{p}_m(x)\tilde{p}_n(x) = \delta_{mn}, \quad 0 \leq m, n \leq s, \quad (3.20)$$

Nikiforov y Uvarov introducen parámetros base de los polinomios ortogonales discretos clásicos [2]; como se muestran en la Tabla 3.1.

### 3. Polinomios ortogonales discretos

$p_n(x)$	$t_n(x; N)$	$k_n(x; N)$	$h_n^{(a,b)}(x)$	$\tilde{w}_n^{(\beta,\mu)}(x)$	$c_n^{a_1}(x)$
$s$	$N-1$	$N$	$N-1$	$\infty$	$\infty$
$\sigma(x)$	$x(N-x)$	$x$	$x(N+a-x)$	$x$	$x$
$\tau(x)$	$N-1-2x$	$\frac{Np-x}{(1-p)}$	$(b+1)(N-1)-(a+b+2)x$	$\beta\mu-x(1-\mu)$	$a_1-x$
$\lambda_n$	$n(n+1)$	$\frac{n}{1-p}$	$n(a+b+n+1)$	$n(1-\mu)$	$n$
$\beta_n$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{(-1)^n(1-p)^n}{n!}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{1}{\mu^n}$	$\frac{1}{a_1^n}$
$w_n(x)$	$\frac{\Gamma(N-x)\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$	$\frac{N!p^{x+n}(1-p)^{N-n-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-n-x)}$	$\frac{\Gamma(N+a-x)\Gamma(n+b+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$	$\frac{\mu^{x+n}\Gamma(n+\beta+x)}{\Gamma(\beta)x!}$	$\frac{e^{a_1} a_1^{x+n}}{x!}$
$d_n^2$	$\frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)}$	$\frac{N!}{n!(N-n)!} (p(1-p))^n$	$\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)(a+b+n+1)^n}{(a+b+2n+1)n!(N-n-1)}$	$\frac{n!(\beta)^n}{\mu^n(1-\mu)^\beta}$	$\frac{n!}{a_1^n}$
$\alpha_n$	$\frac{n-1}{2(2n+1)}$	$n+1$	$\frac{(n+1)(a+b+n+1)}{(a+b+2n+1)(a+b+2n+2)}$	$\frac{\mu}{\mu-1}$	$-a_1$
$\beta_n$	$\frac{N-1}{2}$	$n+p(N-2n)$	$\frac{a-b+2N-2}{4} + \frac{(a^2+b^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n)(a+b+2n+2)}$	$\frac{n+\mu(n+\beta)}{1-\mu}$	$n+a_1$
$\gamma_n$	$\frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$	$p(1-p)(N-n+1)$	$\frac{(a+n)(b+n)(a+b+N+n)(N-n)}{(a+b+2n)(a+b+2n+1)}$	$\frac{n(n-1+\beta)}{\mu-1}$	$-n$

Tabla 3.1: Tabla de datos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Charlier  $a_1 > 0$

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

Los polinomios se definen en el siguiente dominio discreto

$$G = \{x \mid 0 \leq x \leq s\}, \quad (3.21)$$

donde  $s = N - 1$  para los polinomios de Tchebichef y Hahn, y  $s = N$  para polinomios de Krawtchouk. Por otra parte, los polinomios de Meixner y Charlier pertenecen a un dominio discreto infinito.

#### 3.2.1. Polinomios de Tchebichef

Apartir de la Ec. (3.16) y la Tabla 3.1 se puede obtener la ecuación diferencial parcial lineal de primer orden de los polinomios ortogonales de Tchebichef  $t_n(x; N)$ , la cual está definida como,

$$\begin{aligned} x(N-x)\Delta\nabla t_n(x; N) + \\ (N-1-2x)\Delta t_n(x; N) + n(n+1)t_n(x; N) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Los polinomios de Tchebichef de orden  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , son también definidos mediante la función hipergeométrica como,

$$\begin{aligned} t_n(x; N) &= (1-N)_n {}_3F_2(-n, -x, 1+n; 1, 1-N; 1) \quad , \\ n, x, y &= 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $(a_k)$  es la función de Pochhammer. El orden cero y primero de los polinomios de Tchebichef normalizados pueden ser calculados de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0(x; N) &= \sqrt{\frac{1}{N}}, \\ \tilde{t}_1(x; N) &= (2x - N + 1) \sqrt{\frac{3}{N(N^2 - 1)}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

En la Fig. 3.1 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Tchebichef.

### 3. Polinomios ortogonales discretos

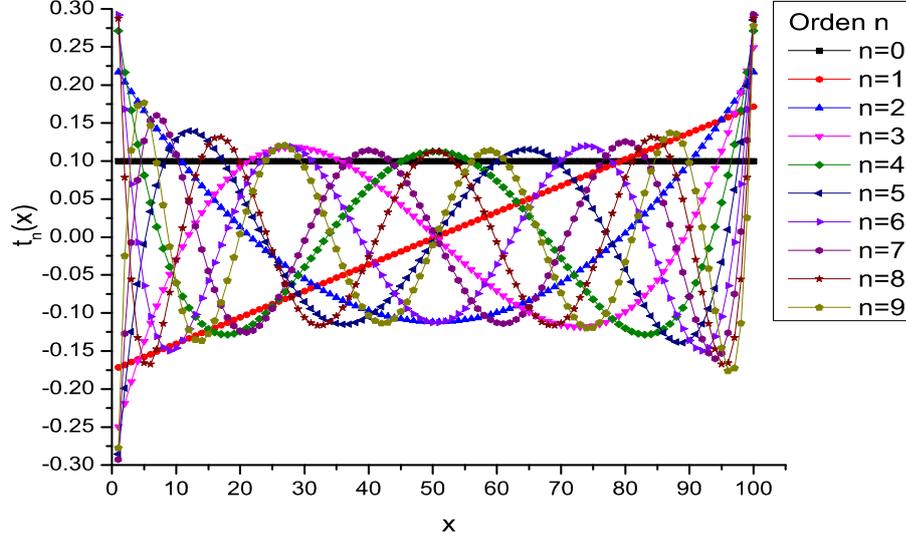


Figura 3.1: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Tchebichef con  $N=100$ .

#### 3.2.2. Polinomios de Krawtchouk

Los polinomios ortogonales de Krawtchouk con una variable  $k_n(x; p, N)$  satisfacen la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden,

$$(1-p)x\Delta\nabla k_n(x; p, N) + (Np-x)\Delta k_n(x; p, N) + nk_n(x; p, N) = 0 \quad 0 < p < 1, \quad (3.25)$$

donde  $p$  es el valor de probabilidad establecido en un rango de entre 0 y 1. También, los polinomios de Krawtchouk se definen mediante,

$$k_n(x; p, N) = {}_2F_1(-n, -x; -N; 1/p). \quad (3.26)$$

El orden cero y primer orden de los polinomios de Krawtchouk normalizados pueden ser calculados como,

$$\begin{aligned} \tilde{k}_0(x; p, N) &= \sqrt{\frac{N!p^x(1-p)^{N-x}}{x!(N-x)!}}, \\ \tilde{k}_1(x; p, N) &= (-p(N-x) + x(1-p)) * \sqrt{\frac{(N-1)!p^{x-1}(1-p)^{N-x-1}}{x!(N-x)!}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3. Polinomios ortogonales discretos

En la Fig. 3.2 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Krawtchouk.

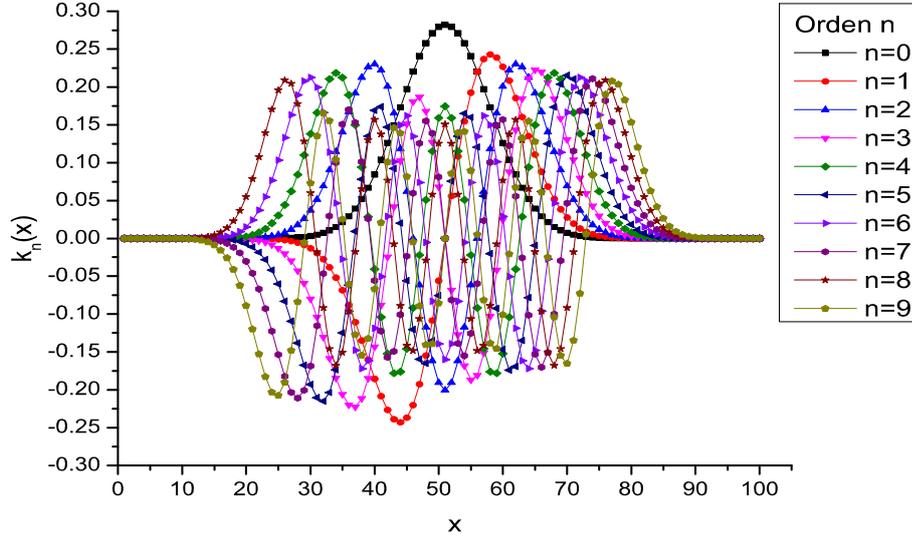


Figura 3.2: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Krawtchouk con  $N=100$  y  $p=0.5$ .

#### 3.2.3. Polinomios de Hahn

Los polinomios ortogonales de Hahn con una variable  $h_n^{(a,b)}(x; N)$  satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden

$$n(a+b+n+1)h_n^{(a,b)}(x; N) + [(b+1)(N-1) - (a+b+2)x]\Delta h_n^{(a,b)}(x; N) + x(N+a-x)\Delta\nabla h_n^{(a,b)}(x; N) = 0, \quad (3.28)$$

donde los parámetros  $a$  y  $b$  son restringidos para  $a > 0$  y  $b > 0$ . Los polinomios de Hahn de orden  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , son también definidos mediante la función hipergeométrica como,

$$h_n^{(a,b)}(x; N) = \frac{(-1)^n (b+1)_n (N-n)_n}{n!} {}_3F_2(-n, -x, n+1+a+b, b+1, 1-N; 1). \quad (3.29)$$

Apartir de polinomios Hahn posible es obtener algunas familias de polinomios clásicos discretos, tal es caso cuando  $a = b = 0$ , se tiene como resultado los

### 3. Polinomios ortogonales discretos

polinomios discretos de Tchebichef, por otra parte se pueden obtener los polinomios de Krawtchouk mediante el limite de los polinomios de Hahn cuando  $a = b = \infty$ . El orden cero y primero normalizados se puede calcular de la siguiente manera,

$$\tilde{h}_0^{(a,b)}(x; N) = \sqrt{\frac{w(x)}{d_0^2}}, \quad (3.30)$$

$$\tilde{h}_1^{(a,b)}(x; N) = ((a + b + 2)x - (b + 1)(N - 1))\sqrt{\frac{w(x)}{d_0^2}},$$

En la Fig. 3.3 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Hahn.

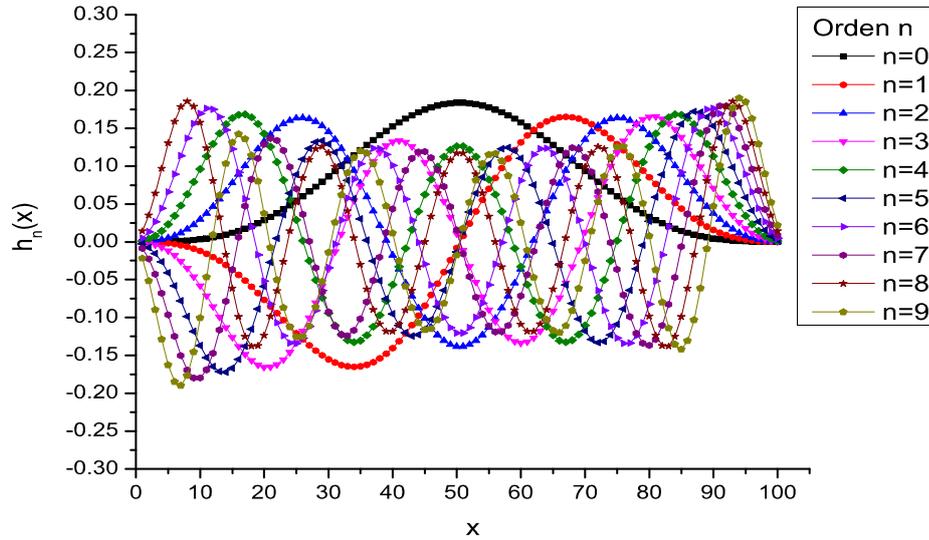


Figura 3.3: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Hahn con  $N=100$ ,  $a=10$  y  $b=10$ .

#### 3.2.4. Polinomios de Meixner

Los polinomios ortogonales de Meixner con una variable  $\varpi_n^{(\beta,\mu)}(x)$  satisfacen la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden

$$x\Delta\nabla\varpi_n^{(\beta,\mu)}(x) + (\beta\mu - x(1 - \mu))\Delta\varpi_n^{(\beta,\mu)}(x) + n(1 - \mu)\varpi_n^{(\beta,\mu)}(x) = 0, \quad (3.31)$$

donde  $\beta$  y  $\mu$  son restringidos para  $0 < \mu < 1$  y  $\beta > 0$ .

### 3. Polinomios ortogonales discretos

Los polinomios enésimos de Meixner son también definidos mediante la función hipergeométrica como,

$$\varpi_n^{(\beta, \mu)}(x) = (\beta)_{n2} F_1(-n, -x; \beta; 1 - \frac{1}{\mu}). \quad (3.32)$$

El orden cero y primero de los polinomios normalizados de Meixner pueden ser calculados como,

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_0^{(\beta, \mu)}(x) &= \sqrt{\frac{w(x)}{d_0^2}} = \sqrt{\frac{\mu^x(\beta+x-1)!}{x!(\beta-1)!} (1-\mu)^\beta}, \\ \tilde{\varpi}_1^{(\beta, \mu)}(x) &= (\beta+x-\frac{x}{\mu}) \sqrt{\frac{w(x)}{d_1^2}} = (\beta+x-\frac{x}{\mu}) * \\ &\quad \sqrt{\frac{\mu^x(\beta+x-1)! \mu(1-\mu)^\beta}{x!(\beta-1)! \beta}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

En la Fig. 3.4 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Meixner.

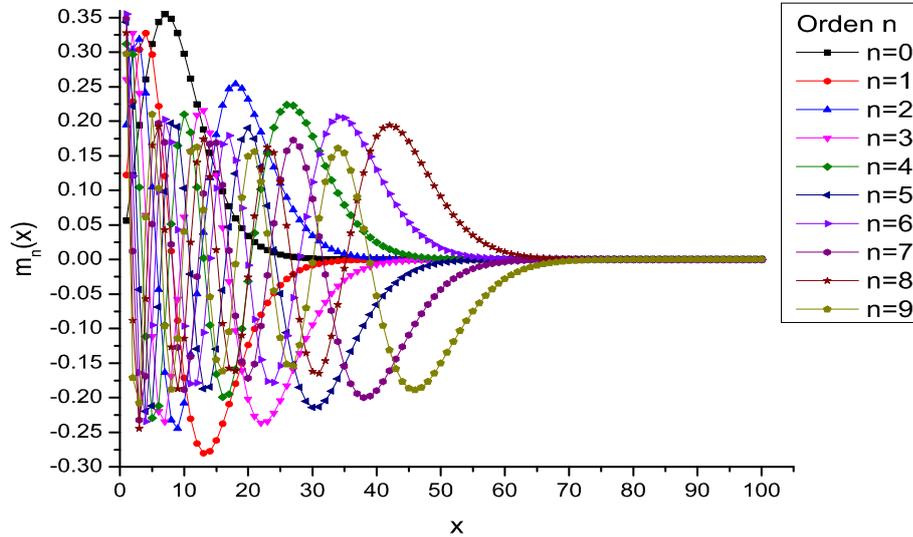


Figura 3.4: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Mexnier con  $N=100$ ,  $\mu=0.43$  y  $\beta=14$ .

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

#### 3.2.5. Polinomios de Charlier

Los polinomios ortogonales de Charlier con una variable  $c_n^{a_1}(x)$  satisfacen la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden

$$x\Delta\nabla c_n^{a_1}(x) + (a_1 - x)\Delta c_n^{a_1}(x) + nc_n^{a_1}(x) = 0, \quad (3.34)$$

donde  $a_1$  is restringido para  $a_1 < 0$ . Los polinomios enésimos Charlier se definen mediante el uso de la función hipergeométrica como,

$$c_n^{a_1}(x) = {}_2F_0(-n, -x; \frac{-1}{a_1}). \quad (3.35)$$

El orden cero y primero de los polinomios de Charlier normalizados pueden ser calculados como,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0^{a_1}(x) &= \sqrt{\frac{w(x)}{d_0^2}} = \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^x}{x!}}, \\ \tilde{c}_1^{a_1}(x) &= \frac{a_1 - x}{a_1} \sqrt{\frac{w(x)}{d_1^2}} = \frac{a_1 - x}{a_1} \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^{x+1}}{x!}}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

En la Fig. 3.5 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Charlier.

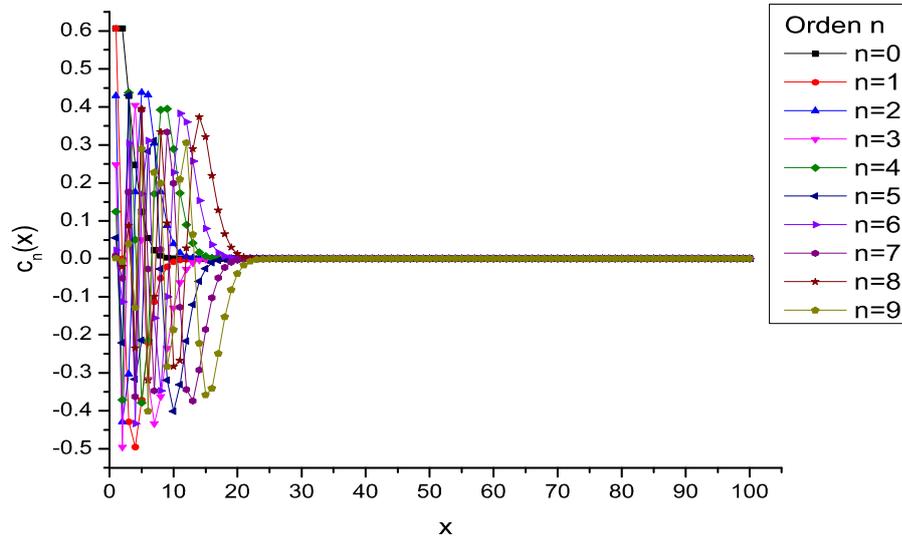


Figura 3.5: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Charlier con  $N=100$  y  $a_1=1$ .

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

#### 3.2.6. Polinomios de Racah

La ecuación diferencial de los polinomios de Racah está expresada de la siguiente manera [10], [22].

$$\sigma(x) \frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[ \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} \right] + \tau(x) \frac{\Delta y_n(s)}{\Delta x(s)} + \lambda_n y_n(s) = 0, \quad (3.37)$$

donde  $\lambda_n$  es una constante apropiada,  $\sigma(x), \tau(x)$  son los polinomios de en  $x(s)$  de primero y segundo grado y  $y_n(s)$  representa una solución de los polinomios antes de ser normalizados.

Los polinomios de Racah  $\tilde{U}_n^{(\alpha, \beta)}(s, a, b)$  se definen mediante el uso de la función hipergeométrica como [23]

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n^{(\alpha, \beta)}(s, a, b) &= {}_4F_3(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_2; z) \\ &= \sum_{k=0}^s \frac{(a_1)_k (a_2)_k (a_3)_k (a_4)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k (b_2)_k k!} \end{aligned} \quad (3.38)$$

El orden cero y primero de los polinomios de Racah puede ser calculados como,

$$\begin{aligned} U_0^{(\alpha, \beta)}(s, a, b) &= \sqrt{\frac{(2s+1)p(s)}{d_0^2}}, \\ U_1^{(\alpha, \beta)}(s, a, b) &= \frac{1}{p(s)} \frac{p_1(s) - p_1(s-1)}{x(s+1/2) - x(s-1/2)} \sqrt{\frac{(2s+1)p(s)}{d_1^2}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

En la Fig. 3.6 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Racah.

### 3. Polinomios ortogonales discretos

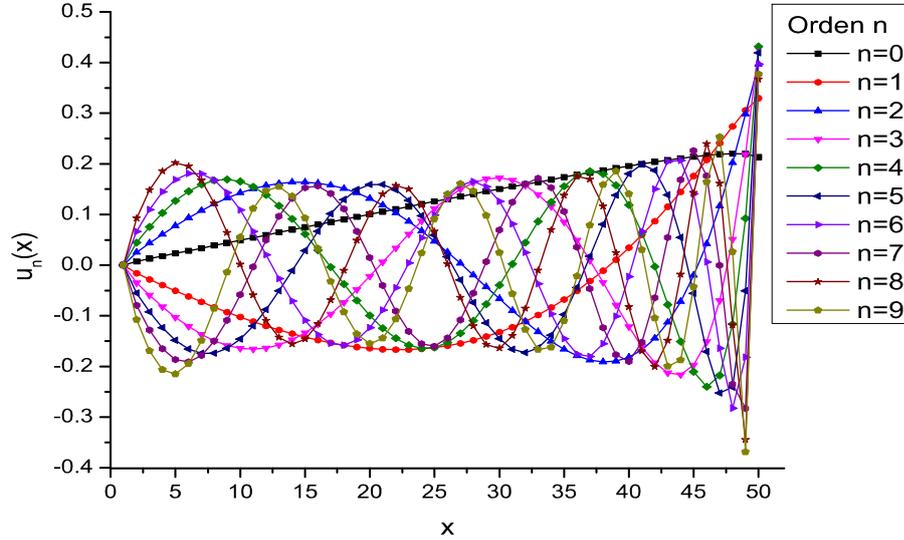


Figura 3.6: Primeros 10 órdenes de los polinomios de Racah con  $N=50$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0.5$  y  $a=1$ .

### 3.3. Relación de recurrencia de los polinomios ortogonales discretos

Una relación de recurrencia es conocida como una ecuación que define una secuencia recursiva, en la que cada término de la secuencia es definido como una función de términos anteriores. Una forma general para obtener los polinomios ortogonales discretos normalizados en el espacio uniforme puede escribirse como [7].

$$A\tilde{p}_n(x) = B * D\tilde{p}_{n-1}(x) + C * E\tilde{p}_{n-2}(x) \quad (3.40)$$

donde los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  son consideradas como variables independientes para cada familia de polinomios discretos como se muestra en la Tabla 3.2, donde  $\tilde{p}_1$  y  $\tilde{p}_0$  son polinomios de primer orden y orden cero respectivamente de los diferentes polinomios discretos. La Ec. (3.40) es una relación de recurrencia con respecto a los polinomios de orden  $n$ . Por otra parte, la relación de recurrencia de los polinomios de Racah con respecto a  $n$  puede escribirse como [10],

$$A_n \tilde{U}_n^{(\alpha,\beta)}(s, a, b) = B_n \frac{d_{n-1}}{d_n} \tilde{U}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(s, a, b) + C_n \frac{d_{n-2}}{d_n} \tilde{U}_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(s, a, b) \quad (3.41)$$

donde,

### 3. Polinomios ortogonales discretos

---

$$A_n = \frac{n(\alpha + \beta + n)}{(\alpha + \beta + 2n - 1)(\alpha + \beta + 2n)}, \quad (3.42)$$

$$B_n = x - \frac{a^2 + b^2 + (a - \beta)^2 + (b + \alpha)^2 - 2}{4} + \frac{(\alpha + \beta + 2n - 2)(\alpha + \beta + 2n)}{8} - \frac{(\beta^2 - \alpha^2)[(b + \alpha/2)^2 - (a - \beta/2)^2]}{2(\alpha + \beta + 2n - 2)(\alpha + \beta + 2n)}, \quad (3.43)$$

$$C_n = -\frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\alpha + \beta + 2n - 2)(\alpha + \beta + 2n - 1)} * \left[ \left( a + b + \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 - \left( n - 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \right] * \left[ \left( b + a + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \left( n - 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \right], \quad (3.44)$$

$$d_n = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(b - a - n - 1)} * \frac{\Gamma(b - a + \alpha + \beta + n + 1)\Gamma(a + b + \alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(a + b - \beta - n)}, \quad (3.45)$$

$$\rho_n(s) = \frac{\Gamma(a + s + n + 1)\Gamma(s - a + \beta + n + 1)}{\Gamma(a - \beta + s + 1)\Gamma(s - a + 1)} * \frac{\Gamma(N + \alpha - s)\Gamma(N + \alpha + s + n + 1)}{\Gamma(N - s - n)\Gamma(N + s + 1)} \quad (3.46)$$

### 3. Polinomios ortogonales discretos

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
$\tilde{p}_n(\mathbf{x})$			
$\tilde{t}_n(x; N)$	$\frac{n}{(2n-1)}$	$x - \frac{N-1}{2}$	$\frac{(n-1)(N^2 - (n-1)^2)}{2(2n-1)}$
$\tilde{k}_n(x; p, N)$	$n$	$x - n + 1 - p(N - 2n + 2)$	$-p(1-p)(N-n+2)$
$\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N)$	$\frac{n}{(a+b+2n-1)} * \frac{(a+b+n)}{(a+b+2n)}$	$x - \frac{a-b+2N-2}{4} - \frac{(b^2-a^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n-2)(a+b+2n)}$	$-\frac{(a+n-1)(N-n+2)}{(a+b+2n-1)(N-n+2)}$ * $\frac{(a+b+N+n-1)(N-n+1)}{(a+b+2n-1)}$
$\tilde{\varpi}_n^{(\beta, \mu)}(x)$	$\frac{\mu}{\mu-1}$	$\frac{x-x\mu-n+1-\mu n+\mu-\beta\mu}{1-\mu}$	$\frac{(n-1)(n-2+\beta)}{1-\mu}$
$\tilde{c}_0^{a_1}(x)$	$-a_1$	$x - n + 1 - a_1$	$n - 1$
$\tilde{p}_n(\mathbf{x})$			
$\tilde{t}_n(x; N)$	$\sqrt{\frac{2n+1}{(N^2-n^2)(2n-1)}}$	$\sqrt{\frac{2n+1}{(N^2-n^2)(N^2-(n-1)^2)(2n-3)}}$	
$\tilde{k}_n(x; p, N)$	$\sqrt{\frac{n}{p(1-p)(N-n+1)}}$	$\sqrt{\frac{n(n-1)}{(p(1-p))^2(N-n+2)(N-n+1)}}$	
$\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N)$	$\sqrt{\frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)(a+b+n+N)}} * \sqrt{\frac{(a+b+2n+1)}{(N-n)(a+b+2n-1)}}$	$\sqrt{\frac{n(n-1)(a+b+n)}{(a+n)(a+n-1)(b+n)(b+n-1)(N-n+1)(N-n)}} * \sqrt{\frac{(a+b+n-1)(a+b+2n+1)}{(a+b+2n-3)(a+b+n+N)(a+b+n+N-1)}}$	
$\tilde{\varpi}_n^{(\beta, \mu)}(x)$	$\sqrt{\frac{\mu}{n(\beta+n-1)}}$	$\sqrt{\frac{\mu^2}{n(n-1)(\beta+n-2)(\beta+n-1)}}$	
$\tilde{c}_0^{a_1}(x)$	$\sqrt{\frac{a_1}{n}}$	$\sqrt{\frac{a_1^2}{n(n-1)}}$	

Tabla 3.2: Tabla de datos para los cinco términos polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0, b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0, \mu < 1$ ) y Charlier  $a_1 > 0$

# Bibliografía

- [1] Durán, A. J., & de la Iglesia, M. D. (2015). Differential equations for discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials. arXiv preprint arXiv:1510.02570.
- [2] Nikiforov, A. F., & Uvarov, V. B. (1988). Special functions of mathematical physics (Vol. 205, pp. 143-155). Basel: Birkhäuser.
- [3] Fletcher, C. A. J. (1984). Springer Series in Computational Physics, pp 8-44.
- [4] Nikiforov, A. F., & Suslov, S. K. (1986). Classical orthogonal polynomials of a discrete variable on nonuniform lattices. letters in mathematical physics, 11(1), 27-34.
- [5] Koekoek, R., Lesky, P. A., & Swarttouw, R. F. (2010). Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues. Springer Science & Business Media, pp. 145-155 .
- [6] Köpf, W. Hypergeometric Summation. An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998.
- [7] Zhu, H., Liu, M., Shu, H., Zhang, H., & Luo, L. (2010). General form for obtaining discrete orthogonal moments. IET image processing, 4(5), 335-352.
- [8] Wu, Y., & Liao, S. (2015). Color image analysis via Racah moments. Journal of Theoretical and Applied Computer Science, 9(4), 8-18.
- [9] Wu, Y., & Liao, S. (2014, July). Chinese characters recognition via racah moments. In Audio, Language and Image Processing (ICALIP), 2014 International Conference on (pp. 691-694). IEEE.
- [10] Zhu, H., Shu, H., Liang, J., Luo, L., & Coatrieux, J. L. (2007). Image analysis by discrete orthogonal Racah moments. Signal Processing, 87(4), 687-708.
- [11] Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B., & Suslov, S. K. (1991). Classical orthogonal polynomials of a discrete variable. In Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable (pp. 18-54). Springer Berlin Heidelberg.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] Álvarez-Nodarse, R., & Dehesa, J. S. (2002). Distributions of zeros of discrete and continuous polynomials from their recurrence relation. *Applied mathematics and computation*, 128(2), 167-190.
- [13] Soria-Lorente, A., Moreno-Roque, E. R., & Martí-Zamora, J. B. (2014). Polinomios ortogonales clásicos de una variable discreta, su historia, extensiones y aplicaciones. *Lecturas Matemáticas*, 35(1), 5-24.
- [14] Ismail, M. E., & Stanton, D. (1997). Classical orthogonal polynomials as moments. *Canadian Journal of Mathematics*, 49(3), 520-542.
- [15] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2003). Image analysis by Krawtchouk moments. *IEEE Transactions on image processing*, 12(11), 1367-1377.
- [16] Flusser, J., Zitova, B., & Suk, T. (2009). Moments and moment invariants in pattern recognition. John Wiley & Sons.
- [17] Mukundan, R., Ong, S. H., & Lee, P. A. (2001). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing*, 10(9), 1357-1364.
- [18] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2007). Image analysis using Hahn moments. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 29(11).
- [19] Sayyouri, M., Hmimid, A., & Qjidaa, H. (2012, October). A fast computation of Charlier moments for binary and gray-scale images. In *Information Science and Technology (CIST), 2012 Colloquium in* (pp. 101-105). IEEE.
- [20] Zhu, H., Shu, H., Zhou, J., Luo, L., & Coatrieux, J. L. (2007). Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments. *Pattern Recognition Letters*, 28(13), 1688-1704, p.2-5.
- [21] Sayyouri, M., Hmimid, A., & Qjidaa, H. (2015). A fast computation of novel set of Meixner invariant moments for image analysis. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(3), 875-900.
- [22] Wu, Y., & Liao, S. (2015). Color image analysis via Racah moments. *Journal of Theoretical and Applied Computer Science*, 9(4), 8-18.
- [23] Wu, Y., & Liao, S. (2014, July). Chinese characters recognition via racah moments. In *Audio, Language and Image Processing (ICALIP), 2014 International Conference on* (pp. 691-694). IEEE.

## Capítulo 4

# Teoría de momentos ortogonales

### 4.1. Introducción

Los momentos son cantidades escalares que pueden ser utilizadas para el análisis y descripción de una imagen. Actualmente existen varias aplicaciones dentro del análisis de imágenes, tales como reconocimiento de patrones, clasificación, codificación de imágenes y reconstrucción entre otras. Desde el punto de vista matemático, los momentos son "proyecciones" de una función, en una base polinomial.

Los momentos ortogonales fueron introducidos por vez primera por Teague en 1980, quien propone los momentos de Zernike definidos en un círculo de radio unidad y los momentos de Legendre definidos en un rectángulo [1]. Estos tienen la capacidad de caracterizar información con mínima redundancia a diferencia de los momentos que no tienen una base ortogonal.

Los momentos ortogonales constan de una base ortogonal  $P_{n,m}(x, y)$ , es decir, sus elementos satisfacen la condición de ortogonalidad [2]-[5].

$$\iint_{\Omega} P_{n,m}(x, y) P_{p,q}(x, y) = \delta_{n,p} \delta_{m,q}, \quad (4.1)$$

donde  $\delta_{n,p}$  es el símbolo de Kronecker,

$$\delta_{n,p} = \begin{cases} 0, & n \neq p \\ 1, & n = p \end{cases}. \quad (4.2)$$

Los momentos ortogonales están definidos como,

$$Q_{n,m} = \iint_D P_{n,m}(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (4.3)$$

donde  $D$  es el área de ortogonalidad, el cual puede estar definido en un círculo o en un rectángulo como se muestran en la Fig. 4.1.

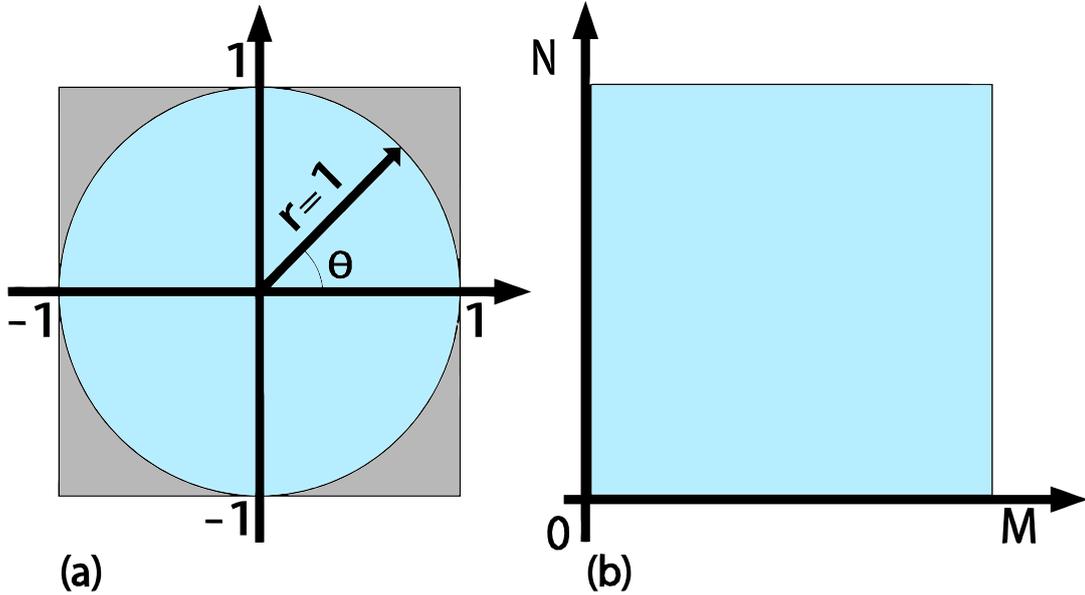


Figura 4.1: Dominios definidos para los momentos. a) Dominio Circular, b) Dominio Rectangular

Por otra parte, tienen una diferencia significativa cuando se considera la estabilidad y problemas computacionales en un dominio discreto. La mayoría de los polinomios ortogonales pueden ser calculados con mayor estabilidad numérica mediante relaciones de recurrencia, a diferencia de los momentos geométricos, los cuales utilizan potencias provocando un aumento de su inestabilidad cuando los órdenes aumentan.

## 4.2. Momentos circulares

Los momentos que están definidos dentro de un radio unitario se llaman "momentos circulares". La expresión general para los momentos circulares de orden  $n$  y repetición  $m$  para una función imagen  $f(r, \theta)$  en coordenadas polares está dada por [5], [6]

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) P_{n,m}(r, \theta) r dr d\theta, \quad (4.4)$$

donde  $P_{n,m}(r, \theta)$  es la función kernel, la cual consiste en el producto de dos funciones: una de ellas es una familia de polinomios ortogonales  $A_n(r)$  en la coordenada radial y la otra es una función exponencial compleja  $\exp(jm\theta)$  en la coordenada angular, la función  $P_{n,m}(r, \theta)$  es expresada como,

$$P_{n,m}(r, \theta) = A_n(r) \exp(jm\theta), \quad (4.5)$$

#### 4. Teoría de momentos ortogonales

---

donde  $n$  y  $m$  son enteros. Además, la función kernel es ortogonal dentro del círculo de radio unidad,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La propiedad de ortogonalidad queda expresada mediante la expresión,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 P_{n,m}(r, \theta) P_{k,l}(r, \theta) r dr d\theta = \delta_{n,m} \delta_{k,l}, \quad (4.6)$$

donde  $\delta_{n,m}$  es el símbolo de Kronecker. Por otra parte, de acuerdo con la teoría ortogonal, la imagen original puede ser reconstruida por un número infinito de momentos circulares. La distribución discreta reconstruida de la imagen está dada por

$$\tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L \phi_{n,m} A_n(r) \exp(jm\theta), \quad (4.7)$$

donde  $\tilde{f}(r, \theta)$  es la versión reconstruida de  $f(r, \theta)$  y  $L$  es el máximo orden de momentos radiales utilizados en la reconstrucción de la imagen. La reconstrucción de la imagen ayuda a determinar qué tan bien una imagen puede ser caracterizada por un número finito de sus momentos.

Las características más importantes de los momentos circulares son la invariancia a la rotación, a la reflexión y a la escala. Si consideramos una imagen  $f(r, \theta - \gamma)$  que es rotada  $\gamma$  grados, esto da como resultado los momentos  $\phi_{n,m}^{(\gamma)}$ , los cuales están relacionado con  $\phi_{n,m}$  de la siguiente manera

$$\phi_{n,m}^{(\theta-\gamma)} = \phi_{n,m} \exp(-jm\gamma). \quad (4.8)$$

Por lo tanto, obteniendo el módulo de los momentos circulares,

$$\left| \phi_{n,m}^{(\theta-\gamma)} \right| = \left| \phi_{n,m} \right|, \quad (4.9)$$

se prueba la invariancia a la rotación. De la misma manera, si consideramos el caso general de la reflexión a través de una línea que pasa por el origen, que gira a través de un ángulo positivo  $\gamma$  con respecto al eje  $y$ . La imagen puede ser representada como  $f(r, 2\gamma - \theta)$ , el hecho de que esta transformación depende  $2\gamma$ , se debe a que la línea de reflexión no tiene dirección única: sin cambios para  $180^\circ$  de rotación. La relación de los momentos radiales afectada por reflexión está dada por,

$$\phi_{n,m}^{(2\gamma-\theta)} = \phi_{n,m} \exp(-j2m\gamma), \quad (4.10)$$

y por lo tanto, el módulo,

$$\left| \phi_{n,m}^{(2\gamma-\theta)} \right| = \left| \phi_{n,m} \right|, \quad (4.11)$$

## 4. Teoría de momentos ortogonales

---

es invariante a la reflexión. En cuanto a la escala, los momentos radiales son invariantes naturales debido a que el radio unidad donde se define la imagen tiene que ser remapeado dependiendo de las dimensiones de la imagen. En otras palabras, sin importar el tamaño de la imagen, siempre va a estar definida dentro de un radio unitario. Sin embargo, esto se cumple siempre y cuando no se utilicen aproximaciones en el cálculo de los momentos radiales. Además, los momentos radiales no tienen información redundante como los momentos geométricos y los momentos complejos [6]. Por otra parte, aunque los momentos rectangulares no tienen redundancia en la información, no son invariantes naturales a la rotación y escala.

### 4.3. Momentos rectangulares

La expresión de los momentos ortogonales definidos en un rectángulo para una función imagen  $f(x, y)$  de tamaño  $N \times M$  está dado por [46], [7],

$$q_{n,m} = \sum_0^N \sum_0^M f(x, y) P_{n,m}(x, y), \quad (4.12)$$

donde  $P_{n,m}(x, y)$  es el kernel de transformación, el cual consta de dos polinomios ortogonales  $A_n(x)$  y  $A_m(y)$ , expresados como

$$P_{n,m}(x, y) = A_n(x) A_m(y).$$

Por lo general, las dos funciones  $A_n(x)$  y  $A_m(y)$  corresponden a una misma familia de polinomios ortogonales; sin embargo, existen trabajos donde combinan diferentes familias de polinomios ortogonales [8]-[10]. El kernel  $P_{n,m}(x, y)$  puede estar compuesto por polinomios ortogonales continuos o discretos. En el caso discreto, tienen un mejor desempeño debido a que la imagen está definida en un espacio discreto, por lo que no requieren aproximaciones en su cálculo como el caso continuo [11].

Por otra parte, de acuerdo con la teoría ortogonal, podemos recuperar la imagen original a partir de un número finito de sus momentos. La reconstrucción de la imagen está dada por

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L q_{n,m} A_n(x) A_m(y), \quad (4.13)$$

donde  $\tilde{f}(x, y)$  es la versión reconstruida de  $f(x, y)$ , y  $L$  es el máximo orden de momentos rectangulares utilizados en la reconstrucción.

Actualmente, existe una gran cantidad de momentos ortogonales definidos en un rectángulo, tales como los momentos de Tchebichef [11], los momentos de Krawtchouk

## 4. Teoría de momentos ortogonales

---

[7], los momentos de Hahn [12], y los momentos Gauss–Hermite [13]. Lamentablemente, no se han desarrollado invariantes eficientes para los momentos rectangulares [7], [14].

### 4.4. Representación matricial

Una de las propiedades de los momentos es su capacidad para caracterizar las propiedades locales (en una región de interés) de las imágenes, en la que los parámetros  $P_1$  y  $P_2$  se utilizan para desplazar la región de interés horizontal y verticalmente como se muestra en la Fig. 4.3. Gracias a la separabilidad de los polinomios en 2D en 1D, el cálculo de momentos puede ser representado de en su forma matricial como [7], [16]

$$Q = P_1 I P_2^T, \quad (4.14)$$

donde  $Q$  es la matriz de momentos,  $I$  es la imagen en 2D en su forma matricial (Fig. 4.2),

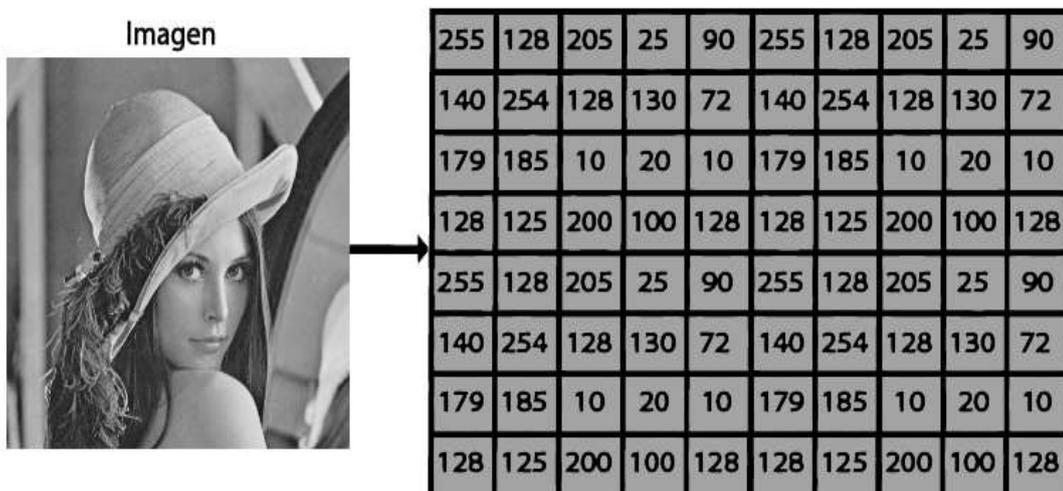


Figura 4.2: Representación matricial de una imagen

$P_1$  y  $P_2$  representan la matriz de los polinomios ortogonales discretos en las coordenadas de  $x$  y  $y$  respectivamente y finalmente  $(P_2^T)$  representa la transpuesta de la matriz  $P_2$ .

#### 4. Teoría de momentos ortogonales

---

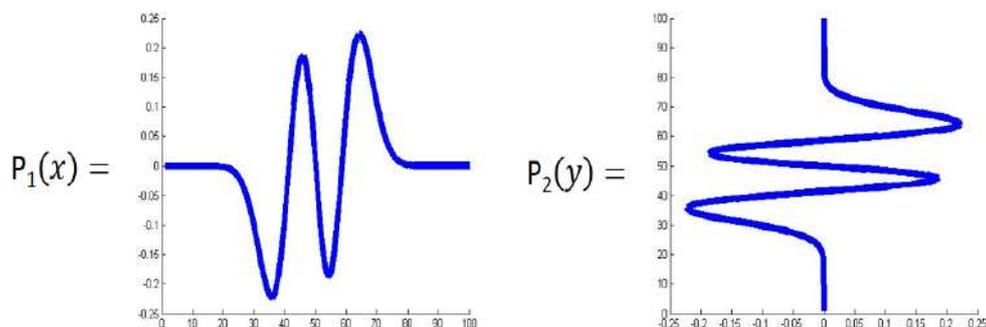


Figura 4.3: Polinomios de en 1D en coordenadas  $x$  y  $y$ .

De igual forma la representación matricial de la reconstrucción está dada como,

$$I' = P_2^T Q P_1, \quad (4.15)$$

donde  $I'$  es es la imagen reconstruida,  $P_1$  y  $P_2^T$  representan la matriz de polinomios en  $x$  y  $y$  y  $Q$  la matriz de momentos.

Por otra parte se puede comprobar la condición de ortogonalidad de una matriz que contiene a una familia de polinomios ortogonales discretos, dada por,

$$O = P_1 * P_1^T,$$

donde  $O$  es una matriz identidad, que puede ser representada como un imagen binaria donde la diagonal esta definida por unos y el resto por ceros, como se muestra en la Fig. 4.4.

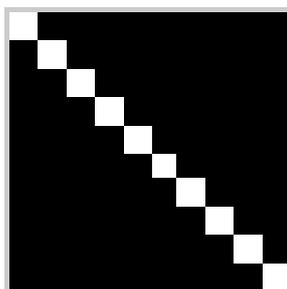


Figura 4.4: Representación en imagen de la matriz de ortogonalidad.

El cálculo de momentos en su forma matricial tiene la ventaja de ser más rápido al calcularse, ya que la manipulación de matrices reduce mucho el tiempo computacional.

### 4.5. Reconstrucción de imágenes de color

Las imágenes digitales pueden ser reconstruidas a partir de un número suficientemente grande de momentos ortogonales de su distribución de intensidades, usando la transformada inversa respectiva. La reconstrucción de la imagen puede ayudar a examinar el desempeño de los momentos, la cual permite evaluarlos a través del error de la imagen reconstruida y el número de momentos usados que pueden describir dicha imagen. La reconstrucción de imágenes es muy utilizada en imágenes biomédicas para el análisis clínico, el diagnóstico de enfermedades, control de calidad de en laboratorios clínicos [18].

Los momentos ortogonales de una imagen binaria generan una reconstrucción con valores de intensidad umbralizados. En el caso de imágenes con niveles de gris, se emplean métodos de ecualización del histograma para transformar los valores de intensidad a un rango válido de niveles de gris [17]. Por otra parte, los momentos ortogonales discretos en imágenes RGB presentan los mismos inconvenientes que las imágenes binarias y en escala de grises para cada uno de los canales de la imagen a color. Una de las diferentes aplicaciones de las funciones momentos con base ortogonales es la reconstrucción de imágenes de color  $f(x, y, c)$  para determinar el número de descriptores que puede caracterizar la imagen a color, las cuales están definidas en coordenadas cartesianas, donde una imagen de color está formada por los canales RGB y se puede expresar como,

$$\begin{aligned} f(x, y, 1) &= f_R(x, y), \\ f(x, y, 2) &= f_G(x, y), \\ f(x, y, 3) &= f_B(x, y), \end{aligned} \tag{4.16}$$

teniendo en cuenta esta representación de una imagen de color, las Ecs. (4.16) y (4.12) se pueden utilizar para el cálculo de momentos, las cuales se pueden definir para imágenes de color como,

$$q_{n,m}^c = \sum_1^{N-1} \sum_1^{M-1} f(x, y, c) P_{n,m}(x, y), \tag{4.17}$$

#### 4. Teoría de momentos ortogonales

---

donde  $f(x, y, c)$  es una imagen de color,  $c$  representa un canal RGB y  $P_{n,m}(x, y)$  el kernel de transformación. De igual forma tomando la representación de una imagen de color Ec. (4.16) y la reconstrucción de la Ec. (4.13) se puede definir la reconstrucción de imágenes de color como,

$$\tilde{f}(x, y, c) = \sum_1^{N-1} \sum_1^{M-1} q_{n,m}^c P_{n,m}(x, y), \quad (4.18)$$

En la figura 4.5 se muestra una imagen de prueba con dimensiones de 150 x 150 píxeles. De igual forma en la Fig. 4.6 se muestra su reconstrucción utilizando diferentes familias de momentos y ordenes de reconstrucción.



Figura 4.5: Imagen de prueba de 150x150 píxeles.

#### 4. Teoría de momentos ortogonales

Reconstrucción de imágenes de color utilizando momentos de Krawtchouk, Tchebichef, Hahn, Meixner y Charlier con diferentes órdenes				
	n=10	n=30	n=70	n=100
Krawtchouk con $p=0.5$				
Tchebichef				
Hahn con $a=b=10$				
Meixner $\mu=0.1$ y $\beta=14$				
Charlier con $a_1=1$				

Figura 4.6: Reconstrucción de una imagen a color utilizando las familias de momentos discretos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner y Charlier, con diferentes órdenes.

## 4. Teoría de momentos ortogonales

### 4.5.1. Análisis de error de reconstrucción de imágenes de color

Para evaluar la eficiencia de los momentos se utiliza la métrica de reconstrucción, basada en el error de reconstrucción de imagen normalizada (NIRE), el cual se define como el error cuadrático normalizado entre la imagen de entrada  $f_c(x, y)$  y la imagen reconstruida  $\tilde{f}_c(x, y, c)$ , expresado como:

$$NIRE_c = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M [f_c(x, y) - \tilde{f}_c(x, y)]^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M f_c^2(x, y)}, \quad (4.19)$$

donde  $c$  es el canal de la imagen RGB. La medida para el error de reconstrucción de una imagen en color está dada por:

$$Mean(NIRE) = \frac{NIRE_R + NIRE_G + NIRE_B}{3}. \quad (4.20)$$

En la Fig. 4.7 se muestra la gráfica de los resultados del NIRE obtenidos de la imagen reconstruida.

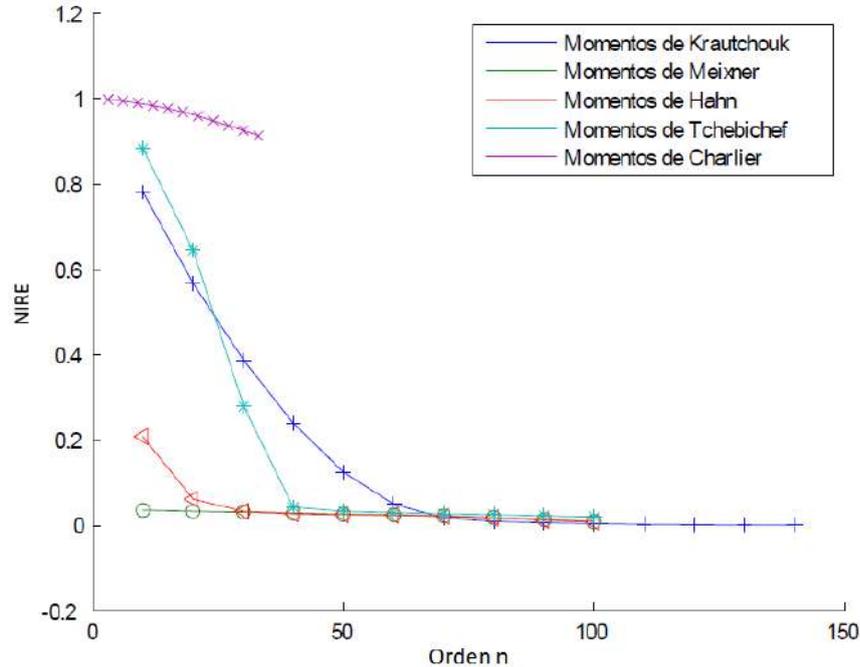


Figura 4.7: Gráfica de error de reconstrucción de una imagen con dimensiones de 150 x 150 pixeles utilizando las familias de momentos de Tchebichef, Krawtchouk con  $p=0.5$ , Hahn con  $a=b=10$ , Meixner con  $\mu=0.43$  y  $\beta=14$ . y Charlier con  $a_1=1$ .

#### 4. Teoría de momentos ortogonales

---

Como se puede observar en las Figs. 4.6 y 4.7 la reconstrucción es diferente para cada una de las familias de momentos utilizadas.

Algunas de estas presentan un mayor desempeño que otras, en este caso las familias de momentos de Tchebichef, Hahn son la que presentan mejores resultados en comparación con los momentos de Krawtchouk, Meixner y Charlier.

# Bibliografía

- [1] Teague, M. R. (1980). Image analysis via the general theory of moments. *JOSA*, 70(8), 920-930.
- [2] Sheng, Y., Ping, Z., & Wu, R. (2002). Image invariant moments for shape description. In *Proc. SPIE* (Vol. 4929, p. 245).
- [3] Shen, J., & Shen, W. (1998, October). Comparison study of geometric and orthogonal moments. In *SPIE* (pp. 42-53).
- [4] law Pawlak, M. (2006). Image analysis by moments: reconstruction and computational aspects. *Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*.
- [5] Mukundan, R., & Ramakrishnan, K. R. (1998). *Moment functions in image analysis—theory and applications*. World Scientific.
- [6] Camacho-Bello, C., (2015). *Análisis del computo de alta precisión de los momentos radiales* (Tesis doctoral) Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla.
- [7] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2003). Image analysis by Krawtchouk moments. *IEEE Transactions on image processing*, 12(11), 1367-1377.
- [8] Sayyouri, M., Hmimid, A., & Qjidaa, H. (2016). Image analysis using separable discrete moments of Charlier-Hahn. *Multimedia Tools and Applications*, 75(1), 547-571.
- [9] Zhu, H. (2012). Image representation using separable two-dimensional continuous and discrete orthogonal moments. *Pattern Recognition*, 45(4), 1540-1558.
- [10] Zhu, H. (2011, September). Image analysis using separable two-dimensional discrete orthogonal moments. In *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on* (pp. 817-820). IEEE.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] Mukundan, R., Ong, S. H., & Lee, P. A. (2001). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing*, 10(9), 1357-1364.
- [12] Zhou, J., Shu, H., Zhu, H., Toumoulin, C., & Luo, L. (2005). Image analysis by discrete orthogonal Hahn moments. *Image analysis and recognition*, 524-531.
- [13] Yang, B., & Dai, M. (2012). Image reconstruction from continuous Gaussian-Hermite moments implemented by discrete algorithm. *Pattern Recognition*, 45(4), 1602-1616.
- [14] Zhu, H., Shu, H., Zhou, J., Luo, L., & Coatrieux, J. L. (2007). Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments. *Pattern Recognition Letters*, 28(13), 1688-1704.
- [15] Azman, A. N., Nanna, S., & Mukundan, R. (2004, January). Perfect image reconstruction using discrete orthogonal moments. *Proceedings of the Iasted International Conference On Visualization, Imaging, And Image Processing (VIIP)*.
- [16] Bayraktar, B., Bernas, T., Robinson, J. P., & Rajwa, B. (2007). A numerical recipe for accurate image reconstruction from discrete orthogonal moments. *Pattern Recognition*, 40(2), 659-669.
- [17] Camacho-Bello, C., & Báez-Rojas, J. J. (2014, November). Angle estimation using Hahn moments for image analysis. In *Iberoamerican Congress on Pattern Recognition* (pp. 127-134). Springer, Cham.
- [18] Camacho-Bello, C., Padilla-Vivanco, A., Toxqui-Quitl, C., & Báez-Rojas, J. J. (2016). Reconstruction of color biomedical images by means of quaternion generic Jacobi-Fourier moments in the framework of polar pixels. *Journal of Medical Imaging*, 3(1), 014004-014004.

## Capítulo 5

# Cómputo de momentos ortogonales discretos

### 5.1. Introducción

El cálculo de las diferentes familias de polinomios ortogonales discretos se realiza mediante la función hipergeométrica, la cual tiene la desventaja de utilizar gran cantidad de operaciones. Por lo tanto, debido a que consume mucho tiempo computacional para obtener los valores de los polinomios, se adoptan relaciones de recurrencia de tres términos de los polinomios ortogonales clásicos, tales como los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner, Charlier y Racah mencionados en la Sección 3. Sin embargo, un problema con el cálculo de valores polinómicos de alto orden es la propagación de errores numéricos mientras se usan fórmulas recursivas con respecto al orden  $n$ . Este error puede tener un crecimiento exponencial, afectando gravemente la calidad de la reconstrucción de la imagen [1], [2].

### 5.2. Precisión numérica en los cálculos

Como se revisó en la Sección 3, la definición de los polinomios ortogonales discretos mediante la relación de recurrencia hace uso de operaciones que requiere mayor esfuerzo computacional con operaciones exponenciales y factoriales para obtener los valores de cada polinomio. Existen gran cantidad de software que es utilizado para llevar a cabo diversos cálculos matemáticos con diferentes niveles de complejidad, esto significa que permiten realizar desde operaciones básicas, hasta operaciones que requieren de un alto tiempo computacional. Este tipo de aplicaciones son elaborados bajo diferentes normas y estándares que limitan la capacidad de procesamiento durante la realización de algunos cálculos. Un ejemplo de estos estándares es la norma ANSI / IEEE 754-1985

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

para la aritmética, donde menciona algunas restricciones durante el uso de exponentes, la cual establece a  $e$  como un número entero en el intervalo  $[-10226, 61023]$ , cualquier número que no cumpla con estas limitaciones debe ser aproximado. La finalidad de  $e$  es una limitación en el rango y esto conduce a un desbordamiento. Otro ejemplo, es la utilización de números fraccionarios, la cual limita la precisión y conduce a problemas de redondeo. De igual forma tiene otra limitante durante el uso de operaciones como factoriales o el tipo de formato de almacenamiento [3], [4]. IEEE de doble precisión utiliza  $eps$  la distancia de 1 a el siguiente número de punto flotante, donde  $eps = 2^{-52} \approx 2,220446049250313 \times 10^{-16}$ . El número de punto flotante normalizado positivo más pequeño tiene  $f = 0$  y  $e = -1022$ . La mayoría del software de este tipo (como Matlab) utiliza estos estos números como valores real mínimo ( $realmin$ ) y real máximo ( $realmax$ ).

$$\begin{aligned} realmin &= 2^{-1022} = 2,225073858507201 \times 10^{-308} \\ realmax &= (1 + (1 - eps)) \times 2^{1023} = 1,797693134862316 \times 10^{308} \end{aligned}$$

Si cualquier cálculo intenta producir un valor mayor que " $realmax$ ", se dice que se desborda y el resultado es un valor de punto flotante excepcional llamado infinito o Inf. Si cualquier cálculo intenta producir un valor que no está definido incluso en el sistema de números reales, el resultado es un valor excepcional conocido como "Not a Number" ó "NaN". Si cualquier cálculo intenta producir un valor menor que " $realmin$ ", se dice que se desborda. Esto implica uno de los aspectos opcionales y controvertidos del estándar IEEE [3], [5].

### 5.3. Reducción de términos de la relación de recurrencia con respecto a $n$

Teniendo en cuenta el problema del cálculo de los polinomios ortogonales discretos mediante una relación de recurrencia como la Ec. (3.40) de la Sección 3. Es posible solucionar este problema, en las siguientes subsecciones se muestra una propuesta para realizar el cálculo de los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner, Charlier y Racah, mediante la eliminación de operaciones como la función gamma y factoriales, de igual forma la reducción de operaciones de manera algebraica y la modificación de la relación de recurrencia de la Ec. (3.40).

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

### 5.3.1. Cálculo de los polinomios de Tchebichef en su forma reducida

Recordando que para obtener los valores de cada familia de polinomios discretos mencionados anteriormente mediante la relación de la Ec. (3.40) es necesario saber los valores iniciales de  $P_0(x)$  y  $P_1(x)$  de igual forma los términos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  mostrados en la Tabla 3.2. En este caso los valores utilizados de  $A - E$  para los polinomios de Tchebichef  $t_n(x; N)$  son:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{n}{(2n-1)}, \\
 B &= x - \frac{N+1}{2}, \\
 C &= -\frac{(n-1)[N^2 - (n-1)^2]}{2(2n-1)}, \\
 D &= \sqrt{\frac{2n+1}{(N^2 - n^2)(2n-1)}}, \\
 E &= \sqrt{\frac{2n+1}{(N^2 - n^2)[N^2 - (n-1)^2](2n-3)}}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Los parámetros de la Ec. (3.40), pueden ser reducidos algebraicamente, de la siguiente manera,

$$P_n(x) = \frac{B * DP_1(x) + C * EP_0(x)}{A}, \tag{5.2}$$

de esta forma es posible realizar las operaciones de los términos  $\frac{B*D}{A}$  y  $\frac{C*E}{A}$  que se muestran en la Ec. (5.2).

La primera operación del cálculo de  $\frac{B*D}{A}$  está dada por,

$$\begin{aligned}
 \frac{B * D}{A} &= \frac{\left(x - \frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\frac{2n+1}{(N^2 - n^2)(2n-1)}}}{\frac{n}{(2n-1)}}, \\
 &= \frac{(2x - N + 1) \sqrt{(2n+1)(2n-1)}}{n \sqrt{(N^2 - n^2)}}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

El segundo cálculo  $\frac{C*E}{A}$  se tiene,

$$\begin{aligned}
 \frac{C * E}{A} &= \frac{\left(-\frac{(n-1)[N^2 - (n-1)^2]}{2(2n-1)}\right) \sqrt{\frac{2n+1}{(N^2 - n^2)[N^2 - (n-1)^2](2n-3)}}}{\frac{n}{(2n-1)}}, \\
 &= -\frac{(n-1) \sqrt{(N^2 - (n-1)^2)(2n-1)}}{n \sqrt{(N^2 - n^2)(2n-3)}}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

Al sustituir las Ecs. (5.3) y (5.4) en la relación de recurrencia de la Ec. (5.2) se obtiene,

$$t_n(x) = \frac{(2x - N + 1)\sqrt{(2n + 1)(2n - 1)}}{n\sqrt{(N^2 - n^2)}}t_1(x) - \quad (5.5)$$

$$\frac{(n - 1)\sqrt{(N^2 - (n - 1)^2)}(2n - 1)}{n\sqrt{(N^2 - n^2)}(2n - 3)}t_0(x).$$

con base la Ec. (5.5) se puede reescribir de la siguiente forma

$$n\sqrt{(N^2 - n^2)}t_n(x) = (2x - N + 1)\sqrt{(2n + 1)(2n - 1)}t_1(x) - \quad (5.6)$$

$$\frac{(n - 1)\sqrt{(N^2 - (n - 1)^2)}(2n - 1)}{\sqrt{2n - 3}}t_0(x).$$

Por lo tanto, se tiene una nueva relación de recurrencia para el cálculo de los polinomios ortogonales discreto de tres términos,

$$A_n t_n(x) = B_n t_1(x) - A_{n-1} \frac{(2n - 1)}{\sqrt{2n - 3}} t_0(x), \quad (5.7)$$

donde,

$$A_n = n\sqrt{(N^2 - n^2)}, \quad (5.8)$$

$$B_n = (2x - N + 1)\sqrt{(2n + 1)(2n - 1)}, \quad (5.9)$$

y  $t_0(x; N)$  y  $t_1(x; N)$  son los valores iniciales de los polinomios de Tchbichef , mostrados en la Ec. (3.24). En la Fig. 5.1 se observan los primeros 10 órdenes de los polinomios en su forma reducida.

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

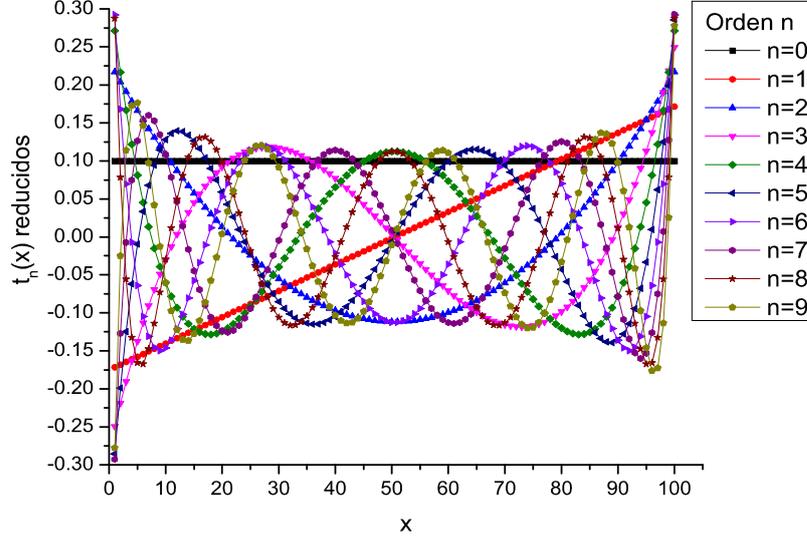


Figura 5.1: Polinomios de Tchebichef reducidos de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=100$ .

### 5.3.2. Cálculo de los polinomios de Krawtchouk en su forma reducida

De manera similar es posible realizar el mismo procedimiento para la reducción del cálculo de los polinomios ortogonales clásicos. Retomando los valores de  $A - E$  de la Tabla 3.2 para los polinomios de Krawtchouk  $k_n(x; p, N)$  y realizando los cálculos de  $\frac{B*D}{A}$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{B * D}{A} &= \frac{(x - n + 1 - p(N - 2n + 2)) \sqrt{\frac{n}{p(1-p)(N-n+1)}}}{n}, \\ &= \frac{x - n + 1 - p(N - 2n + 2)}{\sqrt{np(1-p)(N-n+1)}}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

mientras que para,

$$\begin{aligned} \frac{C * E}{A} &= \frac{(-p(1-p)(N-n+2)) \sqrt{\frac{n(n-1)}{(p(1-p))^2(N-n+2)(N-n+1)}}}{n}, \\ &= -\sqrt{\frac{(N-n+2)(n-1)}{n(N-n+1)}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

y nuevamente sustituyendo las Ecs. (5.10) y (5.11) en la relación de recurrencia de la Ec. (5.2). La relación reducida de los polinomios de Krawtchouk está dada por,

$$\sqrt{n(N-n+1)}k_n(x) = \frac{x-n+1-p(N-2n+2)}{\sqrt{p(1-p)}}k_1(x) - \sqrt{(N-n+2)(n-1)}k_0(x), \quad (5.12)$$

como se realizó en la Ec. (5.6), utilizando la relación de recurrencia de la Ec. (5.7) se obtienen los valores de  $A_n$  y  $B_n$  para el cálculo de los polinomios de Krawtchouk a partir de la Ec. (5.12)

$$A_n = \sqrt{n(N-n+1)}, \quad (5.13)$$

$$B_n = \frac{x-n+1-p(N-2n+2)}{\sqrt{p(1-p)}}, \quad (5.14)$$

mientras que  $k_1(x)$  y  $k_0(x)$  son los valores iniciales mostrados en la Ec. (3.27). En la Fig. 5.2 se observan los primeros 10 órdenes de los polinomios de Krawtchouk en su forma reducida.

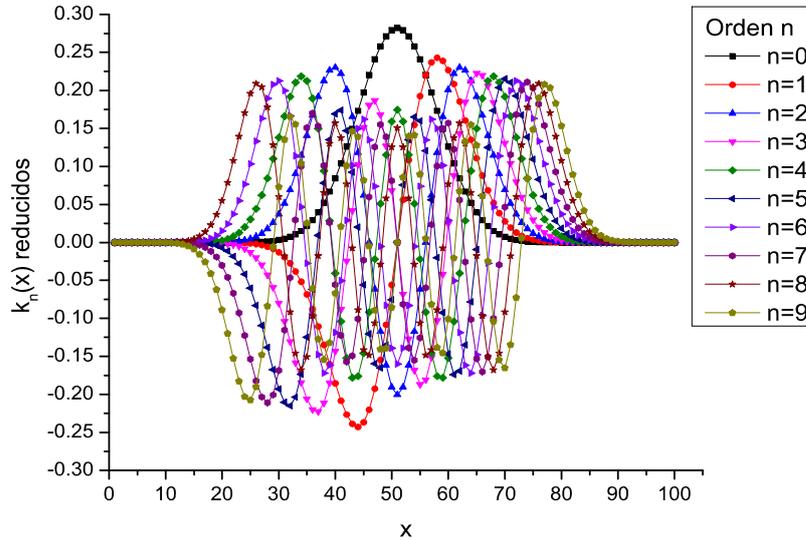


Figura 5.2: Polinomios de Krawtchouk reducidos de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=100$ ,  $p=0.5$ .

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

### 5.3.3. Cálculo de los polinomios de Hahn en su forma reducida

De manera similar, se realiza la reducción del cálculo los polinomios Hahn  $h_n^{(a,b)}(x; N)$ , utilizando sus valores de A-E de la Tabla 3.2 y realizando los cálculos de  $\frac{B*D}{A}$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{B * D}{A} &= \left( x - \frac{a - b + 2n - 1}{4} - \frac{(b^2 - a^2)(a + b + 2N)}{4(a + b + 2n - 2)(a + b + 2n)} \right)^* \quad (5.15) \\ &\sqrt{\frac{n(a + b + n)(a + b + 2n + 1)}{(N - n)(a + n)(b + n)(a + b + 2n - 1)(a + b + n + N)}}^* \\ &\quad \left( \frac{(a + b + 2n - 1)(a + b + 2n)}{n(a + b + n)} \right) \\ &= \frac{(a + b + 2n)\sqrt{(a + b + 2n - 1)(a + b + n + N)}}{\sqrt{n(a + b + n)(N - n)(a + n)(b + n)(a + b + n + N)}}^* \\ &\quad \left( x - \frac{a + b + 2n - 2}{4} - \frac{(b^2 - a^2)(a + b + 2N)}{4(a + b + 2n - 2)} \right), \end{aligned}$$

mientras que para,

$$\begin{aligned} \frac{C * E}{A} &= \left( -\frac{(a + n - 1)(b + n - 1)(a + b + N + n - 1)(N - n + 1)}{(a + b + 2n - 2)(a + b + 2n - 1)} \right)^* \quad (5.16) \\ &\sqrt{\frac{n(n - 1)(a + b + n)}{n(n - 1)(a + n - 1)(b + n)(b + n - 1)(N - n - 1)(N - n)}}^* \\ &\sqrt{\frac{(a + b + n - 1)(a + b + 2n + 1)}{(a + b + 2n - 3)(a + b + n + N)(a + b + n + N - 1)}}^* \\ &\quad \left( \frac{(a + b + 2n - 1)(a + b + 2n)}{n(a + b + n)} \right) \\ &= -\frac{(a + b + 2n)\sqrt{(n - 1)(a + b + n - 1)(a + n - 1)}}{(a + b + 2n - 2)\sqrt{n(a + b + n)(a + n)}}^* \\ &\quad \frac{\sqrt{(b + n - 1)(N - n + 1)(a + b + N + n - 1)(a + b + 2n + 1)}}{\sqrt{(b + n)(N - n)(a + b + N + n)(a + b + 2n - 3)}}, \end{aligned}$$

nuevamente sustituyendo las Ecs. (5.15) y (5.16) en la relación de recurrencia de la Ec. (5.2) y reescribiendo la ecuación se obtiene,

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{n(a+b+n)(a+n)(b+n)(N-n)(a+b+N)}}{a+b+2n} h_n^{(a,b)}(x) \\
 &= \frac{a-b+2n-2}{4} + \frac{(b^2-a^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n-2)} h_1^{(a,b)}(x) - \\
 & \quad \frac{\sqrt{(n-1)(a+b+n-1)(a+n-1)}}{(a+b+2n-1)} * \\
 & \quad \frac{\sqrt{(b+n-1)(N-n+1)(a+b+N+n-1)(a+b+2n+1)}}{\sqrt{(a+b+2n-3)}} h_0^{(a,b)}(x).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Los valores de  $A_n$  y  $B_n$  para el cálculo de los polinomios de Hahn a partir de la Ec. (5.17) están dados por,

$$A_n = \frac{\sqrt{n(a+b+n)(a+n)(b+n)(N-n)(a+b+N)}}{a+b+2n}, \tag{5.18}$$

$$B_n = \frac{a-b+2n-2}{4} + \frac{(b^2-a^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n-2)}, \tag{5.19}$$

y  $h_0^{(a,b)}(x; N)$  y  $h_1^{(a,b)}(x; N)$  son los valores iniciales de los polinomios de Hahn, mostrados en la Ec. (3.30). En la Fig. 5.3 se observan los primeros ordenes de los polinomios de Hahn en su forma reducida.

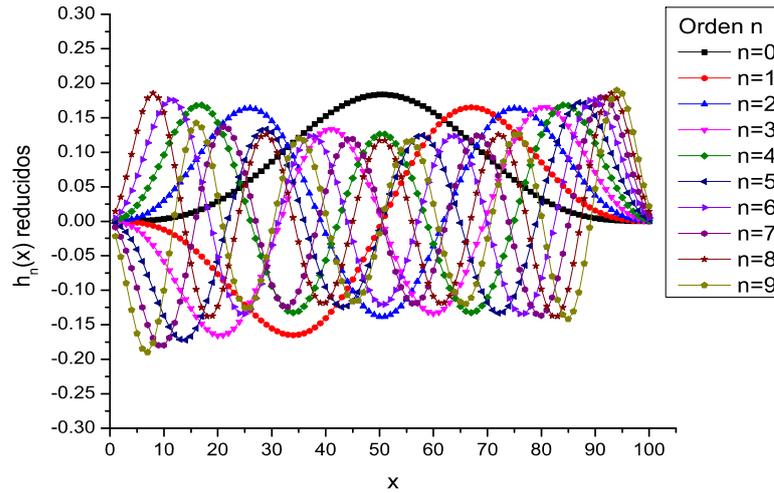


Figura 5.3: Polinomios de Hahn reducidos de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=100$ ,  $a=10$  y  $b=10$ .

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

### 5.3.4. Cálculo de los polinomios de Meixner en su forma reducida

De igual forma se puede realizar la reducción del cálculo los polinomios Meixner  $\varpi_n^{(\beta, \mu)}(x)$ , donde se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{B * D}{A} &= \frac{\frac{x - x\mu - n + 1 - \mu n + \mu - \beta\mu}{1 - \mu} \sqrt{\frac{\mu}{n(\beta + n - 1)}}}{\frac{\mu}{\mu - 1}}, \\ &= -\frac{(x - n + 1 + \mu(-x - n + 1 - \beta))\sqrt{\mu}}{\mu\sqrt{n(\beta + n - 1)}}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

mientras que para  $\frac{C * E}{A}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{C * E}{A} &= \frac{\frac{(n-1)(n-2+\beta)}{1-\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{n(n-1)(\beta+n-2)(\beta+n-1)}}}{\frac{\mu}{\mu-1}}, \\ &= -\sqrt{\frac{(n-1)(n-2+\beta)}{n(\beta+n-1)}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

sustituyendo las Ecs. (5.20) y (5.21) en la relación de recurrencia de la Ec. (5.2) y reescribiendo la ecuación se obtiene,

$$\begin{aligned} \sqrt{n(\beta + n - 1)}\varpi_n^{(\beta, \mu)}(x) &= \frac{(x - n + 1 + \mu(-x - n + 1 - \beta))\sqrt{\mu}}{\mu\sqrt{n(\beta + n - 1)}}\varpi_1^{(\beta, \mu)}(x) \\ &\quad - \sqrt{\frac{(n-1)(n-2+\beta)}{n(\beta+n-1)}}\varpi_0^{(\beta, \mu)}(x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Los valores de  $A_n$  y  $B_n$  para el cálculo de los polinomios de Meixner a partir de la Ec. (5.22) están dados por,

$$A_n = \sqrt{n(\beta + n - 1)}, \quad (5.23)$$

$$B_n = \frac{(x - n + 1 + \mu(-x - n + 1 - \beta))\sqrt{\mu}}{\mu}, \quad (5.24)$$

y  $\varpi_0^{(\beta, \mu)}(x)$  y  $\varpi_1^{(\beta, \mu)}(x)$  son los valores iniciales de los polinomios de Meixner mostrados en la Ec. (3.33). En la Fig. 5.4 se observan los primeros ordenes de los polinomios de Meixner en su forma reducida.

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

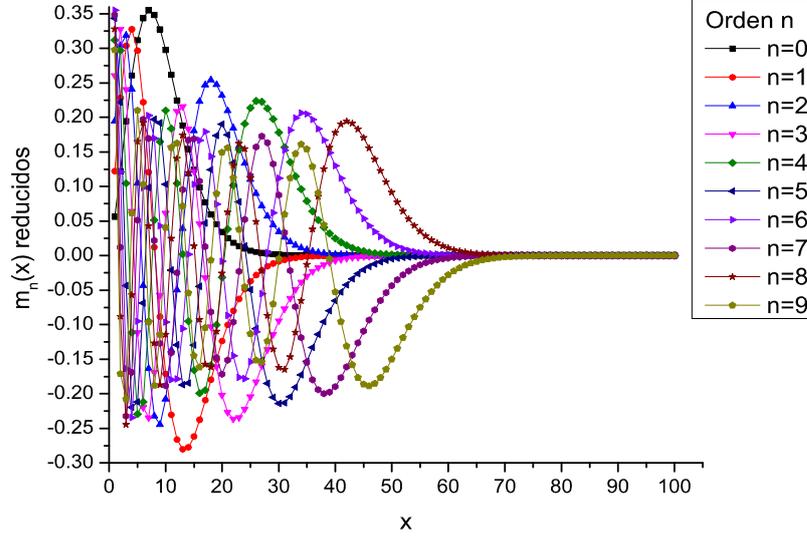


Figura 5.4: Polinomios de Mexnier reducidos de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=100$ ,  $\mu=0.43$ ,  $\beta=14$ .

### 5.3.5. Cálculo de los polinomios de Charlier en su forma reducida

De igual forma se puede realizar la reducción del cálculo los polinomios Charlier  $c_n^{a_1}(x)$ , donde se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{B * D}{A} &= \frac{(x - n + 1 - a_1)\sqrt{\frac{a_1}{n}}}{-a_1}, \\ &= -\frac{(x - n + 1 - a_1)\sqrt{a_1}}{a_1\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

mientras que para,

$$\begin{aligned} \frac{C * E}{A} &= \frac{(n - 1)\sqrt{\frac{a_1^2}{n(n-1)}}}{-a_1}, \\ &= -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

sustituyendo las Ecs. (5.25) y (5.26) en la relación de recurrencia de la Ec. (5.2) y reescribiendo la ecuación se obtiene,

$$\sqrt{n}c_n^{a_1}(x) = -\frac{(x - n + 1 - a_1)\sqrt{a_1}}{a_1\sqrt{n}}c_1^{a_1}(x) - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}c_0^{a_1}(x). \quad (5.27)$$

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

Los valores de  $A_n$  y  $B_n$  para el cálculo de los polinomios de Charlier a partir de la Ec. (5.27) están dados por,

$$A_n = \sqrt{n}, \quad (5.28)$$

$$B_n = -\frac{(x - n + 1 - a_1)\sqrt{a_1}}{a_1}, \quad (5.29)$$

y  $c_0^{a_1}(x)$  y  $c_1^{a_1}(x)$  son los valores iniciales de los polinomios de Charlier, mostrados en la Ec. (3.36). En la Fig. 5.5 se observan los primeros órdenes de los polinomios de Charlier en su forma reducida.

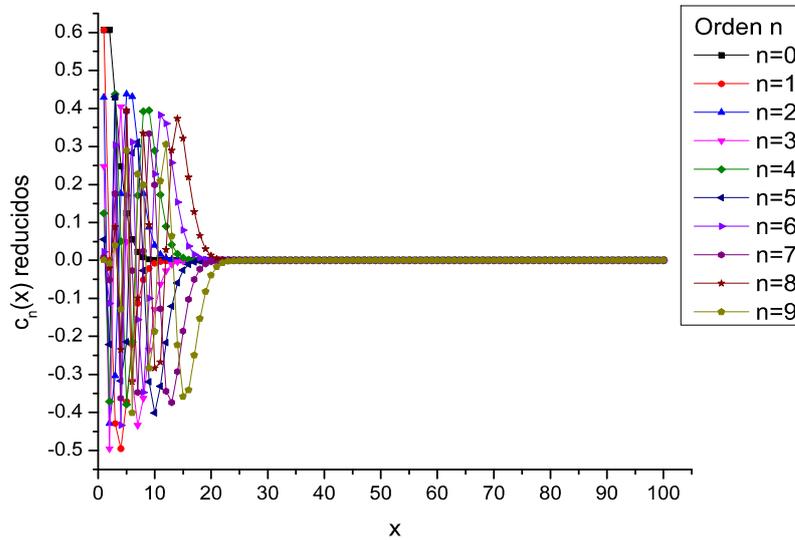


Figura 5.5: Polinomios de Charlier de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=100$  y  $a_1=1$ .

### 5.3.6. Cálculo de los polinomios de polinomios de Racah en su forma reducida

Los polinomios de Racah presentan mayor problema de precisión numérica en sus cálculos. En la Sección 3 se analizó el cálculo de los polinomios de Racah, los cuales hacen uso de la relación de recurrencia de la Ec. (3.41) y sus valores iniciales en la Ec. (3.39). Su mayor problemática está en la definición de su norma y peso que utilizan, debido a que emplean operaciones con mayor complejidad como factoriales y la función gamma. Una forma de reducir este tipo de operaciones es mediante la función de pochhammer  $(u)_k$  [6], [7], la cual está dada por,

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

$$(u)_k = u(u+1)(u+2)\dots(u+k-1) = \frac{\Gamma(u+k)}{\Gamma(u)}. \quad (5.30)$$

Por otra parte, la función factorial puede expresarse en términos de la función gamma de la siguiente forma,

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (5.31)$$

La función de peso de la Ec. (3.46) expresada en funciones gamma, está dada de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \rho_n(s) = & \frac{\Gamma(s-a+\beta+n+1)}{\Gamma(s-a+1)} * \frac{\Gamma(N+\alpha-s)}{\Gamma(N-s-n)} * \\ & \frac{\Gamma(a+s+n+1)}{\Gamma(a-\beta+s+1)} * \frac{\Gamma(N+\alpha+s+n+1)}{\Gamma(N+s+1)}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

de esta manera se puede eliminar las funciones gamma remplazándolas por la función de Pochhammer. El primer término de la Ec. (5.32),

$$\frac{\Gamma(s-a+\beta+n+1)}{\Gamma(s-a+1)},$$

se puede representar como una función de Pochhammer como en la Ec. (5.30) donde,

$$\begin{aligned} u+k &= s-a+\beta+n+1, \\ u &= s-a+1. \end{aligned}$$

El valor de k se obtiene,

$$\begin{aligned} k &= (u+k) - u = s-a+\beta+n+1 - (s-a+1), \\ &= \beta+n, \end{aligned}$$

por lo tanto el primer término de la Ec. (5.32) expresado como una función de Pochhammer definida como

$$(s-a+1)_{\beta+n},$$

realizando el mismo procedimiento para el resto de los términos de la Ec. (5.32), se puede definir de la siguiente forma

$$\rho_n(s) = (s-a+1)_{\beta+n} (N-s-n)_{a+n} (a-\beta+s-1)_{n+\beta} (N+s+1)_{\alpha+n} \quad (5.33)$$

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

Otro problema de precisión numérica durante el cálculo de los polinomios de Racah es en la relación de recurrencia. El uso de la norma donde en la Ec. (3.41) se observa operaciones como  $\frac{d_{n-1}}{d_n}$  y  $\frac{d_{n-2}}{d_n}$ , las cuales incluyen operaciones gamma y factoriales mostradas en la Ec. (3.45). La reducción de

$$\begin{aligned} \frac{d_{n-1}}{d_n} &= \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + (n-1) + 1) \Gamma(\beta + (n-1) + 1)}{(\alpha + \beta + 2(n-1) + 1)(n-1)!(N - a - (n-1) - 1)!}} * \\ &\sqrt{\frac{\Gamma(a + N + \alpha + (n-1) + 1) \Gamma(N - a + \alpha + \beta + (n-1) + 1)}{\Gamma(a + N - \beta - (n-1)) \Gamma(\alpha + \beta + (n-1) + 1)}} * \\ &\sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(N - a - n - 1)! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(N - a + \alpha + n + 1)}} * \\ &\sqrt{\frac{\Gamma(a + N - \beta - n)}{\Gamma(a + N + \alpha + n + 1)}}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

se utiliza la reducción mediante factoriales y funciones gamma de la Ec. (5.31), es posible reducir la expresión de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_{n-1}}{d_n} = (\alpha + \beta + 2n) \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)^3}{n(\alpha + n)(N - a + \alpha + \beta + n)}} * \\ &\sqrt{\frac{1}{(\beta + n)(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2(n+1) + 1)}} * \\ &\sqrt{\frac{1}{(a + N + \alpha + n)(N - a - n)(a + N - n)}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

de igual forma con

$$\begin{aligned} \frac{d_{n-2}}{d_n} &= \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + (n-2) + 1) \Gamma(\beta + (n-2) + 1)}{(\alpha + \beta + 2(n-2) + 1)(n-2)!(N - a - (n-2) - 1)!}} * \\ &\sqrt{\frac{\Gamma(a + N + \alpha + (n-2) + 1) \Gamma(N - a + \alpha + \beta + (n-2) + 1)}{\Gamma(a + N - \beta - (n-2)) \Gamma(\alpha + \beta + (n-2) + 1)}} * \\ &\sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(N - a - n - 1)! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(N - a + \alpha + n + 1)}} * \\ &\sqrt{\frac{\Gamma(a + N - \beta - n)}{\Gamma(a + N + \alpha + n + 1)}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

nuevamente, utilizando la propiedad del factorial y gamma Ec. (5.31), realizando el procedimiento anterior se puede reducir la expresión de la Ec. (5.36) de la siguiente manera,

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{d_{n-2}}{d_n} = (\alpha + \beta + 2n) * \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)^3}{(N - a + \alpha + \beta + n)(\alpha + n)(\alpha + n - 1)}} \quad (5.37) \\
 &* \sqrt{\frac{(n - 1)}{n(N - a + \alpha + \beta + n - 1)(\beta + n - 1)(\alpha + \beta + n)(N - a - n)}} \\
 &* \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + n - 1)}{(N - a - n - 1)(a + N - \beta - n)(a + N - \beta - n - 1)(\beta + n)}} \\
 &* \sqrt{\frac{1}{(a + N + \alpha + n)(a + N + \alpha + n - 1)(\alpha + \beta + 2(n - 1) + 1)}},
 \end{aligned}$$

sustituyendo las Ec. (5.35) y (5.37) en la relación de recurrencia de la Ec. (3.41) y reescribiendo la ecuación se obtiene la relación de recurrencia para el cálculo de los polinomios de Racah como,

$$\tilde{U}_n^{(\alpha, \beta)}(s, a, b) = B_n d_1 \tilde{U}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(s, a, b) + C_n d_2 \tilde{U}_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(s, a, b), \quad (5.38)$$

donde  $\tilde{U}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}$  y  $\tilde{U}_{n-2}^{(\alpha, \beta)}$  son los valores iniciales de los polinomios de Racah, mostrados en la Ec. (3.39). En la Fig. 5.3 se observan los primeros ordenes de los polinomios de Racah en su forma reducida.

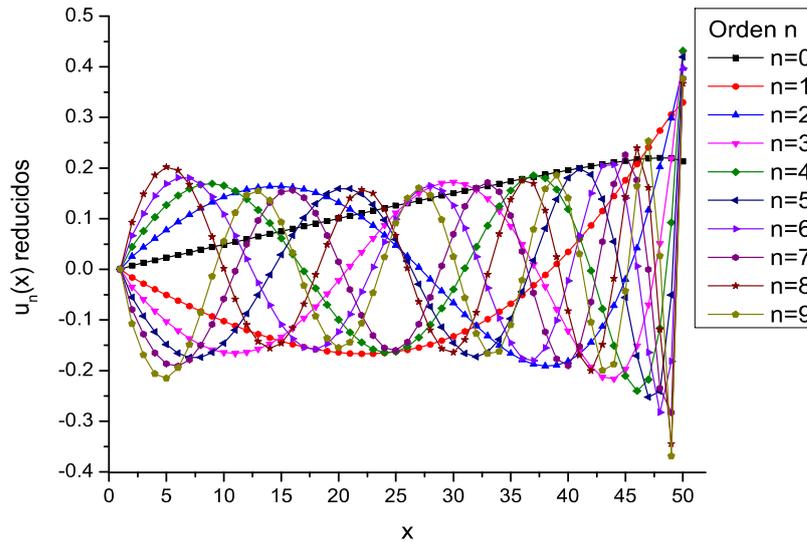


Figura 5.6: Polinomios de Racah de orden  $n=0,1,\dots,9$ ,  $N=50$ ,  $\alpha=0.1, \beta=0.5$  y  $a=1$ .

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

---

### 5.4. Reconstrucción de imágenes de color

La relación de recurrencia modificada obtenida anteriormente para los polinomios ortogonales discretos presentan ventajas como la disminución de los tiempos computacionales en el cálculo de momentos para eliminar el uso de operaciones de mayor complejidad y reducir el número de operaciones durante el cálculo.

En la tabla 5.1 se muestra una comparación del número total de operaciones (sumas, restas, mutiplicaciones y diviciones) realizadas para cada familia de polinomios mediante las diferentes relaciones de recurrencia.

Número de operaciones para el cálculo de polinomios discretos		
Polinomios	Cálculo de Zhu et al.[2]	Cálculo propuesto
Tchebichef $\tilde{t}_n(x; N)$	33	15
Krawtchouk $\tilde{k}_n(x; p, N)$	30	13
Hahn $\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N)$	125	55
Meixner $\tilde{m}_n^{(\beta,\mu)}(x)$	32	13
Charlier $\tilde{c}_0^{a_1}(x)$	10	5
Racah $\tilde{U}_n^{(\alpha,\beta)}(s, a, b)$	174	115

Tabla 5.1: comparación del total de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones utilizadas durante el cálculo de los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0$ ,  $\mu < 1$ ) y Carlier  $a_1 > 0$

Como se puede ver el número de operaciones utilizadas se reduce notablemente. Otra ventaja de la reducción del cálculo de los polinomios es la obtención de momentos de mayor tamaño  $N$  y mayor orden  $n$  sin afectar la condición de ortogonalidad. En la Tabla 5.2, se muestra la comparación del orden  $n$  y tamaños  $N$  máximos obtenidos para cada familia de polinomios. Utilizando la reducción del cómputo, aumenta el orden y tamaño que se pueden obtener.

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

Comparación de los órdenes $n$ y tamaño $N$ para el cálculo de polinomios discretos que cumplen con la condición de ortogonalidad			
Polinomios	Parametros	Cálculo de Zhu et al.[2]	Cálculo propuesto
<b>Tchebichef</b> $\tilde{t}_n(x; N)$	$N$	5000	5000
	$n$	500	600
<b>Krawtchouk</b> $\tilde{k}_n(x; p, N)$	$N$	170	5000
	$n$	160	300
<b>Hahn</b> $\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N)$	$N$	165	5000
	$n$	110	700
<b>Meixner</b> $\tilde{\omega}_n^{(\beta,\mu)}(x)$	$N$	155	5000
	$n$	50	90
<b>Charlier</b> $\tilde{c}_n^{a_1}(x)$	$N$	150	5000
	$n$	33	34
<b>Racah</b> $\tilde{U}_n^{(\alpha,\beta)}(s, a, b)$	$N$	55	5000
	$n$	40	400

Tabla 5.2: Comparación de datos de Tamaño y orden máximos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0$ ,  $\mu < 1$ ) y Charlier  $a_1 > 0$

De igual forma, la reducción propuesta mejora la precisión de reconstrucción de imagen. Gracias a la obtención de polinomios con mayores dimensiones es posible obtener reconstrucciones de imagen de mayor tamaño. Para probar esto, se muestra la reconstrucción de la imagen de la Fig. 5.7 con un tamaño de  $256 \times 256$  píxeles. En la Fig. 5.8 se muestra su reconstrucción utilizando diferentes órdenes y familias de momentos.



Figura 5.7: Imagen de  $256 \times 256$  píxeles, para la reconstrucción de una imagen de color mediante el cálculo propuesto.

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

Reconstrucción de imágenes de color utilizando momentos de Krawtchouk, Tchebichef, Hahn, Meixner, Charlier y Racah con diferentes órdenes				
	n=10	n=50	n=90	n=127
Krawtchouk con $p=0.5$				
Tchebichef				
Hahn con $a=b=10$				
Meixner $\mu=0.1$ y $\beta=14$				
Charlier con $a_1=1$				
Racah con $a=1$ $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$				

Figura 5.8: Reconstrucción de una imagen a color utilizando las familias de momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Meixner y Charlier, con diferentes órdenes.

## 5. Cómputo de momentos ortogonales discretos

Para evaluar la eficiencia del cálculo de los momentos se puede utilizar la métrica de reconstrucción basada en el error de reconstrucción de imagen normalizada (NIRE), el cual se define en las Ecs. (4.19) y (4.20). En la Fig. 5.9 se muestra la gráfica de los resultados de error NIRE obtenidos de la reconstrucción de la imagen utilizada.

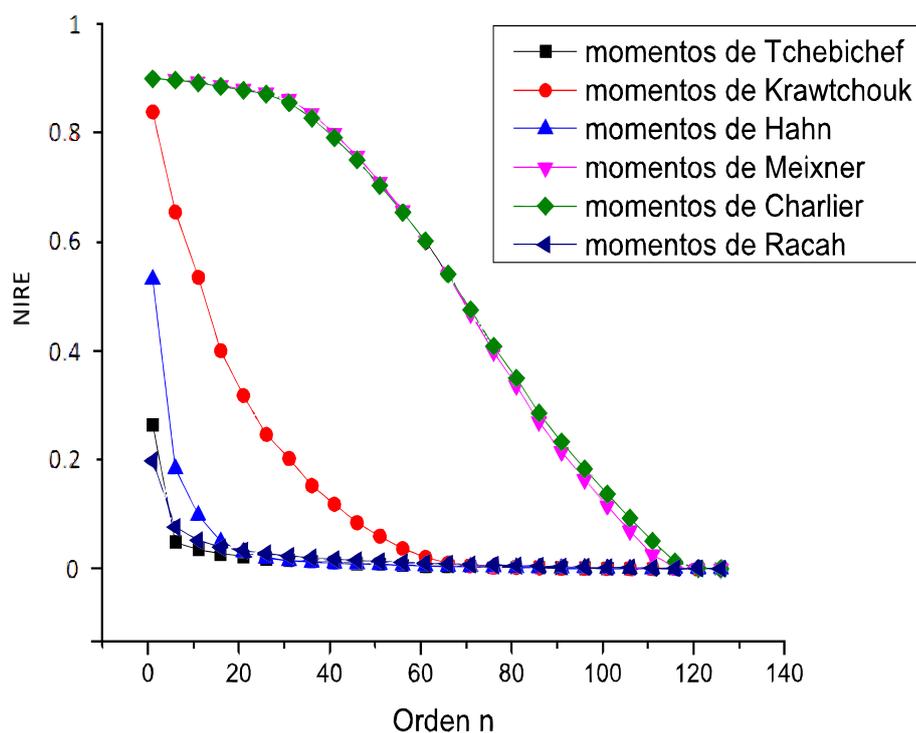


Figura 5.9: Gráfica del error obtenido de la reconstrucción mediante la reducción del cálculo de los momentos de Tchebichef, Krawtchouk con  $p=0.5$ , Hahn con  $a=b=10$ , Meixner con  $\mu=0.43$  y  $\beta=14$ , Charlier con  $a_1=1$  y Racah con  $a=1$ ,  $\alpha=0.1$  y  $\beta=0.5$ .

Como se puede observar en las Figs. 5.8 y 5.9 la reconstrucción de la imagen es diferente para cada una de las familias de momentos utilizadas. Algunas de estas presentan un mejor desempeño que otras, en este caso la familias de momentos de Tchebichef, Hahn son la que presentan mejores resultados en comparación con los momentos de Krawtchouk, Meixner y Charlier.

# Bibliografía

- [1] Gautschi, W. (2006). Orthogonal polynomials, quadrature, and approximation: computational methods and software (in matlab). Lecture Notes In Mathematics-Springer Verlag-, 1883, 1.
- [2] Zhu, H., Liu, M., Shu, H., Zhang, H., & Luo, L. (2010). General form for obtaining discrete orthogonal moments. IET image processing, 4(5), 335-352.
- [3] Moler, C. B. (2004). Numerical computing with MATLAB. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [4] Kahan, W. (1996). IEEE standard 754 for binary floating-point arithmetic. Lecture Notes on the Status of IEEE, 754(94720-1776), 11.
- [5] Bayraktar, B., Bernas, T., Robinson, J. P., & Rajwa, B. (2007). A numerical recipe for accurate image reconstruction from discrete orthogonal moments. Pattern Recognition, 40(2), 659-669.
- [6] Wu, Y., & Liao, S. (2015). Color image analysis via Racah moments. Journal of Theoretical and Applied Computer Science, 9(4), 8-18.
- [7] Koekoek, R., Lesky, P. A., & Swarttouw, R. F. (2010). Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues. Springer Science & Business Media.

## Capítulo 6

# Ortogonalización de Gram-Schmidt

### 6.1. Introducción

El núcleo de los momentos discretos se calculan utilizando ecuaciones de recurrencia, lo que conduce a la propagación y acumulación de errores numéricos para momentos de alto orden o en imágenes de gran tamaño. El cómputo de polinomios ortogonales produce algunas dificultades técnicas relacionadas con el cálculo de momentos, especialmente con la exactitud y eficiencia. Esto significa que sin la precisión adecuada, algunas propiedades de los momentos como la ortogonalidad se ven afectadas. Por otra parte, estos errores presentan un efecto negativo durante el análisis de imágenes y su reconstrucción. Algunos intentos para resolver los problemas de inestabilidad numérica incluyen soluciones indirectas tales como el uso de un esquema en bloque para realizar la reconstrucción en sub secciones de la imagen, lo que evita la necesidad de utilizar momentos de órdenes superiores [1]. En este caso se utiliza el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para la conservación de la propiedad de ortogonalidad durante el cálculo de momentos de altos órdenes.

### 6.2. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Este método fue desarrollado por los matemáticos Jorgen Gram (1850-1916), y Erhardt Schmidt (1876-1959)[2]. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt es un algoritmo que se utiliza para construir un conjunto de vectores ortonormales, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial (usualmente, el espacio  $\mathbb{R}$ ), a otro conjunto ortonormal de vectores que genere el mismo subespacio vectorial. Este método está basado en normalizaciones (vectores unitarios),

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

así como proyecciones de un vector sobre otro para obtener vectores ortogonales. Cuando se tiene solamente dos vectores linealmente independientes,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . En este caso, para obtener un sistema ortogonal a partir de estos vectores sólo se sustituye  $\vec{v}_2$  por su componente transversal respecto a  $\vec{v}_1$ , de manera que pasamos de la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  a la base ortogonal  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  definiendo como [3], [4]:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1,$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2).$$

Esto puede repetirse el número de veces que sea necesario para convertir cualquier conjunto libre de vectores en un conjunto ortogonal. En general, si  $R^k = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  es un sistema de un conjunto de vectores linealmente independientes, los vectores ortogonales  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  están definidos por;

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1,$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_{i+1} &= \vec{v}_{i+1} - \text{proy}_{R_i}(\vec{v}_{i+1}), \\ &= \vec{v}_{i+1} - \left( \frac{\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \cdot \vec{u}_1 - \dots - \left( \frac{\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} \right) \cdot \vec{u}_i.\end{aligned}$$

Si se tiene un conjunto de  $k$  vectores linealmente independiente  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_k\}$  de un espacio vectorial  $R$ , el proceso de ortogonalización se puede realizar mediante el siguiente procedimiento [5], [6]:

Paso 1: Se define un vector unitario  $\hat{u}_1$  en la dirección del primer vector de base (Fig. 6.1a ).

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}.$$

Paso 2: Se obtiene un vector  $\vec{u}_2$  ortogonal al vector  $\hat{u}_1$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2).$$

Paso 3: Se define un vector unitario  $\hat{u}_2$  en la dirección del vector  $\vec{u}_2$  de base (Fig. 6.1b).

$$\hat{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}.$$

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

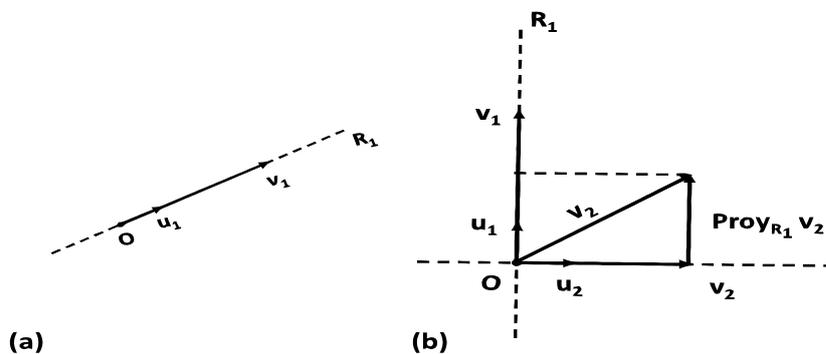


Figura 6.1: a) Vector unitario en dirección de  $v_1$ , b) Proyección de  $\hat{u}_1$  de dirección de  $v_2$ .

Paso 4: Repitiendo el paso 2 y 3 se obtiene un vector unitario  $\hat{u}_3$  ortogonal a la base (Fig. 6.2).

$$\hat{u}_3 = \frac{\vec{v}_3 - \text{proy}_{\hat{u}_1, \hat{u}_2}(\vec{v}_3)}{\|\vec{v}_3 - \text{proy}_{\hat{u}_1, \hat{u}_2}(\vec{v}_3)\|}$$

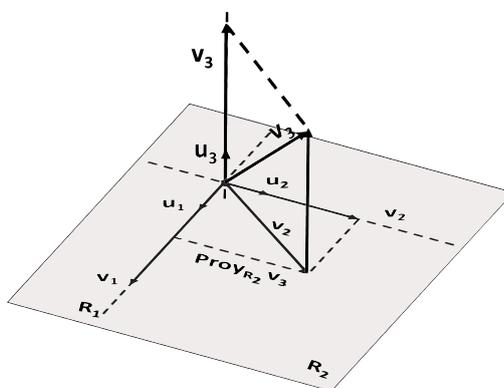


Figura 6.2: Proyección de vector unitario  $\hat{u}_2$  en  $v_3$ .

Paso  $k$ : el proceso de orthogonalización se continua hasta definir el vector  $k$ , de manera que es podemos definir como,

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \text{proy}_{u_i}(\vec{v}_k), \quad \text{para } k > 1,$$

de esta manera es posible obtener un conjunto de vectores ortogonales.

### 6.3. Cómputo de momentos con Gram-Schmidt

Al utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt durante el cálculo de momentos, permite solucionar el problema de la inestabilidad numérica cuando se utilizan momentos de altos ordenes, ya que a que la propiedad de la ortogonalidad no se ve afectada. Una manera de expresar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt de forma explícita es por medio de un pseudocódigo como el que se muestra en el Algoritmo 1.

**Algoritmo 1** : *Algoritmo para el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de una base polinomial (P).*

---

```
1: Funcion Ortogonalizar(P)
2:    $w \leftarrow 0$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:   Para v de P hacer
5:      $u \leftarrow v$ 
6:      $j \leftarrow 0$ 
7:     Mientras i > j
8:        $u \leftarrow u - \text{Proy}(v, P_j)$ 
9:        $j \leftarrow j + 1$ 
10:     $w_i \leftarrow u$ 
11:     $i \leftarrow i + 1$ 
12: devolver w
```

De acuerdo con el pseudocódigo del Algoritmo 1 y utilizando el cálculo de los polinomios mencionados en la Sección 5. El cómputo de las diferentes familias de polinomios ortogonales discretos clásicos.

#### ■ Polinomios de Tchebichef

Los polinomios de Tchebichef se puede obtener mediante el Algoritmo 2. En la Fig. 6.3 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Techebichef que fueron obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

**Algoritmo 2 : Ortonormalización de los polinomios de Tchebichef con el proceso de Gram-Schmidt.**

```

1:  $B_n \leftarrow 2x - N + 1 \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ 
2:  $A_{n-1} \leftarrow \sqrt{\frac{N^2-1}{3}}$ 
3:  $t_1(x; N) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{N}}$ 
4:  $t_2(x; N) \leftarrow \frac{w}{w_1} t_1(x; N)$ 
5: for  $n = 2$  to  $N - 1$  do
6:    $A_n \leftarrow n \sqrt{\frac{N^2-n^2}{(2n+1)(2n-1)}}$ 
7:    $t_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{B_n}{A_n} t_n(x; N) - \frac{A_{n-1}}{A_n} t_{n-1}(x; N)$ 
8:    $A_{n-1} \leftarrow A_n$ 
9:    $T(x; N) \leftarrow t_{n+1}(x; N)$ 
10:  for  $k = 0$  to  $n$  do
11:     $t_{n+1}(x; N) \leftarrow t_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} T(x; N) t_k(x; N) \right] \times t_k(x; N)$ 
12:  end for
13:   $h \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [t_{n+1}(x; N)]^2}$ 
14:   $t_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{t_{n+1}(x; N)}{h}$ 
15: end for

```

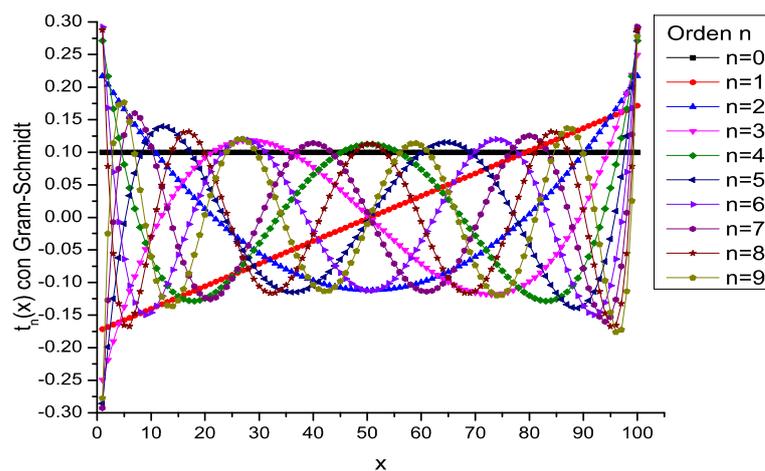


Figura 6.3: Primeros 10 órdenes de los polinomios de Tchebichef con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=100$ .

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

### ▪ Polinomios de Krawtchouk

Los polinomios de Krawtchouk se puede obtener mediante el Algoritmo 3. En la Fig. 6.4 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Krawtchouk obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

**Algoritmo 3 : Ortonormalización de los polinomios de Krawtchouk con el proceso de Gram-Schmidt.**

---

```

1:  $B_n \leftarrow \frac{x-n+1-p(N-2n+2)}{\sqrt{p(1-p)}} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 
2:  $A_{n-1} \leftarrow \sqrt{N}$ 
3:  $k_1(x; N) \leftarrow \sqrt{\frac{N!p^x(1-p)^{N-x}}{x!(N-x)!}}$ 
4:  $k_2(x; N) \leftarrow (-p(N-x) + x(1-p)) * \sqrt{\frac{(N-1)!p^{x-1}(1-p)^{N-x-1}}{x!(N-x)!}}$ 
5: for  $n = 2$  to  $N-1$  do
6:    $A_n \leftarrow \sqrt{n(N-n+1)}$ 
7:    $k_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{B_n}{A_n} k_n(x; N) - \frac{A_{n-1}}{A_n} k_{n-1}(x; N)$ 
8:    $A_{n-1} \leftarrow A_n$ 
9:    $K(x; N) \leftarrow k_{n+1}(x; N)$ 
10:  for  $i = 0$  to  $n$  do
11:     $k_{n+1}(x; N) \leftarrow k_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} K(x; N) k_i(x; N) \right] \times t_i(x; N)$ 
12:  end for
13:   $h \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [k_{n+1}(x; N)]^2}$ 
14:   $k_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{k_{n+1}(x; N)}{h}$ 
15: end for

```

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

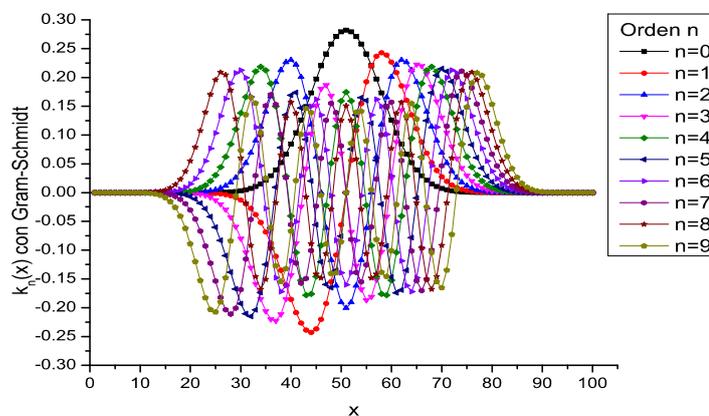


Figura 6.4: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Krawtchouk con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=100$ ,  $p=0.5$ .

### ■ Polinomios de Hahn

Los polinomios de Hahn se puede obtener mediante el Algoritmo 4. En la Fig. 6.5 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Hahn obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

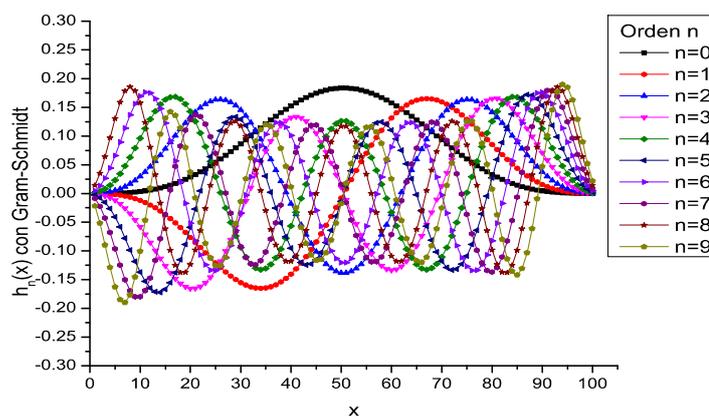


Figura 6.5: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Hahn con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=100$ ,  $a=10$  y  $b=10$ .

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

**Algoritmo 4 : Ortonormalización de los polinomios de Hahn con el proceso de Gram-Schmidt.**

---

```

1:  $B_n \leftarrow \frac{a-b+2n-2}{4} + \frac{(b^2-a^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n-2)} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 
2:  $A_{n-1} \leftarrow \frac{\sqrt{(a+b+1)(a+1)(b+1)(N-1)(a+b+N)}}{a+b+2}$ 
3:  $h_1(x; N) \leftarrow \sqrt{\frac{(a+1)_b(a+b+1)}{(N-a)_{b+1}}}$ 
4:  $h_2(x; N) \leftarrow (a+b+2)x - (b+1)(N-1) \sqrt{\frac{a+b+3}{(a+1)(b+1)(N-1)(N+a+b+1)}}$ 
5: for  $n = 2$  to  $N-1$  do
6:    $A_n \leftarrow \frac{\sqrt{n(a+b+n)(a+n)(b+n)(N-n)(a+b+N)}}{a+b+2n}$ 
7:    $h_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{B_n}{A_n} h_n(x; N) - \frac{A_{n-1}}{A_n} h_{n-1}(x; N)$ 
8:    $A_{n-1} \leftarrow A_n$ 
9:    $H(x; N) \leftarrow h_{n+1}(x; N)$ 
10:  for  $k = 0$  to  $n$  do
11:     $h_{n+1}(x; N) \leftarrow h_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} H(x; N) h_k(x; N) \right] \times h_k(x; N)$ 
12:  end for
13:   $l \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [h_{n+1}(x; N)]^2}$ 
14:   $h_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{h_{n+1}(x; N)}{l}$ 
15: end for

```

### ■ Polinomios de Meixner

Los polinomios de Meixner se puede obtener mediante el Algoritmo 5. En la Fig. 6.6 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Meixner obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

**Algoritmo 5 : Ortonormalización de los polinomios de Meixner con el proceso de Gram-Schmidt.**

```

1:  $B_n \leftarrow \frac{(x-n+1+\mu(-x-n+1-\beta))\sqrt{\mu}}{\mu} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 
2:  $A_{n-1} \leftarrow \sqrt{\beta}$ 
3:  $\varpi_1(x; N) \leftarrow \sqrt{\frac{\mu^x(\beta+x-1)!}{x!(\beta-1)!}}(1-\mu)^\beta$ 
4:  $\varpi_2(x; N) \leftarrow (\beta + x - \frac{x}{\mu}) * \sqrt{\frac{\mu^x(\beta+x-1)!}{x!(\beta-1)!} \frac{\mu(1-\mu)^\beta}{\beta}}$ 
5: for  $n = 2$  to  $N-1$  do
6:    $A_n \leftarrow \sqrt{n(\beta+n-1)}$ 
7:    $\varpi_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{B_n}{A_n} \varpi_n(x; N) - \frac{A_{n-1}}{A_n} \varpi_{n-1}(x; N)$ 
8:    $A_{n-1} \leftarrow A_n$ 
9:    $\Omega(x; N) \leftarrow \varpi_{n+1}(x; N)$ 
10:  for  $k = 0$  to  $n$  do
11:     $\varpi_{n+1}(x; N) \leftarrow \varpi_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} \Omega(x; N) \varpi_k(x; N) \right] \times \varpi_k(x; N)$ 
12:  end for
13:   $h \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [\varpi_{n+1}(x; N)]^2}$ 
14:   $\varpi_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{\varpi_{n+1}(x; N)}{h}$ 
15: end for

```

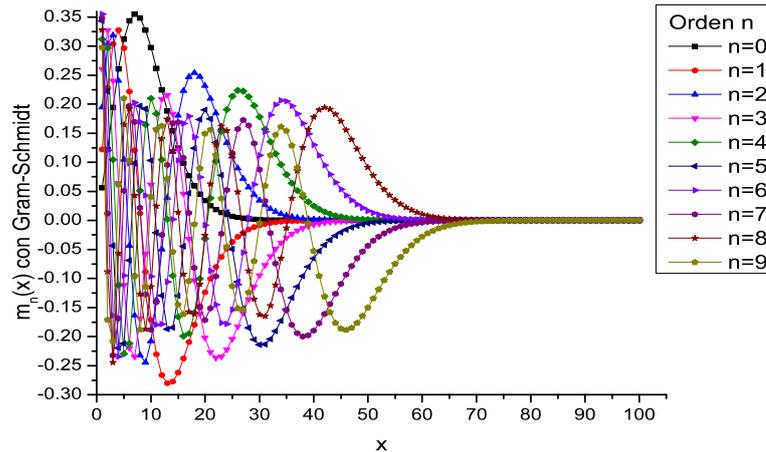


Figura 6.6: Primeros 10 ordenes de los polinomios de Meixner con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=100$ ,  $\mu=0.43$  y  $\beta=14$ .

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

### ■ Polinomios de Charlier

Los polinomios de Charlier se pueden calcular mediante el Algoritmo 6. En la Fig. 6.7 se muestran los primeros ordenes de la familia de polinomios de Charlier obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

**Algoritmo 6 : Ortonormalización de los polinomios de Charlier con el proceso de Gram-Schmidt.**

---

```
1:  $B_n \leftarrow -\frac{(x-n+1)\sqrt{a_1}}{a_1} \forall x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 
2:  $A_{n-1} \leftarrow 1$ 
3:  $c_1(x; N) \leftarrow \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^x}{x!}}$ 
4:  $c_2(x; N) \leftarrow \frac{a_1-x}{a_1} \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^{x+1}}{x!}}$ 
5: for  $n = 2$  to  $N-1$  do
6:    $A_n \leftarrow \sqrt{n}$ 
7:    $c_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{B_n}{A_n} c_n(x; N) - \frac{A_{n-1}}{A_n} c_{n-1}(x; N)$ 
8:    $A_{n-1} \leftarrow A_n$ 
9:    $C(x; N) \leftarrow c_{n+1}(x; N)$ 
10:  for  $k = 0$  to  $n$  do
11:     $c_{n+1}(x; N) \leftarrow c_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} C(x; N) c_k(x; N) \right] \times c_k(x; N)$ 
12:  end for
13:   $h \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [c_{n+1}(x; N)]^2}$ 
14:   $c_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{c_{n+1}(x; N)}{h}$ 
15: end for
```

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

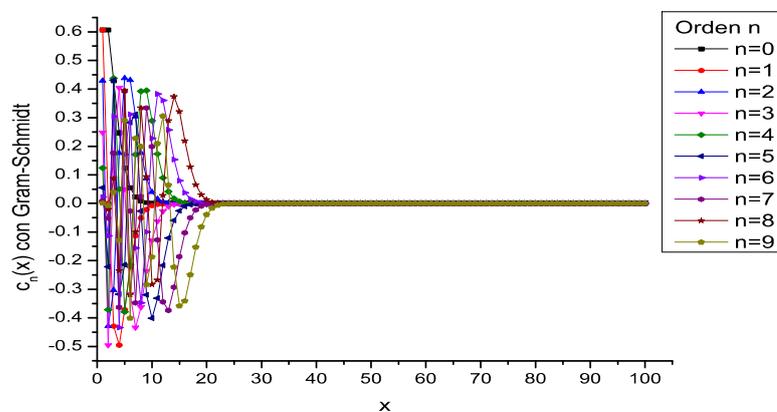


Figura 6.7: Primeros 10 órdenes de los polinomios de Charlier con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=100$  y  $a_1=1$ .

### ■ Polinomios de Racah

Los polinomios de Racah también son calculados mediante el Algoritmo 7. En la Fig. 6.8 se muestran los primeros órdenes de la familia de polinomios de Racah obtenidos utilizando el proceso de ortogonalización.

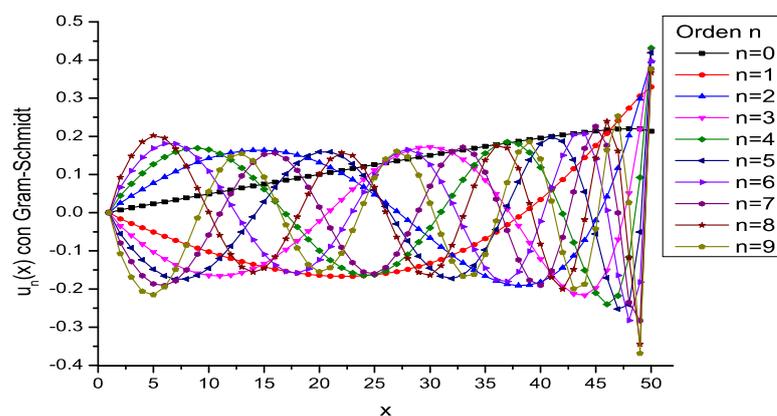


Figura 6.8: Primeros 10 órdenes de los polinomios de Racah con ortogonalización de Gram-Schmidt con  $N=50$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0.5$  y  $a=1$ .

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

**Algoritmo 7 : Ortonormalización de los polinomios de Racah con el proceso de Gram-Schmidt.**

```

1:  $w_1 \leftarrow \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(N-a+\alpha+\beta+1)(a+N+\alpha+1)(\alpha+\beta+1)(N-a)}{\alpha+\beta+1}$ 
2:  $d_0^2 \leftarrow (N-a)_{\alpha+\beta+1} (a+N-\beta)_{\alpha+1+\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)}$ 
3:  $p_n s \leftarrow (s-a+1)_{\beta+n} (N-s-n)_{a+n} (a+\beta+s+1)_{n+\beta} (N+s+1)_{\alpha+n}$ 
4:  $u_1(x; N) \leftarrow \sqrt{\frac{(2s+1)p(s)}{d_0^2}}$ 
5:  $d_1^2 \leftarrow (N-a-1)_{\alpha+\beta+3} (a+N-1)_{\alpha+3+\beta} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$ 
6:  $u_2(x; N) \leftarrow \frac{1}{p(s)} \frac{p_1(s)-p_1(s-1)}{x(s+1/2)-x(s-1/2)} \sqrt{\frac{(2s+1)p(s)}{d_1^2}}$ 
7: for  $n = 2$  to  $N - 1$  do
8:    $w_2 \leftarrow \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(N-a+\alpha+\beta+n)(a+N+\alpha+n)(\alpha+\beta+2(n-1)+1)(N-a-n+1)}{n(\alpha+\beta+n)}$ 
9:    $u_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{w}{w_2} u_n(x; N) - \frac{w_1}{w_2} u_{n-1}(x; N)$ 
10:   $w_1 \leftarrow w_2$ 
11:   $U(x; N) \leftarrow u_{n+1}(x; N)$ 
12:  for  $k = 0$  to  $n$  do
13:     $u_{n+1}(x; N) \leftarrow u_{n+1}(x; N) - \left[ \sum_{x=0}^{N-1} U(x; N) u_k(x; N) \right] \times u_k(x; N)$ 
14:  end for
15:   $h \leftarrow \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} [u_{n+1}(x; N)]^2}$ 
16:   $u_{n+1}(x; N) \leftarrow \frac{u_{n+1}(x; N)}{h}$ 
17: end for

```

### 6.4. Reconstrucción de imágenes de gran tamaño

La implementación del proceso de ortogonalización en los polinomios ortogonales discretos permite cumplir con la condición de ortogonalidad y eliminar la acumulación de error numérico durante el cálculo de momentos con altos ordenes, esto significa que brindan un mejor desempeño en la reconstrucción. Por otra parte, el cálculo obtenido mediante la reducción de términos y la utilización de la ortogonalización de Gram-Schmidt, permite aumentar el orden y tamaño sin afectar la condición de ortogonalidad. En la Tabla 6.1 se muestra la comparación de los órdenes  $n$  y tamaño  $N$  máximos obtenidos del cómputo propuesto por Zhu [7], el cálculo reducido y con el proceso de Gram-Schmidt.

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

Comparación de los órdenes $n$ y tamaño $N$ para el cálculo de polinomios discretos que cumplen con la condición de ortogonalidad				
Polinomios	Parámetros	Cálculo de Zhu et al.[7]	Cálculo reducido	Cálculo con Gram-schmidt
<b>Tchebichef</b> $\tilde{t}_n(x; N)$	$N$	5000	5000	5000
	$n$	500	600	5000
<b>Krawtchouk</b> $\tilde{k}_n(x; p, N)$	$N$	170	5000	5000
	$n$	160	300	5000
<b>Hahn</b> $\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N)$	$N$	165	5000	5000
	$n$	110	700	5000
<b>Meixner</b> $\tilde{\varpi}_n^{(\beta,\mu)}(x)$	$N$	155	5000	5000
	$n$	40	90	5000
<b>Charlier</b> $\tilde{c}_n^{a_1}(x)$	$N$	150	5000	5000
	$n$	33	34	5000
<b>Racah</b> $\tilde{U}_n^{(\alpha,\beta)}(s, a, b)$	$N$	55	5000	5000
	$n$	40	400	5000

Tabla 6.1: Tabla de comparación de datos de Tamaño y orden máximos para los polinomios de Tchebichef, Krawtchouk ( $0 < p < 1$ ), Hahn ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), Meixner ( $\beta > 0$ ,  $\mu < 1$ ) y Charlier  $a_1 > 0$

También, el proceso de ortogonalización mejora la precisión de reconstrucción de imagen gracias a la obtención de polinomios con mayores dimensiones. Para probar esto, se muestra en la Fig. 6.9 la reconstrucción de imágenes con dimensiones de 4800 x 2560 pixeles y resolución de 72 ppp. En la Fig. 6.10 se muestra la reconstrucción de imágenes a color con diferentes familias de momentos y ordenes.



Figura 6.9: Imagen de prueba para la reconstrucción de imagen de gran tamaño.

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

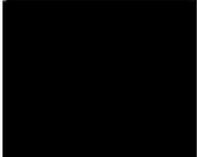
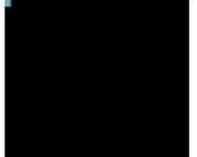
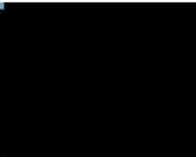
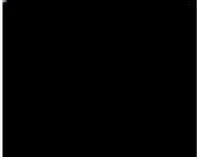
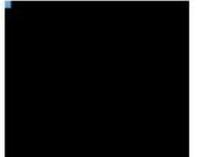
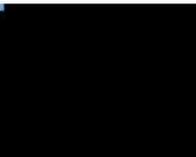
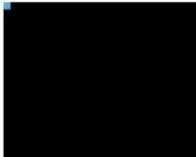
Reconstrucción de imágenes de color utilizando momentos de Krawtchouk, Tchebichef, Hahn, Meixner, Charlier y Racah con diferentes órdenes				
	n=50	n=150	n=300	n=500
Krawtchouk con $p=0.5$				
Tchebichef				
Hahn con $a=b=10$				
Meixner $\mu=0.1$ y $\beta=14$				
Charlier con $a_1=1$				
Racah con $a=1$ , $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$				

Figura 6.10: Resultados obtenidos de la reconstrucción de imágenes utilizando diferentes familias de momentos.

## 6. Ortogonalización de Gram-Schmidt

---

De igual forma para evaluar la eficiencia del cálculo de los momentos se puede utilizar la métrica de reconstrucción basada en el error de reconstrucción de imagen normalizada, la cual se define en la Ec. (4.19) y (4.20). En la Fig. 6.11 se muestra la gráfica de los resultados de error obtenidos de la reconstrucción de la imagen utilizada. Como se puede observar en las Figs. 6.10 y 6.11 la reconstrucción de la imagen es diferente para cada una de las familias de momentos utilizadas. Algunas presentan un mejor desempeño que otras. En este caso, la familias de momentos de Tchebichef, Hahn y Racah son los que presentan mejores resultados en comparación con los momentos de Krawtchouk, Meixner y Charlier.

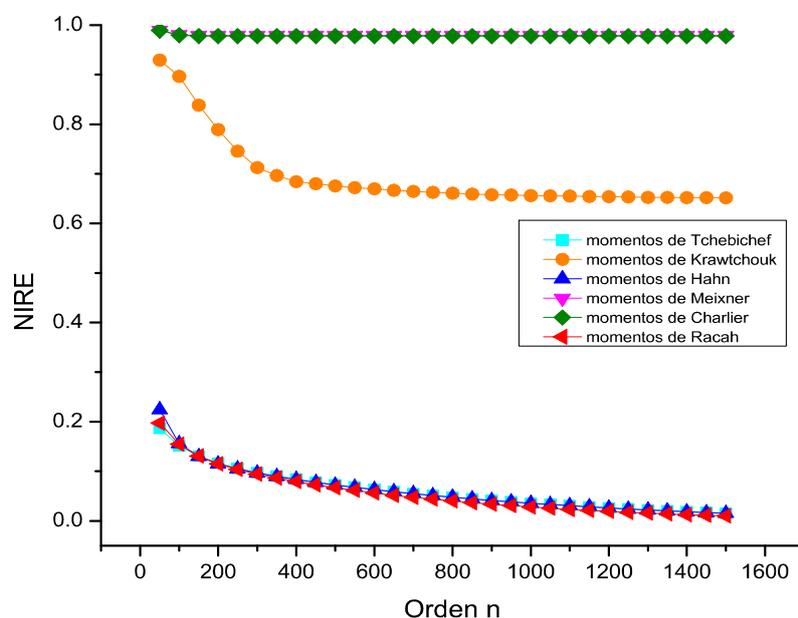


Figura 6.11: Gráfica obtenida del error de reconstrucción utilizando altos ordenes de los momentos de Tchebichef, Krawtchouk con  $p=0.5$ , Hahn con  $a=b=10$ , Meixner con  $\mu=0.43$  y  $\beta=14$ , Charlier con  $a_1=1$  y Racah con  $a=1$ ,  $\alpha=0.1$  y  $\beta=0.5$ .

# Bibliografía

- [1] Arce, C., Castillo, W., & González, J. (2004). Álgebra lineal. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.
- [2] Rosen, K. H. (Ed.). (1999). Handbook of discrete and combinatorial mathematics. CRC press., 153-154.
- [3] Méndez, F. J. M., & Seoane, M. S. (2008). Análisis de Componentes Independientes en separación de fuentes de ruido de tráfico en vías interurbanas. ETSI Telecomunicación, Universidad de Vigo. C./maxwell s/n, 36310.
- [4] Spiegel, M. R., & Garcia, H. R. (1983). Ecuaciones diferenciales aplicadas (No. 04; QA371, S6.). Prentice Hall.
- [5] García, F. C., & Sarría, F. A. (2014). Comparación de técnicas de fusión en imágenes de alta resolución espacial. GeoFocus. Revista Internacional de Ciencia y Tecnología de la Información Geográfica, (14), 144-162.
- [6] Agudelo, A. P., & López, J. G. (2004). Ecuación Diferencial Asociada a los Polinomios Ortogonales Clásicos. Scientia et technica, 10(26), 179-184.
- [7] Zhu, H., Liu, M., Shu, H., Zhang, H., & Luo, L. (2010). General form for obtaining discrete orthogonal moments. IET image processing, 4(5), 335-352.

## Capítulo 7

# Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

### 7.1. Introducción

Actualmente, la tecnología de marca de agua digital es considerada como una solución para prevenir el uso incorrecto de la información. En la última década se han propuesto algoritmos de marca de agua para proteger los derechos de autor de objetos multimedia como imágenes digitales, clips de audio y video. Se han desarrollado diferentes algoritmos para la implementación de marca de agua de imagen en los últimos años, tanto en dominios espaciales como en frecuenciales. Sin embargo, la cantidad de producción multimedia digital aumenta exponencialmente, de igual forma que la vulnerabilidad y por consiguiente aumenta la necesidad de mejores y más avanzadas técnicas para marcar con agua los objetos digitales multimedia.

El rápido crecimiento de las tecnologías multimedia digitales trae gran atención al campo de la autenticación digital. La marca de agua digital se ha reconocido ampliamente como una medida eficaz para proteger los derechos de autor de los datos multimedia.

En este trabajo se presenta un algoritmo, el cual permite realizar el cifrado y descifrado de una imagen en escala de grises y de color en un video mediante el uso de los momentos ortogonales discretos con el fin de proteger información brindando mayor seguridad y confidencialidad del mismo. También, puede marcar el video con una imagen oculta de derechos de autor, de igual forma se muestran los resultados obtenidos al encriptar imágenes de prueba en un video y la recuperación de la imagen encriptada, así como sus error de reconstrucción utilizando los momentos ortogonales

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

discretos de tres diferentes familias de polinomios ortogonales.

### 7.2. Marca de agua en video

Hoy en día se han implementado nuevas técnicas para proporcionar seguridad, confidencialidad, integridad y autenticación. Los momentos han sido utilizados para la marca de agua en pequeñas imágenes binarias [1]. En la mayoría de los trabajos relacionados con la encriptación de información hace referencia a la inserción de marca de agua en una imagen. En este trabajo, se utiliza este principio para realizar el cifrado de una imagen en una secuencia de vídeo.

Un video se puede definir como una secuencia o sucesión de imágenes presentadas a una cierta velocidad caracterizada por el número de imágenes por segundo expresada en FPS (cuadros por segundo) como se muestra en la Fig. 7.1. Algunos estándares de origen europeo PAL(Phase Alternating Line o “Linea de Fase Alternada”, en español) y SECAM( Sequentiel Couleur a Memoire o “Color secuencial con memoria”, en español ) especifican 25 cuadros por segundo, mientras que NTSC( National Television System Committee o “Comité Nacional de Sistema de Televisión”, en español) especifica 29,97 cuadros por segundo [3]. Para lograr la ilusión de una imagen en movimiento, la velocidad mínima de carga de las imágenes es de unas quince imágenes por segundo, sin embargo, el ojo humano puede distinguir movimiento mucho más fluido por encima de los 48 fotogramas por segundo.

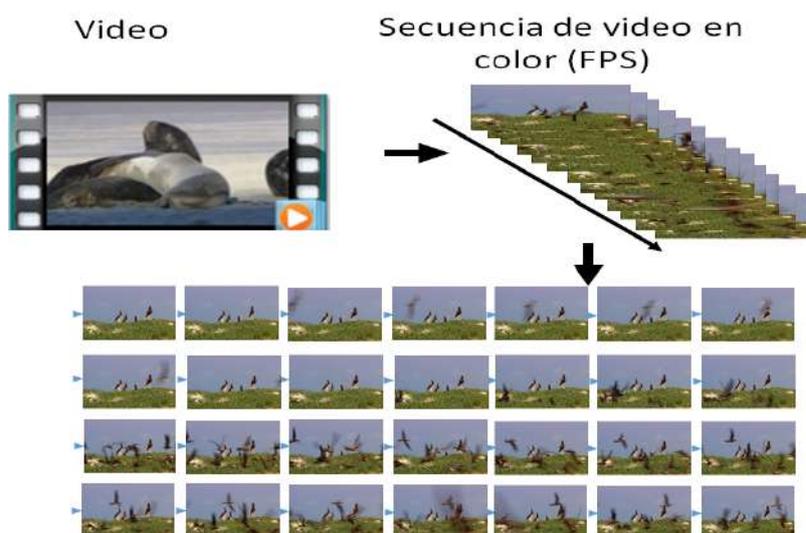


Figura 7.1: Representación de un video en una secuencia de imágenes.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

### 7.2.1. Algoritmo propuesto para la marca de agua en video en escala de grises

A continuación se presenta un algoritmo, el cual permite realizar el cifrado y descifrado de una imagen en escala de grises en video utilizando momentos ortogonales discretos con el fin de proteger información brindando mayor seguridad y confidencialidad del mismo.

La **encriptación de una imagen** se propone de la siguiente manera:

**Paso 1:** Se toma el primer cuadro  $f(x, y)$  de la secuencia de video y lo divide en bloques  $n \times m$  como se puede apreciar en la Fig. 7.2.

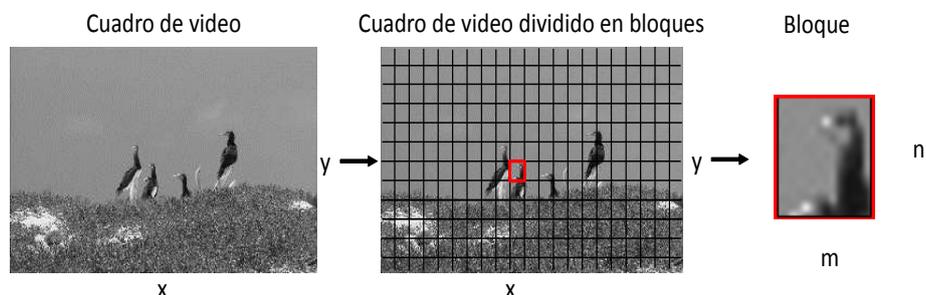


Figura 7.2: División de la imagen de video en bloques.

El número de cuadros utilizados es igual al número de bloques de la imagen a encriptar.

**Paso 2:** De manera similar como se muestra en la Fig. 7.3, se divide la imagen a encriptar  $g(M, N)$  en bloques de  $i \times j$  con una relación de  $i = M/(8*m)$  y  $j = N/n$ , los cuales contienen los valores de intensidad de la imagen a encriptar.

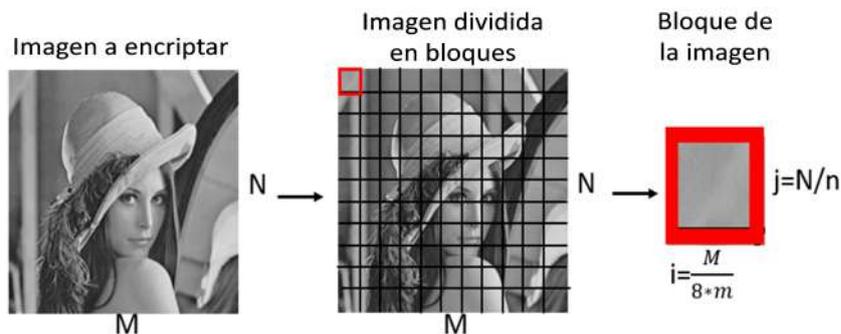


Figura 7.3: División de la imagen a encriptar en bloques.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 3:** Una vez obtenido el bloque de la imagen, se convierte cada nivel de intensidad del bloque a su equivalencia en número binario, teniendo como resultado una matriz  $I_{i \times 8, j}$  como se observa en la Fig. 7.4.

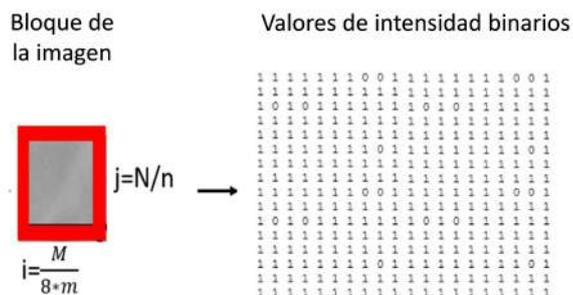


Figura 7.4: Obtención de valores de forma binarios del bloque.

**Paso 4:** Posteriormente se calcula los momentos de cada uno de los bloques del cuadro de la imagen como se muestran en la Fig. 7.5.

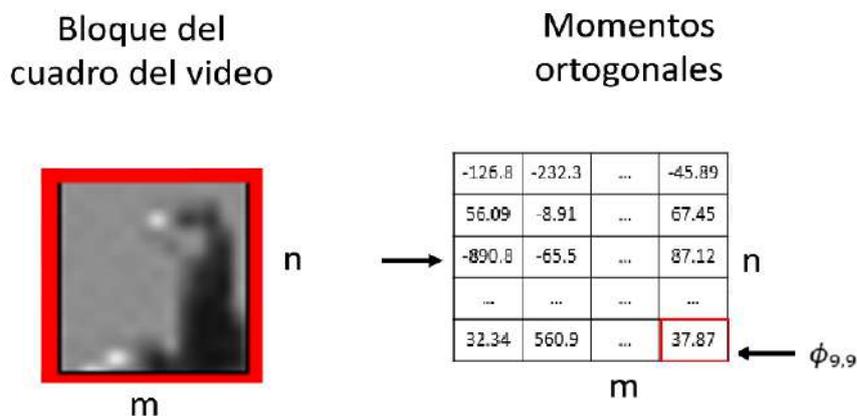


Figura 7.5: Cálculo de momentos del bloque.

**Paso 5:** Para insertar cada valor binario de la matriz  $I_{i \times 8, j}$  al bloque del cuadro  $\phi_{m, n}$  se utiliza la siguiente condición de la Ec. (7.1),

$$if \begin{cases} I_{i, j} = 0 \rightarrow \phi_{9, 9} = \phi_{9, 9} + v \\ I_{i, j} = 1 \rightarrow \phi_{9, 9} = \phi_{9, 9} - v \end{cases} \quad (7.1)$$

donde  $v$  es un valor numérico que permite realizar la encriptación. El proceso se muestra en la Fig. 7.6.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

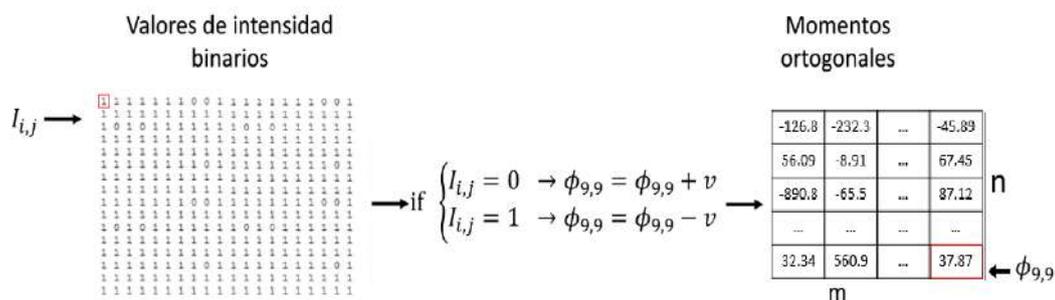


Figura 7.6: Encriptación de la imagen.

**Paso 6:** Una vez insertada parte de la información de la imagen, se realiza la reconstrucción de cada bloque con los momentos marcados y los devuelve a su posición original como se muestra en la Fig. 7.7.

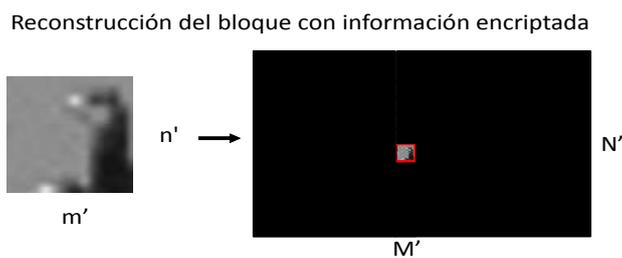


Figura 7.7: Recuperación del bloque del cuadro del video.

**Paso 7:** Finalmente, en la Fig.7.8, se puede ver que se obtiene nuevamente el cuadro del video pero con una parte de la imagen encriptada.

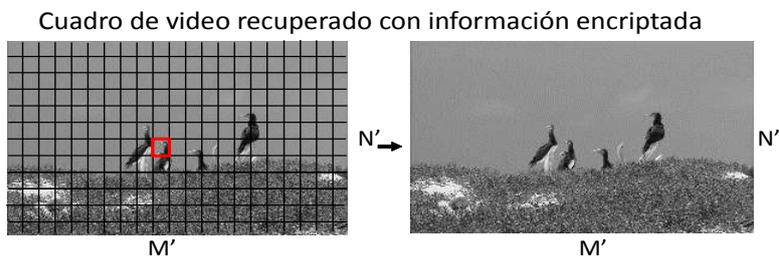


Figura 7.8: Recuperación del cuadro de video.

Una vez terminado el primer cuadro del video se repite lo mismo para los siguientes cuadros.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

La **recuperación de la imagen** encriptada puede ser considerado como el proceso inverso para realizar la encriptación de la imagen, utilizando el video con la imagen encriptada.

El proceso de desencriptación de una imagen esta dado de la siguiente manera:

**Paso 1:** Se toma el primer cuadro de la secuencia de imágenes del video con la información de la imagen encriptada para realizar la división por bloques como se ve en la Fig. 7.9 ,

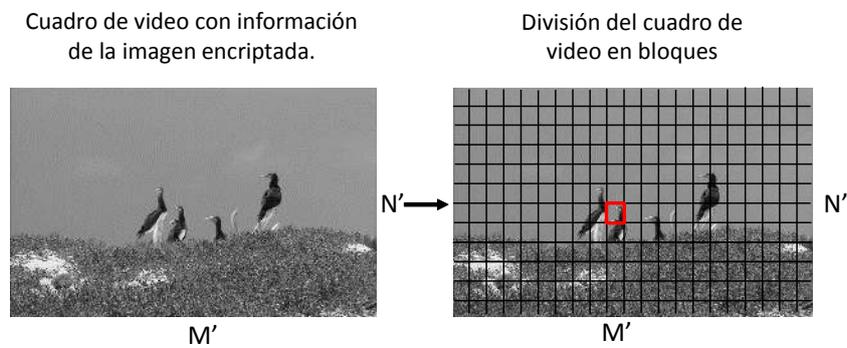


Figura 7.9: División del cuadro de video con la imagen encriptada.

**Paso 2:** Se obtiene el cálculo de los momentos de cada bloque como se muestra en la Fig. 7.10.

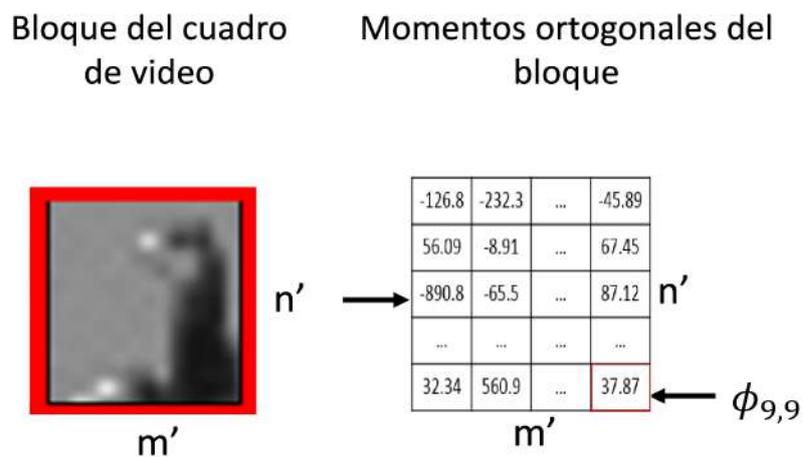


Figura 7.10: Cálculo de momentos del bloque.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 3:** Se recuperan los valores binarios de los valores de intensidad de la imagen encriptada utilizando los momentos obtenidos de cada bloque y la siguiente condición de la Ec.(7.2),

$$if \left\{ \begin{array}{l} \phi_{9,9} > 0 \rightarrow I'_{i,j} = 0 \\ \phi_{9,9} < 0 \rightarrow I'_{i,j} = 1 \end{array} \right\}, \quad (7.2)$$

mediante el proceso mostrado en la Fig. 7.11.

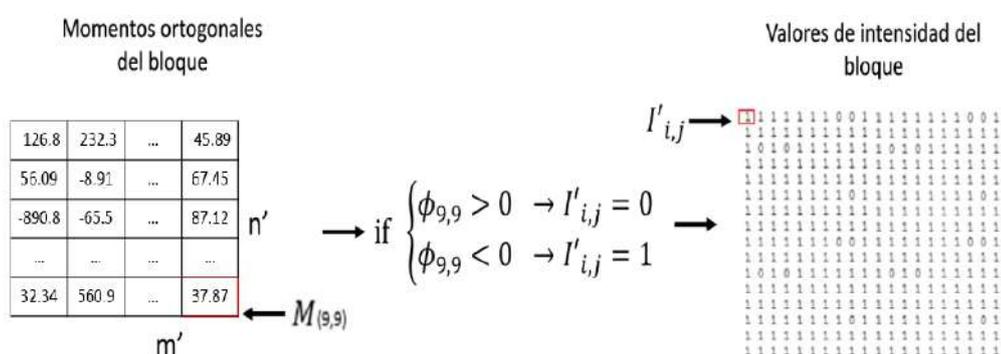


Figura 7.11: Recuperación de la imagen encriptada.

**Paso 4:** Una vez obtenida la matriz de valores, se recupera cada bloque y se ubica en la posición correcta. Realizando el mismo procedimiento para el número de cuadros que fueron utilizados para insertar la imagen completamente se puede obtener la imagen que fue encriptada, como se puede ver en la Fig. 7.12.

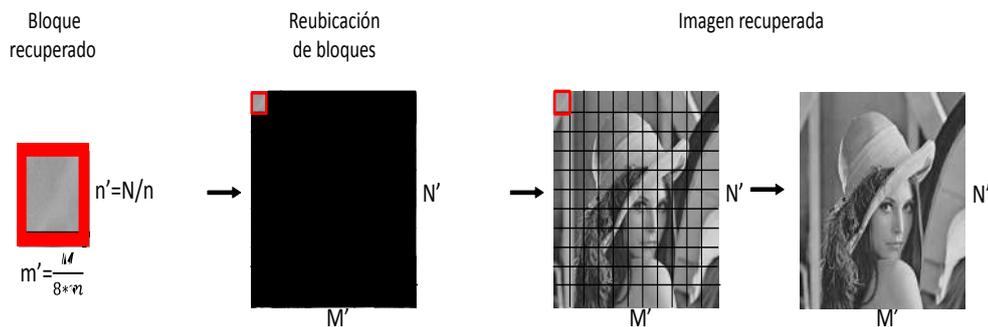


Figura 7.12: Recuperación de imagen encriptada.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

### 7.2.2. Algoritmo propuesto para la marca de agua de video en color

De igual forma es posible utilizar el algoritmo propuesto para realizar el cifrado y descifrado de una imagen de color en video mediante el uso de los momentos ortogonales discretos. Tomando en cuenta que una imagen de color está compuesta por sus tres canales RGB (Red, Green y Blue) se puede realizar la **encriptación de una imagen de color**, modificando el algoritmo propuesto.

El algoritmo modificado comienza de la siguiente manera:

**Paso 1:** Se toma el primer cuadro imagen  $f(x,y)$  de la secuencia de video y la descompone en sus tres canales RGB como se muestra en la Fig. 7.13, igualmente se realiza para la imagen a encriptar como se muestra en la Fig. 7.14.

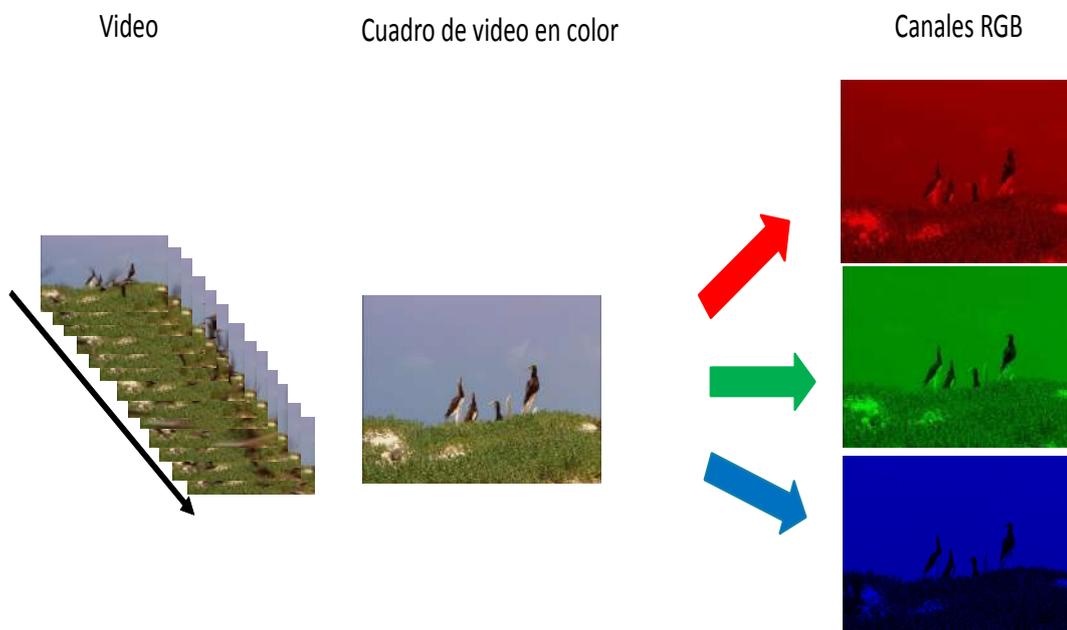


Figura 7.13: Separación de cuadro de video en los canales RGB.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

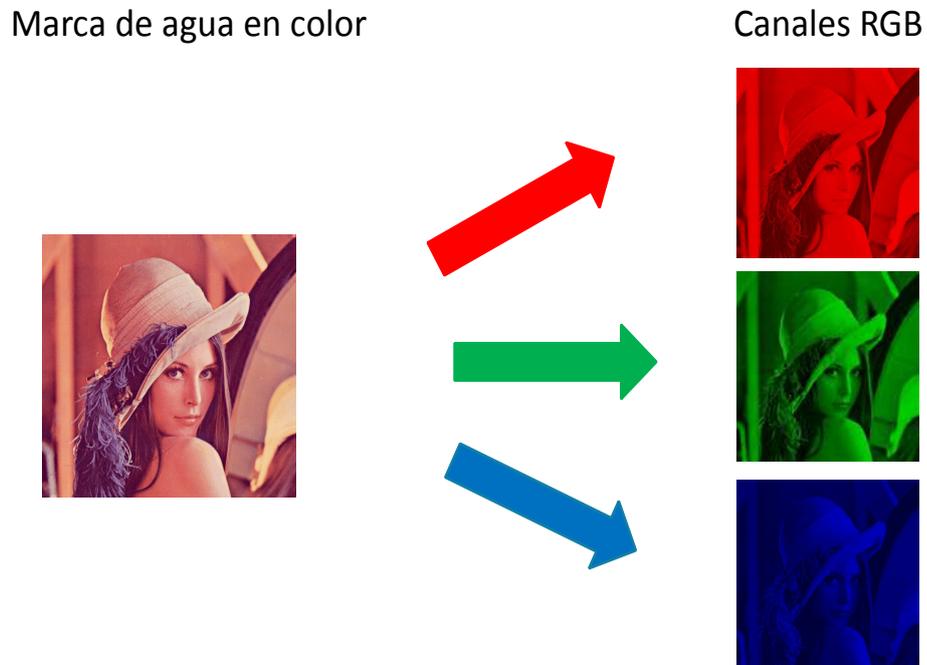


Figura 7.14: Separación de la imagen a encriptar en los canales RGB.

**Paso 2:** Se elige uno de los tres canales de la imagen del video y divide en bloques de  $n \times m$  como se aprecia en la Fig. 7.15.

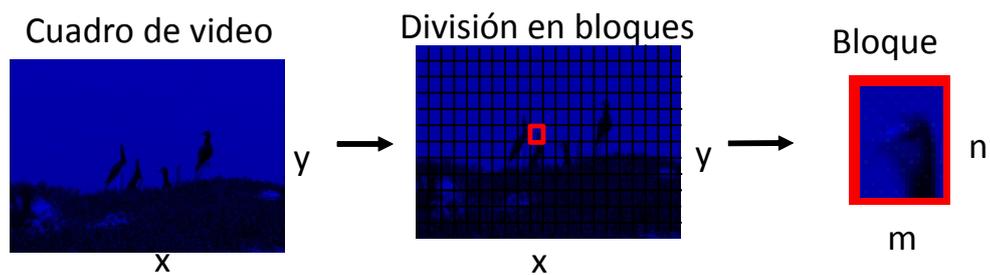


Figura 7.15: División del cuadro de video en su canal azul.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 3:** Para encriptar parte de la imagen en el cuadro de video, se repiten los pasos del 1 al 7 del proceso de incriptación para una imagen en escala de grises, como se muestra en la Fig. 7.16

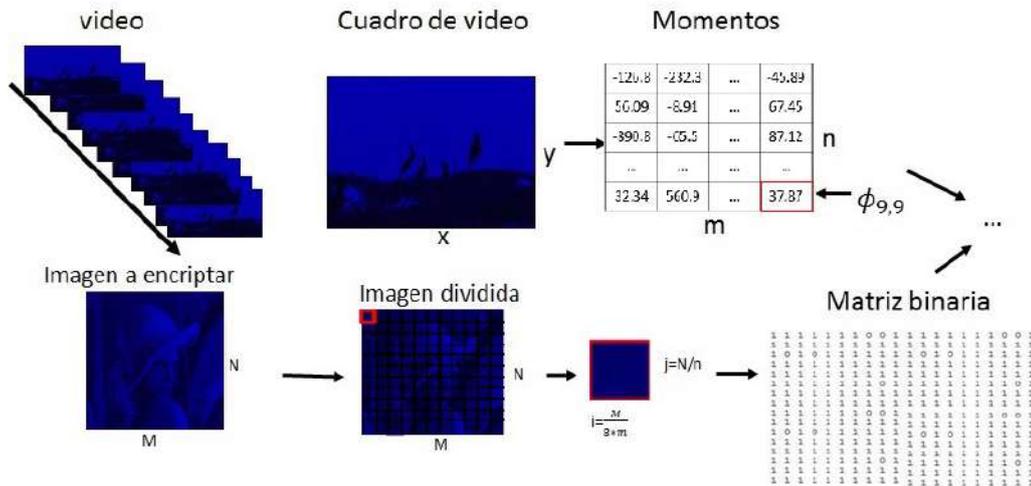


Figura 7.16: Encriptación de una imagen de color en video.

**Paso 4:** Una vez terminado el primer cuadro del video se unen los tres canales de la imagen para obtener el cuadro del video en color con parte de la información de la imagen a encriptar como se muestra en la Fig. 7.17, a continuación se repite lo mismo para los siguientes cuadros del video hasta lograr encriptar completamente la información del primer canal de la imagen.

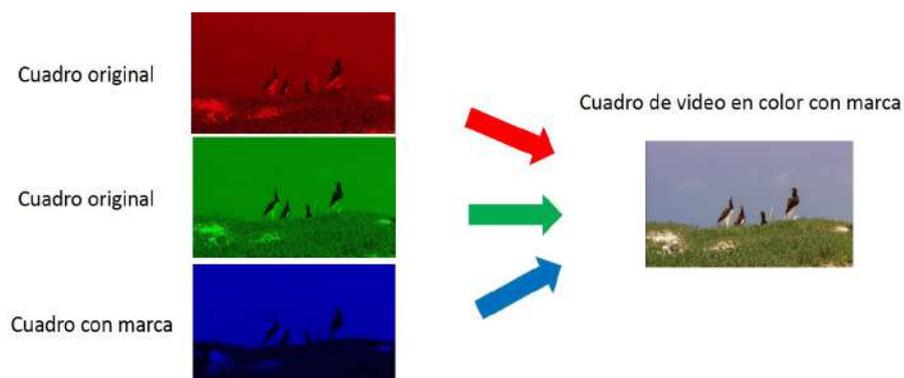


Figura 7.17: Recuperación de cuadro de video en color.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 5:** Se encriptan los canales RGB restantes continuando con la secuencia de cuadros del video y repitiendo los pasos 3 y 4 como se muestra en las Figs. 7.18 y 7.19.

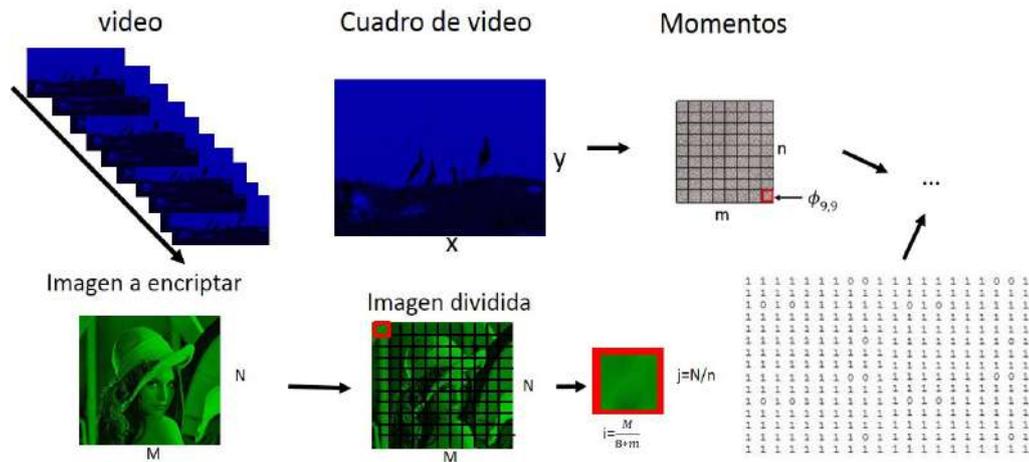


Figura 7.18: Encriptación del canal G de imagen en video.

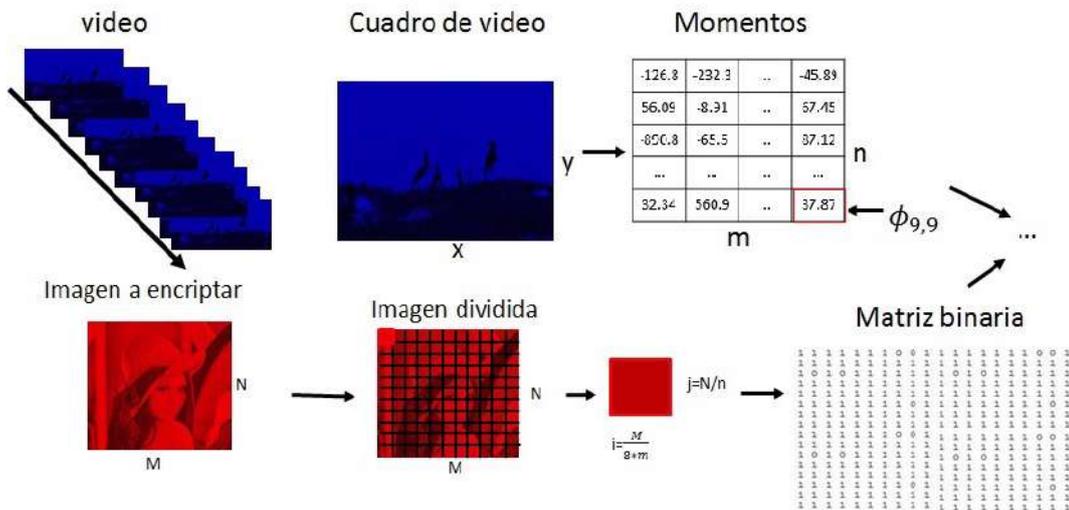


Figura 7.19: Encriptación del canal R de imagen en video.

**Paso 6:** Finalmente se tiene el video con la imagen RGB encriptada.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

La **recuperación para la imagen RGB** se realiza de la siguiente forma:

**Paso 1:** Se utiliza el proceso de recuperación de la imagen en escala de grises para cada canal RGB.

**Paso 2:** Se unen los tres canales que fueron obtenidos para tener como resultado la recuperación de la imagen de color que fue encriptada como marca de agua en el video como se muestra en la Fig. 7.20.

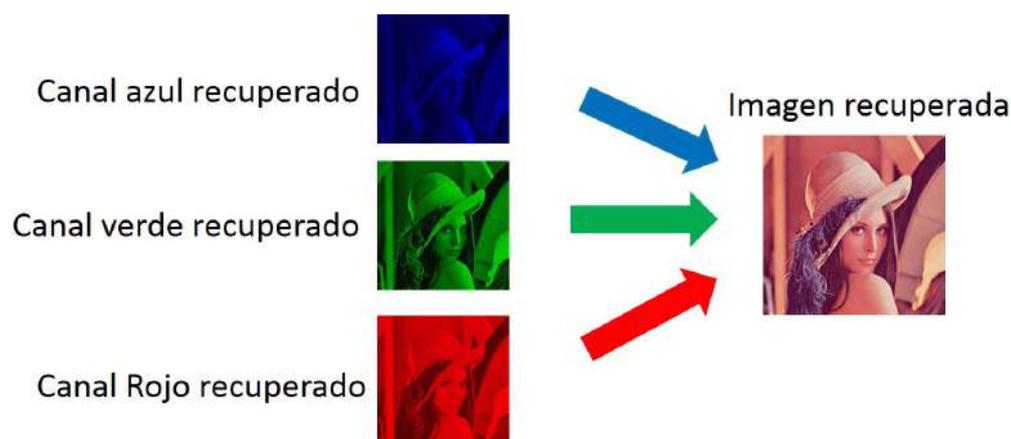


Figura 7.20: Imagen de color recuperada.

### 7.3. Resultados obtenidos de la marca de agua en video

En esta parte se presentan los resultados obtenidos mediante el algoritmo propuesto para la realización de encriptación en video, al igual que su recuperación de las siguientes tres imágenes de prueba en color y escala de grises con dimensiones de 512 x 512 píxeles presentadas en la Fig. 7.21.

Por otra parte, el video que fue utilizado es llamado “wildlife.wmv” o “Naturaleza.wmv” que esta como predeterminado en Windows 7 de 2008 Microsoft Corp., tiene dimensiones de 1280 x 720 píxeles, 30 fps (cuadros por segundo), duración de 30 segundos y un total de 900 fps en escala de grises.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

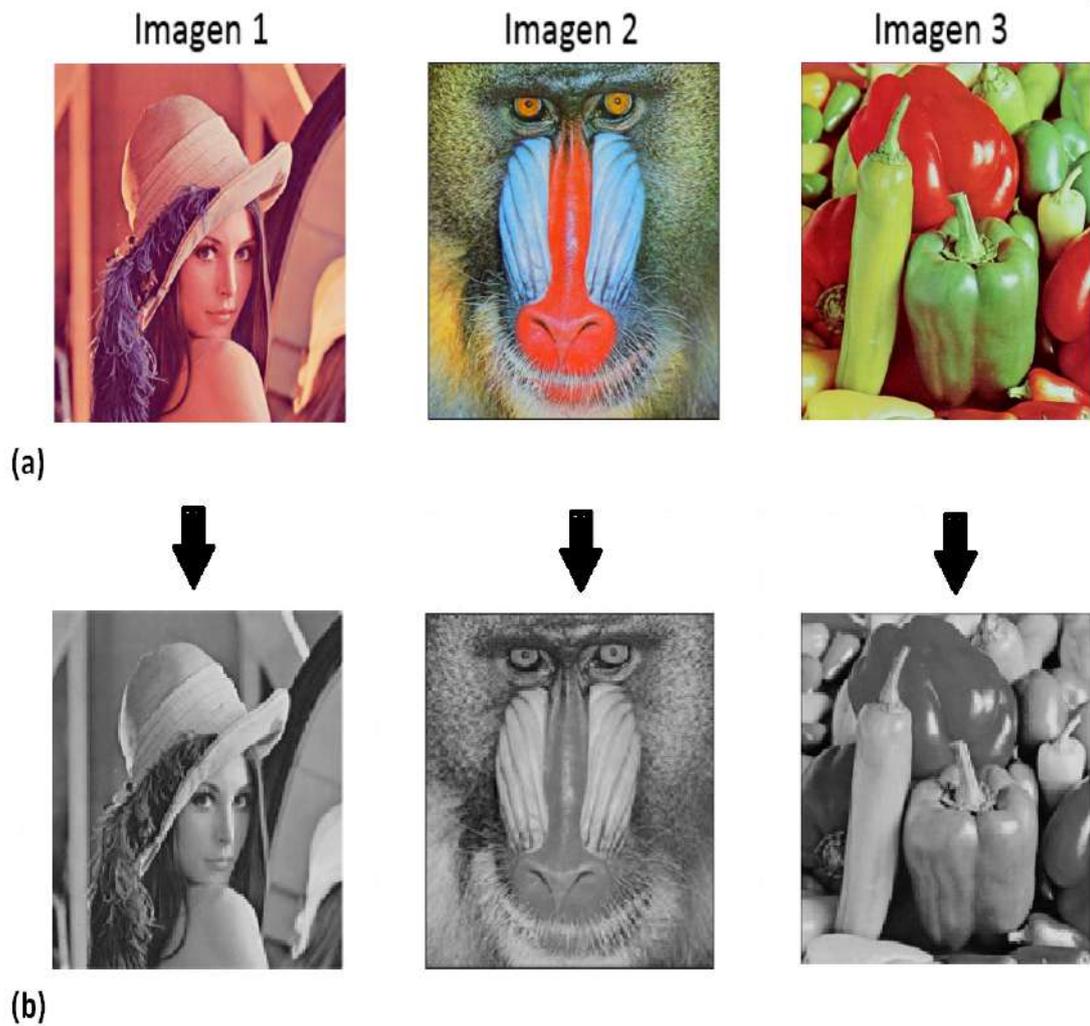


Figura 7.21: Imágenes de prueba utilizadas para la marca de agua en video, a) Imágenes de color, b) Imágenes a en escala de grises.

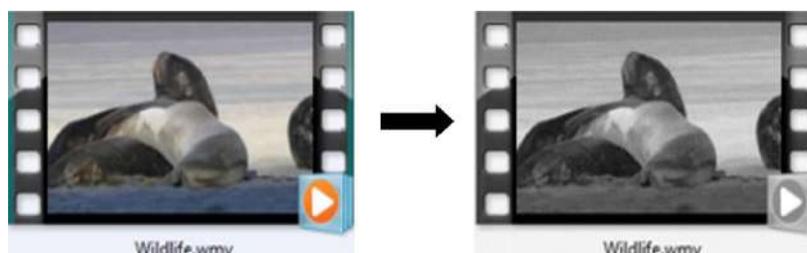


Figura 7.22: Video predeterminado en Windows 7 de 2008 Microsoft Corp en escala de grises.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Para evaluar la eficiencia de los momentos se utiliza la métrica de reconstrucción basada en el error cuadrático medio de reconstrucción (RMES), el cual se define como el error cuadrático normalizado entre la imagen de entrada  $f(x, y)$  y la imagen reconstruida  $\tilde{f}(x, y)$ , expresado como:

$$RMES = \frac{\sum_{y=1}^N \sum_{x=1}^M [f_c(x, y) - \tilde{f}_c(x, y)]^2}{\sum_{y=1}^N \sum_{x=1}^M f_c^2(x, y)} \quad (7.3)$$

### 7.3.1. Resultados obtenidos utilizando imagen en escala de grises

Se realizó la encriptación de las tres imágenes de prueba mostradas en la Fig. 7.21b mediante los momentos de Tchebichef, Krawtchouk, y Charlier con un valor de  $v = 50$ , de las cuales se obtuvo un video para cada imagen utilizada para llevar a cabo la comparación entre ellos mediante el RMES. Además, se muestran en las Fig. 7.23, 7.24 y 7.25, los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 1			
Cuadro original en escala de grises	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Cuadro 1	 Error: 0.00842158	 Error: 0.001842	 Error: 0.0194846
 Cuadro 50	 Error: 0.0085891	 Error: 0.0015322	 Error: 0.01941656
 Cuadro 100	 Error: 0.0086281	 Error: 0.001591	 Error: 0.01941153
 Cuadro 150	 Error: 0.009169	 Error: 0.0020706	 Error: 0.0204859
 Cuadro 200	 Error: 0.0091904	 Error: 0.0020543	 Error: 0.02030570
 Cuadro 225	 Error: 0.0084990	 Error: 0.0015388	 Error: 0.01909520

Figura 7.23: Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la Imagen 1 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 2			
Cuadro original en escala de grises	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Cuadro 1	 Error:0.00842706	 Error: 0.00140358	 Error: 0.01948787
 Cuadro 50	 Error:0.00859207	 Error: 0.00153223	 Error: 0.01941783
 Cuadro 100	 Error:0.00862708	 Error: 0.00159156	 Error: 0.0194128
 Cuadro 150	 Error: 0.0091756	 Error: 0.00207068	 Error: 0.02048215
 Cuadro 200	 Error: 0.0091938	 Error: 0.00205440	 Error: 0.02030162
 Cuadro 225	 Error: 0.0085010	 Error: 0.00153889	 Error: 0.01909491

Figura 7.24: Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la imagen 2 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 3			
Cuadro original en escala de grises	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Cuadro 1	 Error: 0.00842299	 Error: 0.0014035	 Error: 0.01948373
 Cuadro 50	 Error: 0.00859155	 Error: 0.0015322	 Error: 0.01941815
 Cuadro 100	 Error: 0.00862458	 Error: 0.00159156	 Error: 0.01941308
 Cuadro 150	 Error: 0.0091586	 Error: 0.00207069	 Error: 0.02048011
 Cuadro 200	 Error: 0.00920009	 Error: 0.00205440	 Error: 0.02029798
 Cuadro 225	 Error: 0.00850038	 Error: 0.00153889	 Error: 0.01909633

Figura 7.25: Comparación de algunos cuadros del video original y los tres videos con la Imagen 3 encriptada con cada una de las familias de momentos mencionadas.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

También, se muestran en las Figs. 7.26, 7.27 y 7.28 las gráficas del RMES de la encriptación de las tres imágenes en cada cuadro del video.

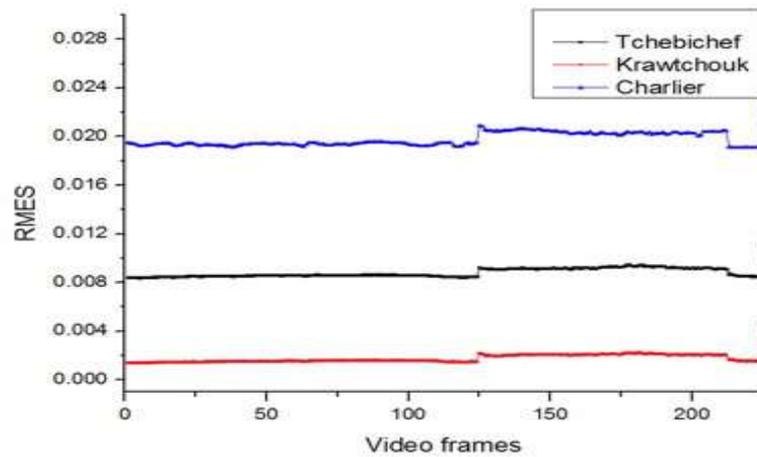


Figura 7.26: Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 1" por cuadro del video.

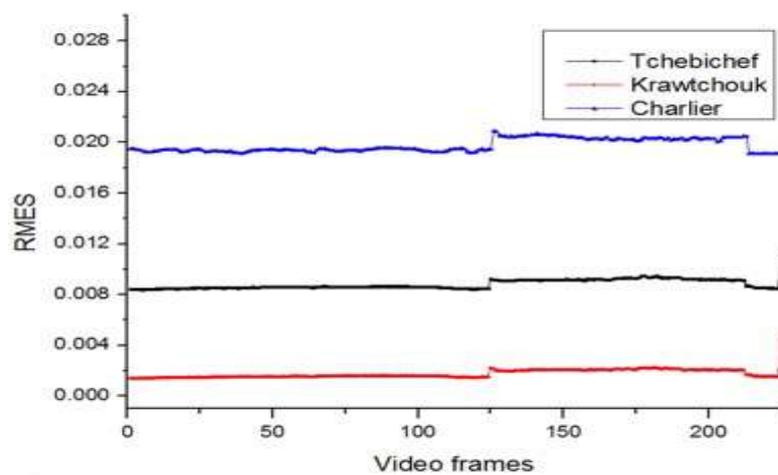


Figura 7.27: Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 2" por cuadro del video.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

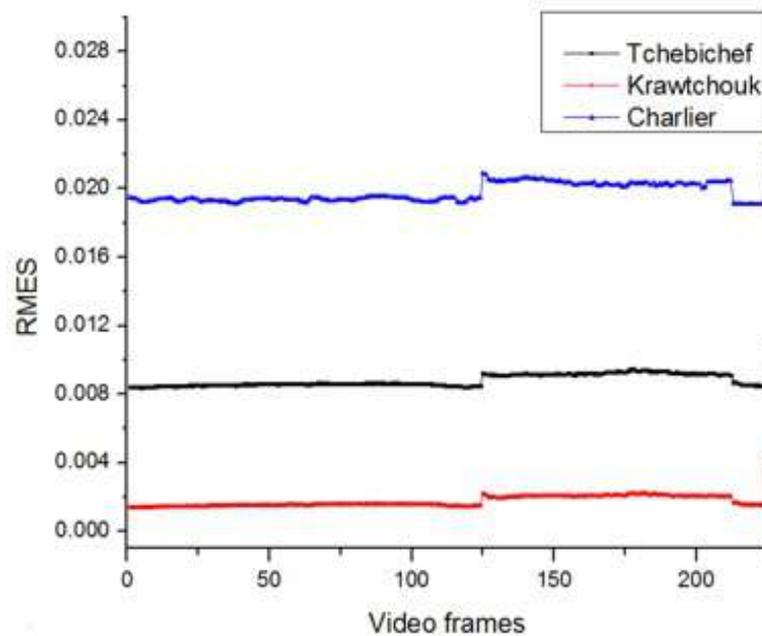


Figura 7.28: Gráfica de obtenida del RMES de la encriptación de la "Imagen 3" por cuadro del video.

De igual forma, se realizó la recuperación de las tres imágenes de prueba a partir de los tres videos obtenidos como resultado del algoritmo propuesto y se calculó el error de recuperación de cada una mediante el RMES. Los resultados se muestran a continuación en la Fig. 7.29.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen original	Imagen recuperada con momentos de Tchebichef	Imagen recuperada con momentos de Krawtchouk	Imagen recuperada con momentos de Charlier
 Imagen 1	 RMES: 0.00080549	 RMES: 0	 RMES: 0.33816496
 Imagen 2	 RMES: 0.00080113	 RMES: 0	 RMES: 0.30919267
 Imagen 3	 RMES: 0.00070025	 RMES: 0	 RMES: 0.33069800

Figura 7.29: Comparación de las imágenes originales y las imágenes recuperadas con con cada una de las familias de momentos mencionadas.

### 7.3.2. Resultados obtenidos utilizando imagen de color

Se realizó la encriptación de las tres imágenes de prueba mostradas en la Fig. 7.21a con los momentos de Tchebichef, Krawtchouk, y Charlier con un valor de  $v = 50$ , de las cuales se muestran en las Figs. 7.30, 7.31 y 7.32 los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 1			
Cuadro original	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Frame 50	 Error: 0.010421582954157	 Error: 0.004842277213002	 Error: 0.019484637490130
 Frame 150	 Error: 0.009589163418294	 Error: 0.004532237233000	 Error: 0.02041656333445
 Frame 250	 Error: 0.009628113474130	 Error: 0.00259156502608	 Error: 0.021411536123924
 Frame 350	 Error: 0.010169532422789	 Error: 0.004070684641604	 Error: 0.01848594842581
 Frame 450	 Error: 0.012190412353122	 Error: 0.004054396309360	 Error: 0.02130570587382
 Frame 550	 Error: 0.010499093782543	 Error: 0.003538894832647	 Error: 0.019095206115332

Figura 7.30: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 1 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 2			
Cuadro original	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Frame 50	 Error: 0.0114215845	 Error: 0.0038422301	 Error: 0.01948437490
 Frame 150	 Error: 0.0105891634180	 Error: 0.005532234	 Error: 0.01941656341
 Frame 250	 Error: 0.00962803474130	 Error: 0.003591565024	 Error: 0.0214115361239
 Frame 350	 Error: 0.011169532889	 Error: 0.0020146846416	 Error: 0.017485948425
 Frame 450	 Error: 0.011190412382	 Error: 0.0040543963094	 Error: 0.022305705873
 Frame 550	 Error: 0.094990937827	 Error: 0.003638832647	 Error: 0.020095206115332

Figura 7.31: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 2 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Imagen 3			
Cuadro original	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Tchebichef y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Krawtchouk y error obtenido	Cuadro con imagen 1 encriptada con momentos de Charlier y error obtenido
 Frame 50	 Error: 0.01014215845	 Error: 0.0038422301	 Error: 0.01848147490
 Frame 150	 Error: 0.07589163444	 Error: 0.005532234	 Error: 0.02045634122
 Frame 250	 Error: 0.008628034725	 Error: 0.003591565024	 Error: 0.0214116139
 Frame 350	 Error: 0.0131695328	 Error: 0.0020146846416	 Error: 0.0184859484
 Frame 450	 Error: 0.011190415	 Error: 0.0040543963094	 Error: 0.0203057
 Frame 550	 Error: 0.019499093757	 Error: 0.0026332627	 Error: 0.0209206112

Figura 7.32: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen 3 en video utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

También, se muestran en la Figs. 7.33, 7.34 y 7.35 las gráficas del RMES de la encriptación de las tres imágenes en cada cuadro del video.

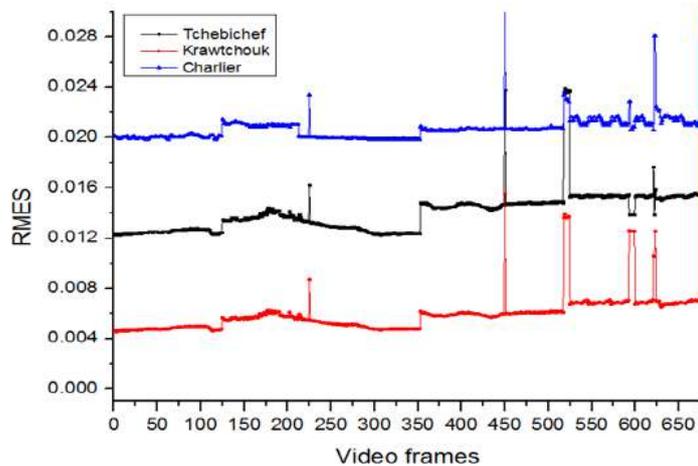


Figura 7.33: Error RMES de la encriptación de la Imagen 1 por cada cuadro del video.

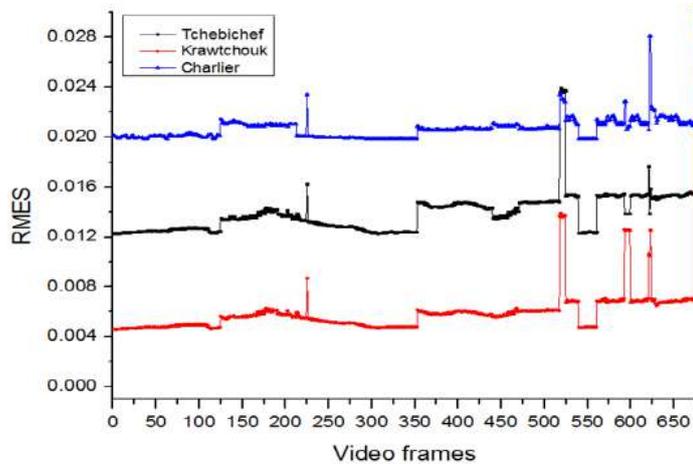


Figura 7.34: Error RMES de la encriptación de la Imagen 2 por cada cuadro del video.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

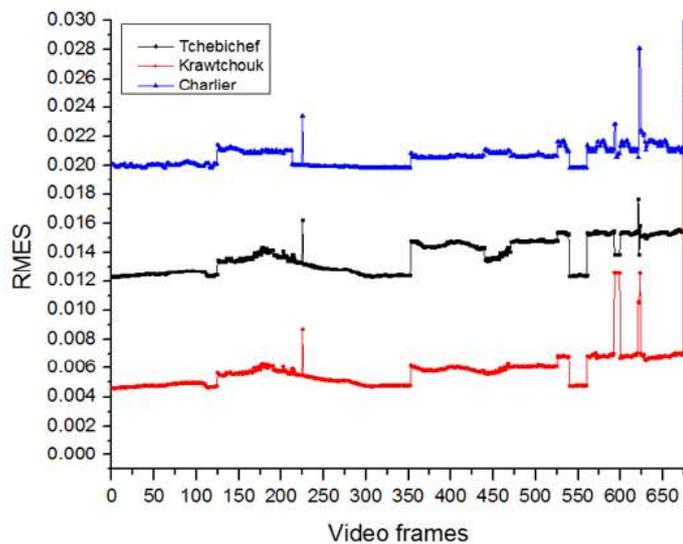


Figura 7.35: Error RMES de la encriptación de la Imagen 3 por cada cuadro del video.

Por otra parte, en la Fig. 7.36 se muestran los resultados obtenidos de la recuperación de las tres imágenes de prueba a partir de los tres videos obtenidos como resultado del algoritmo propuesto y su cálculo de error de recuperación de cada una mediante el RMES.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

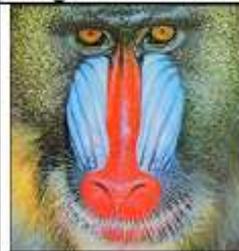
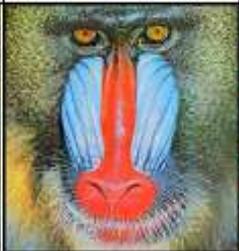
Imagen original	Imagen recuperada con momentos de Tchebichef y RMES	Imagen recuperada con momentos de Krawtchouk y RMES	Imagen recuperada con momentos de Charlier y RMES
			
Imagen 1	RMES: 0.000805	RMES: 0	RMES: 0.3381649
			
Imagen 2	RMES: 0.0008011	RMES: 0	RMES: 0.3091926
			
Imagen 3	RMES: 0.0007002	RMES: 0	RMES: 0.3306980

Figura 7.36: Comparación de las imágenes recuperadas y las imágenes originales y mediante los momentos de Tchebichef, Krawtchouk y Charlier.

### 7.3.3. Aplicación de consola

Para lograr una mejor comprensión del algoritmo propuesto, se realizó una aplicación para la marca de agua y su recuperación en video. La aplicación en su pantalla de inicio cuenta con un menú con las opciones que permite realizar la inserción o la recuperación de una marca de agua como se muestra en la Fig 7.37.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos



Figura 7.37: Pantalla de inicio de la aplicación desarrollada.

Cuando se elige la opción de insertar de marca de agua, se muestra un submenú como se muestra en la Fig. 7.38, el cual nos permite seleccionar una imagen para marca de agua y el video que queremos aplicarle la marca de agua.



Figura 7.38: Selección de imagen y video para el proceso de inserción de la marca de agua.

Una vez seleccionado el video y la marca de agua se elige la opción de "Iniciar" para comenzar con el marcado de agua después se elige la familia de momentos con la que se desea encriptar, como se muestra en la fig. 7.39.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos



Figura 7.39: Inicio de inserción de marca de agua.

En esta parte se puede observar el proceso que realiza el algoritmo de insertar parte de la marca de agua por cada cuadro de video hasta insertar los canales RGB de la imagen completamente, en la Fig. 7.40(a) se muestra como la aplicación toma un cuadro del video ubicado en la parte superior izquierda e inserta parte de la marca de agua la cual se muestra en la parte inferior izquierda, posteriormente en la parte superior derecha se muestra el mismo cuadro de video utilizado pero con parte de la marca insertada.

Esto permite realizar una comparación rápida del video original con el que contiene la marca de agua. De manera similar en las Figs.7.40(b) y 7.40(c) se muestra el mismo procedimiento para los canales restantes. Así mismo, cuando se termina el proceso la aplicación muestra una leyenda en la cual informa la terminación como se muestra en la Fig. 7.40(d).

Por otra parte, cuando se selecciona la opción de “Recuperar marca de agua”, nos permite seleccionar un video que contenga una marca de agua para obtener su recuperación como se muestra en la Fig. 7.41

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

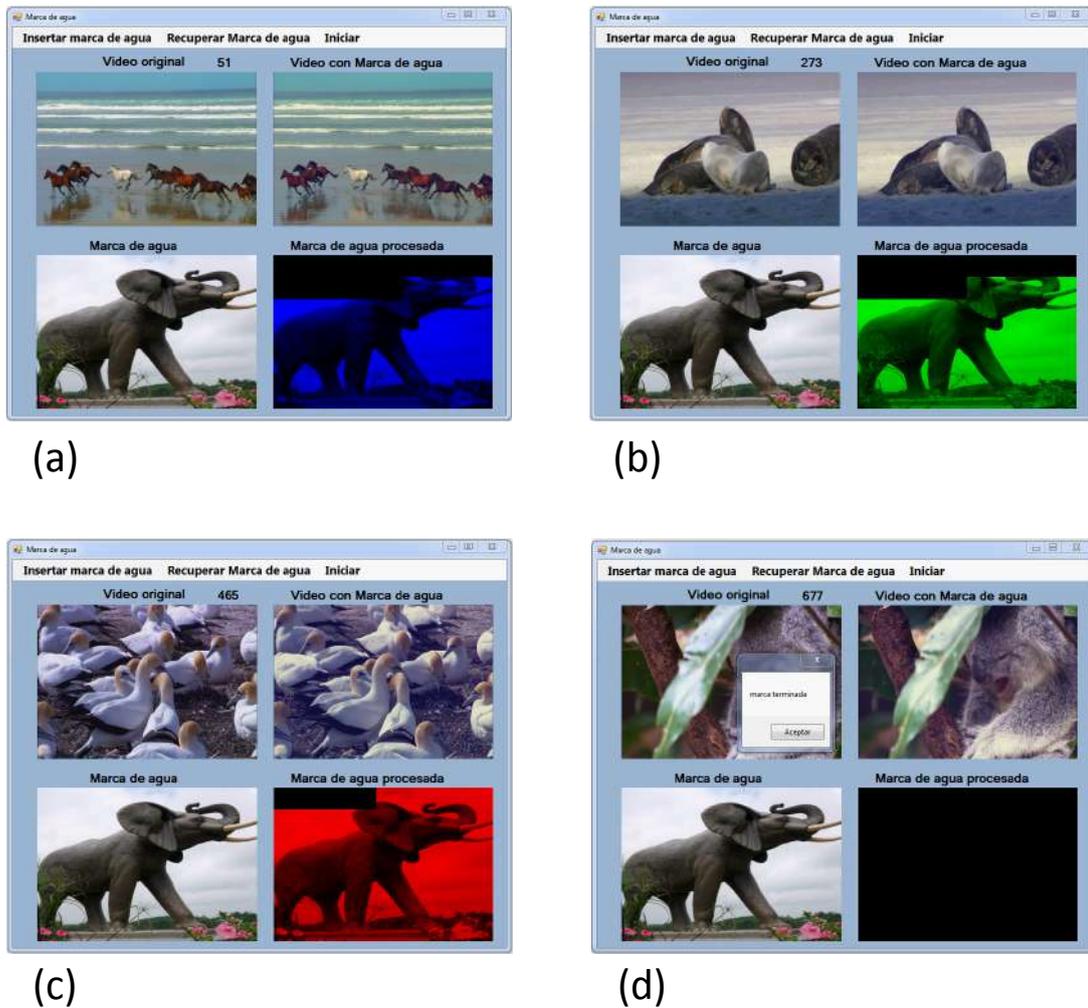


Figura 7.40: Proceso de marcado de agua en video de una imagen RGB a) Encriptación del canal azul de la imagen, b) Encriptación del canal verde de la imagen, c) Encriptación del canal rojo de la imagen, d) Terminación de la encriptación de la imagen.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

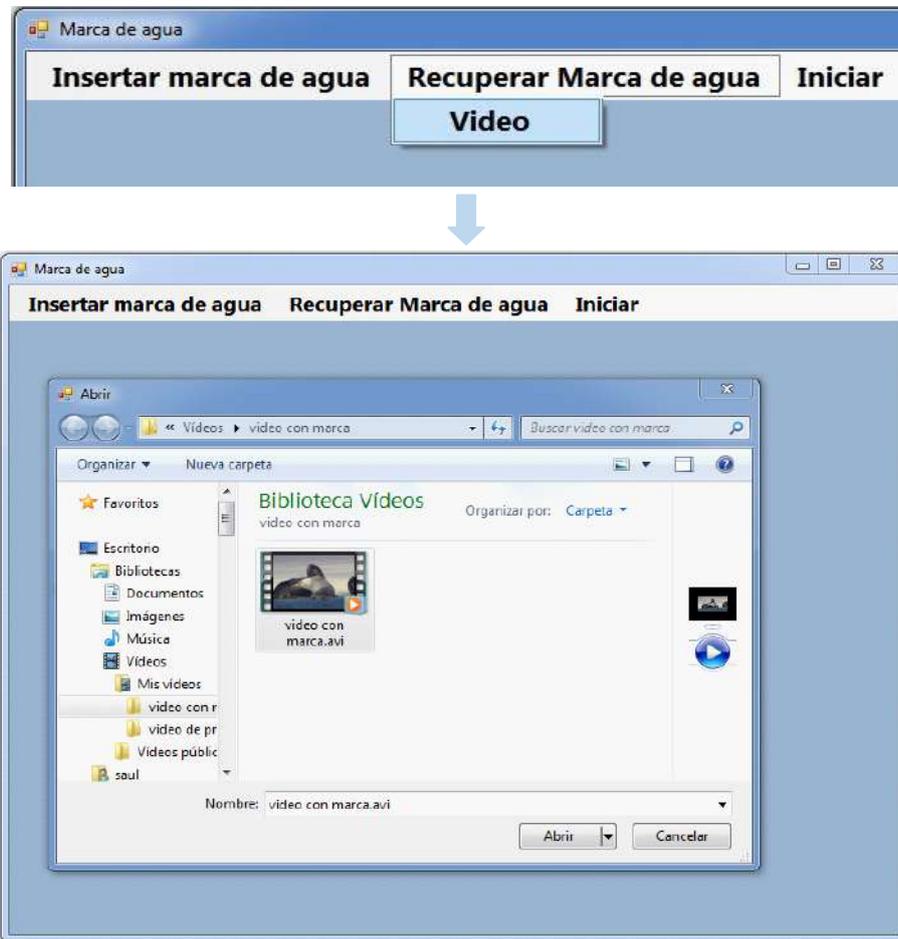


Figura 7.41: Selección de video con marca de agua.

Durante el proceso de recuperación, se puede observar como la aplicación recupera parte de la imagen encriptada por cada cuadro de video mostrado, en la Fig. 7.42(a) se muestra como la recuperación inicia eligiendo la familia de momentos. Posteriormente, 7.42(b) se observa la aplicación en el momento de la recuperación donde en la parte superior derecha se muestra el video que contiene parte de la marca y en la parte inferior derecha la recuperación del primer canal de la imagen RGB utilizada como marca. De igual forma en las Figs. 7.42(c) y 7.42(d) se muestra la recuperar los canales restantes de la imagen insertada en el video.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

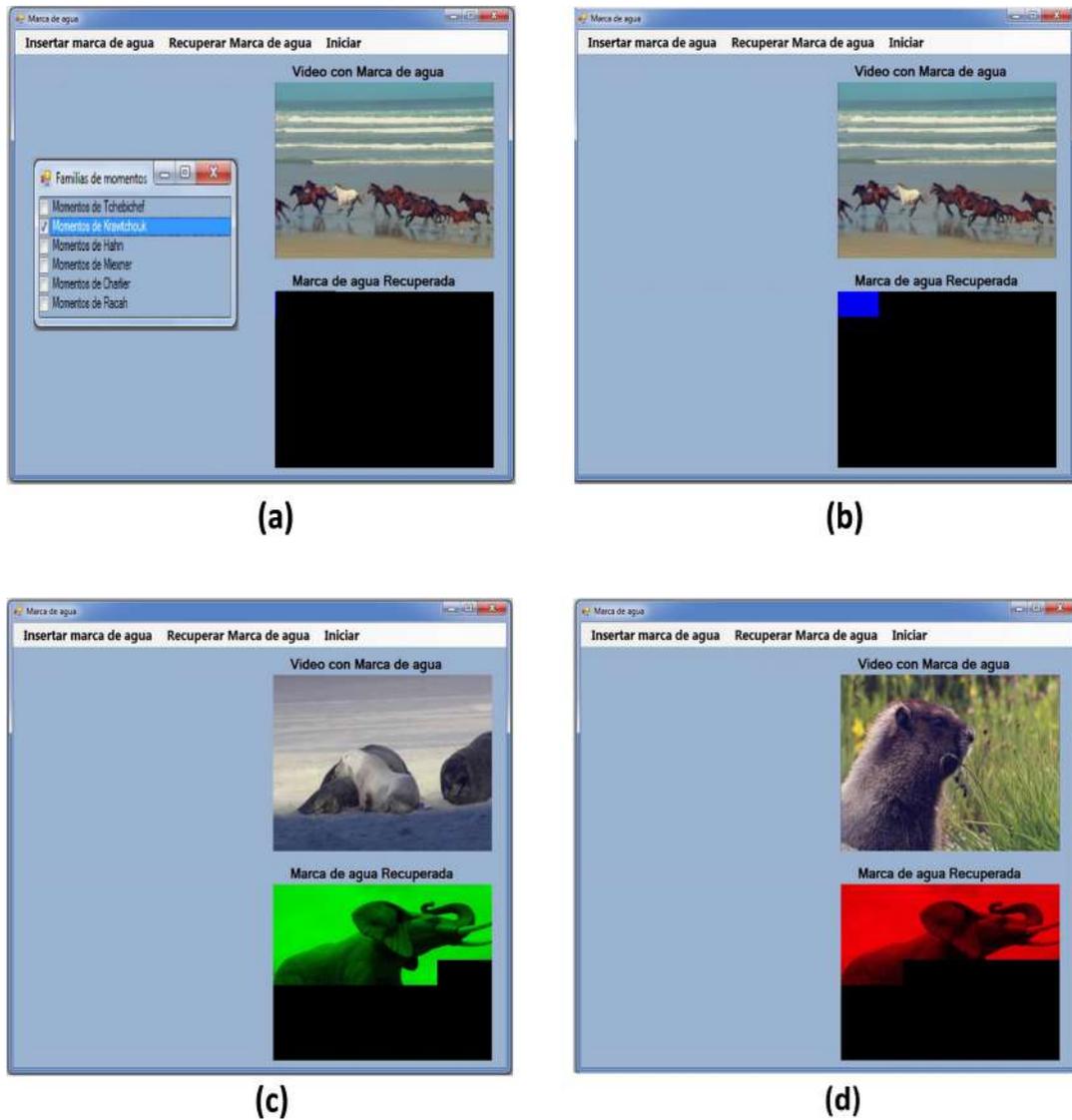


Figura 7.42: Proceso de recuperación de una marca de agua, a) Inicio del proceso de recuperación mediante la selección de una familia de momentos, b) Recuperación de canal azul de la imagen, c) Recuperación de canal verde de la imagen, d) Recuperación de canal Rojo de la imagen.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

Finalmente la aplicación en su lado inferior derecho muestra como resultado la imagen recuperada mediante el algoritmo propuesto como se muestra en la Fig. 7.43.

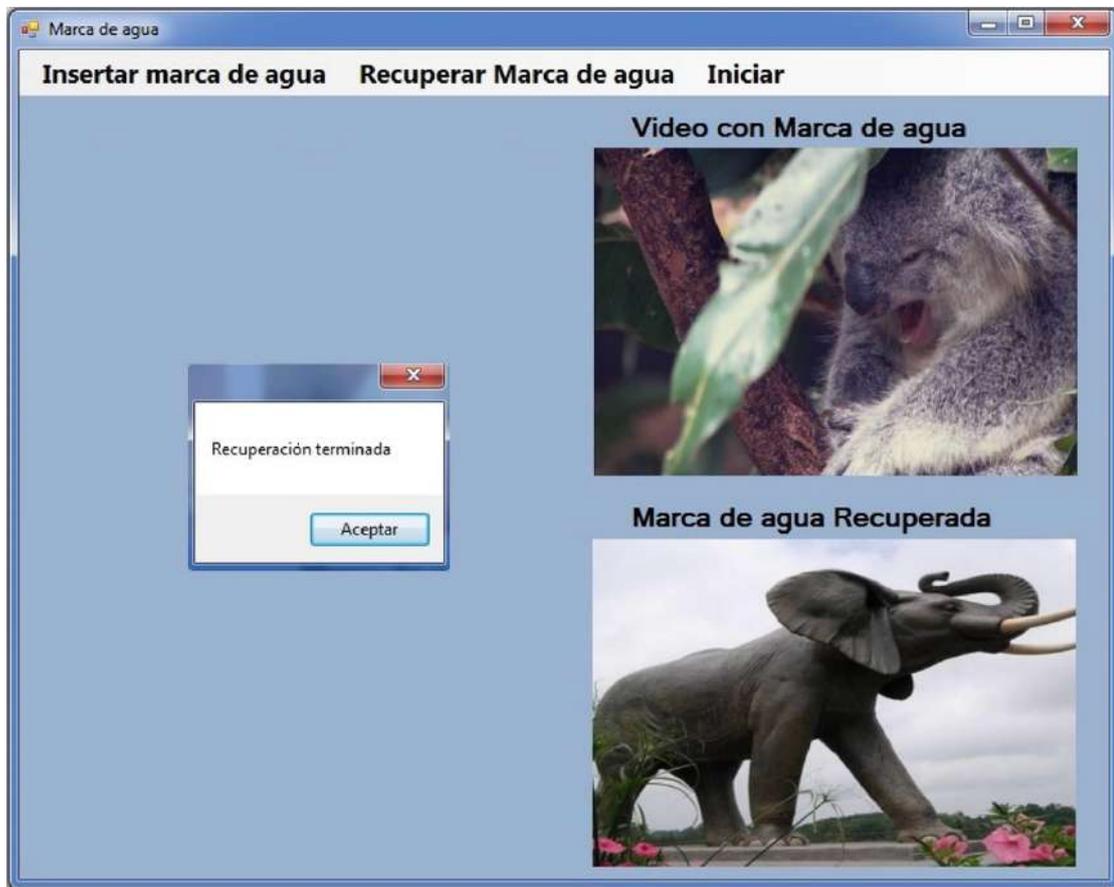


Figura 7.43: Marca de agua recuperada.

### 7.4. Marca de agua en imágenes de gran tamaño

Gracias a la propuesta mencionada en el Sección 6 de este trabajo de tesis, donde se utiliza el proceso de ortonormalización durante el cálculo de momentos ortogonales discretos clásicos, es posible realizar el cálculo de momentos para imágenes de gran tamaño y así obtener su reconstrucción de manera eficiente. Tomando en cuenta lo anterior, se propone un algoritmo para realizar la marca de agua en imágenes de color de gran tamaño.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

### 7.4.1. Algoritmo propuesto para la marca de agua de imágenes de color de gran tamaño

A continuación se presenta un algoritmo para realizar la inserción y recuperación de una imagen como marca de agua en imágenes con grandes dimensiones utilizando diferentes familias de momentos ortogonales.

El proceso de **encriptación de una imagen** se propone de la siguiente manera:

**Paso 1:** Se comienza con la separación de una imagen de gran tamaño en sus tres canales RGB como se muestra en la Fig. 7.44,

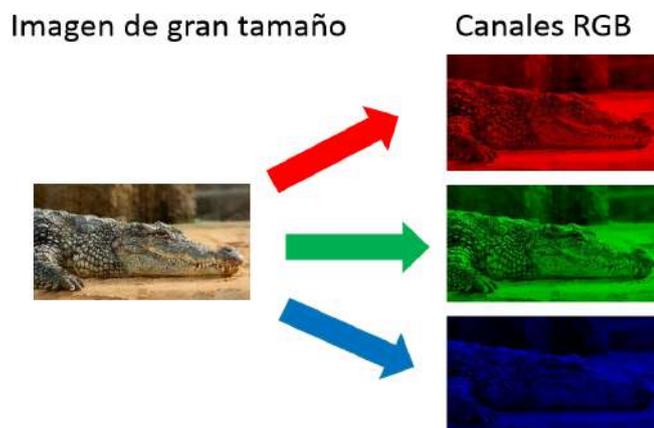


Figura 7.44: Obtención de los canales RGB de una imagen.

de igual forma realiza la misma separación para la imagen a encriptar como se observa en la Fig. 7.45.

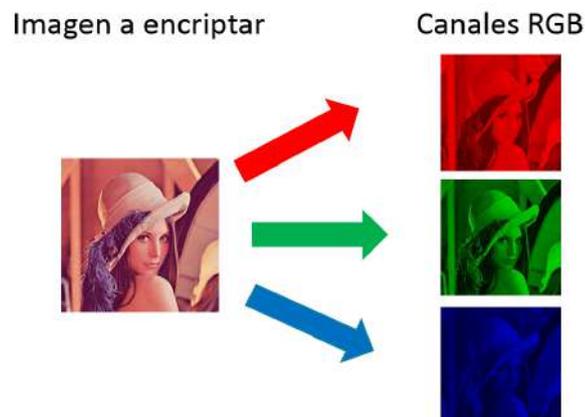


Figura 7.45: Separación de la imagen de marca de agua en los canales RGB.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 2:** Se realiza el cálculo de momentos para el primer canal de la imagen utilizada para aplicar la marca de agua como se muestra en la Fig. 7.46.



Figura 7.46: Cálculo de momentos de un canal de la imagen de gran tamaño.

de forma similar se realiza el cálculo de momentos para el mismo canal de la imagen a encriptar como se muestra en la Fig. 7.47.

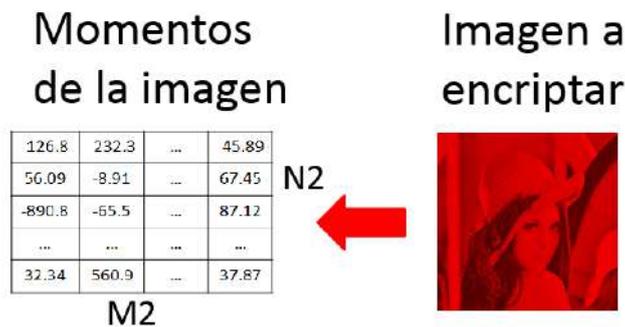


Figura 7.47: Cálculo de momentos de un canal de la imagen a encriptar.

**Paso 3:** Se sustituyen los momentos obtenidos de la imagen de marca de agua en los momentos que fueron obtenidos de la imagen de gran tamaño en la posición en donde se encuentran los altos órdenes obtenidos de la imagen, los cuales son aquellos que contienen información de menor relevancia al momento de la reconstrucción de la imagen a través de sus momentos. En la Fig. 7.48 se muestra la inserción de uno de los canales RGB de la marca de agua a través de los momentos, donde la parte sombreada es el área destinada para distribuir e insertar los momentos obtenidos de la marca de agua

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

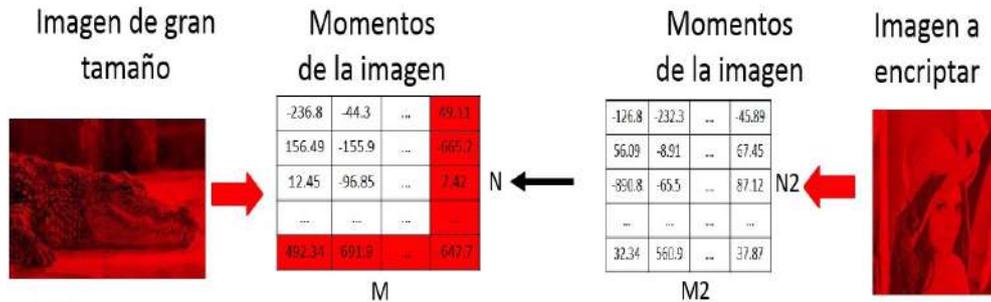


Figura 7.48: Proceso de inserción de marca de agua en imágenes de gran tamaño.

**Paso 3:** Repitiendo los paso 2 y 3, se realiza la inserción de los canales RGB restantes de la imagen de marca de agua, como se muestra en la Fig. 7.49.

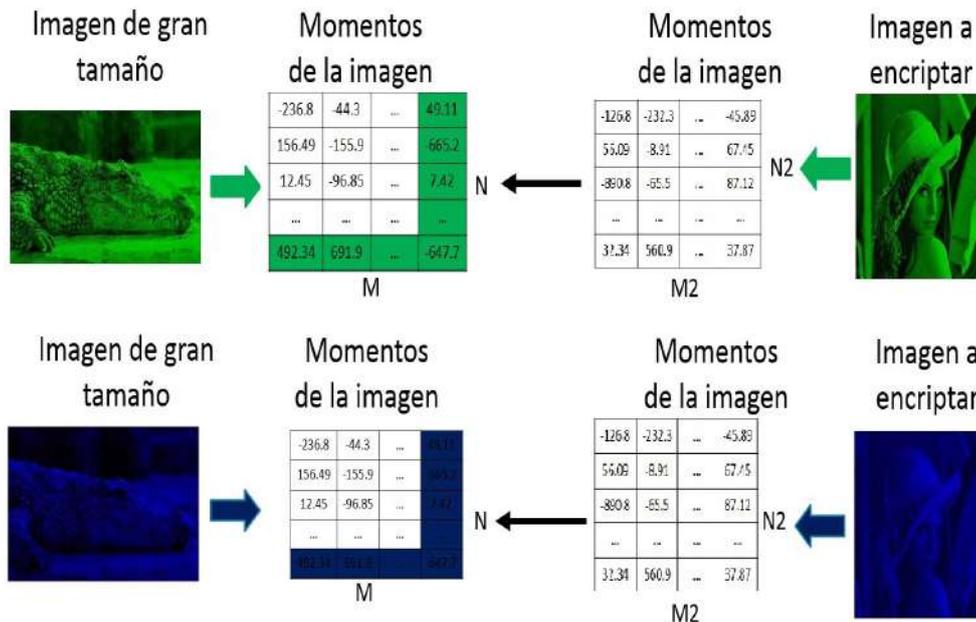


Figura 7.49: Proceso de inserción de marca de agua en imágenes de gran tamaño de color utilizando los canales de color G y B.

**Paso 4:** Una vez que se insertaron los momentos de la imagen de marca de agua en los respectivos canales de la imagen de gran tamaño, se realiza la reconstrucción de los canales con la marca y finalmente el algoritmo obtiene la imagen de color con la marca de agua como se muestra en la Fig. 7.50.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

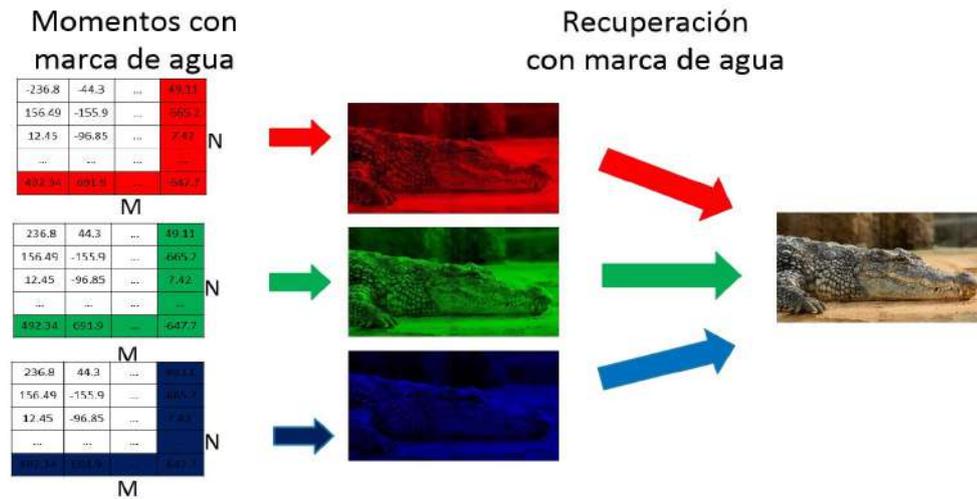


Figura 7.50: Recuperación de la imagen de gran tamaño con marca de agua.

El proceso de **recuperación de la marca de agua** se obtiene realizando el proceso inverso de la siguiente manera:

**Paso 1:** Se inicia con la separación de los canales RGB de la separación de la imagen de gran tamaño obtenida con marca de agua como se muestra en la Fig. 7.51.

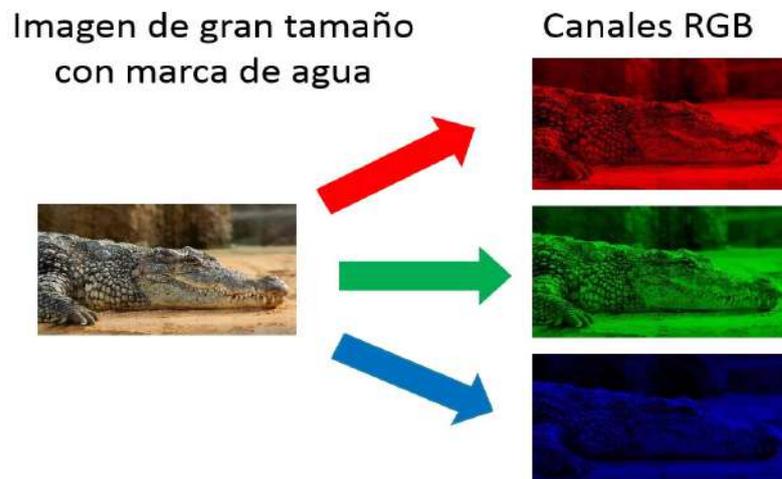


Figura 7.51: Separación RGB de una imagen con marca de agua.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 2:** Se realiza el cálculo de momentos de los canales RGB de la imagen Fig. 7.52.

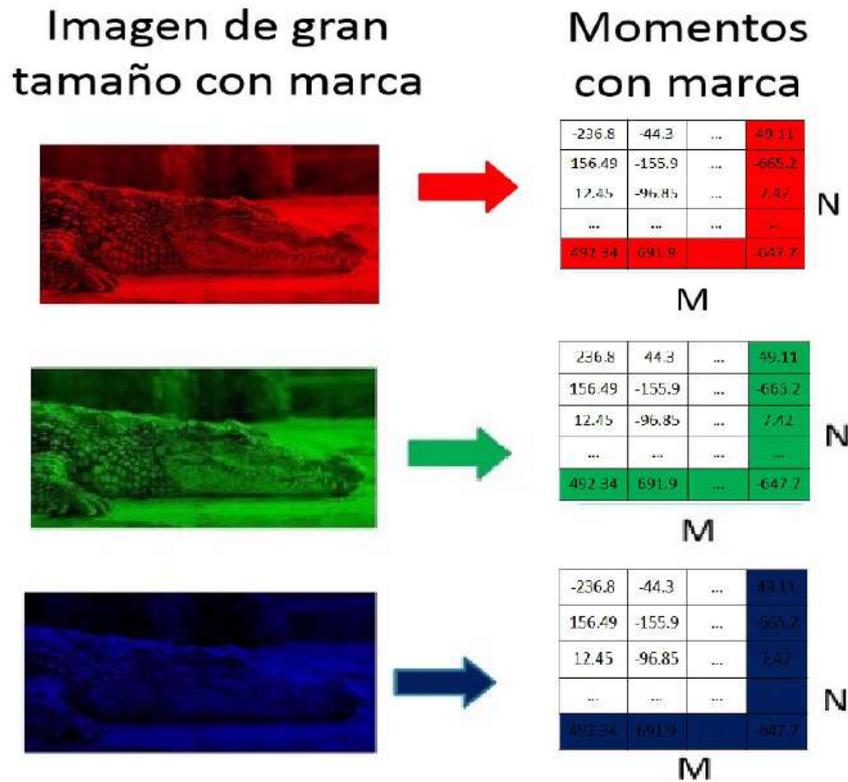


Figura 7.52: Cálculo de momentos de los canales RGB de una imagen de gran tamaño con marca de agua.

**Paso 3:** Se recuperan los momentos de los canales RGB de la imagen de marca de agua, los cuales están ubicados en la misma posición que fueron insertados. En las Figs. 7.54 y 7.55 y 7.53 se muestra la posición de los momentos de la marca de agua en la parte sombreada de la matriz de momentos de los canales RGB de la imagen de gran tamaño que fue marcada, de igual forma se muestra su recuperación.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos



Figura 7.53: Recuperación del canal R(rojo) de la marca de agua.

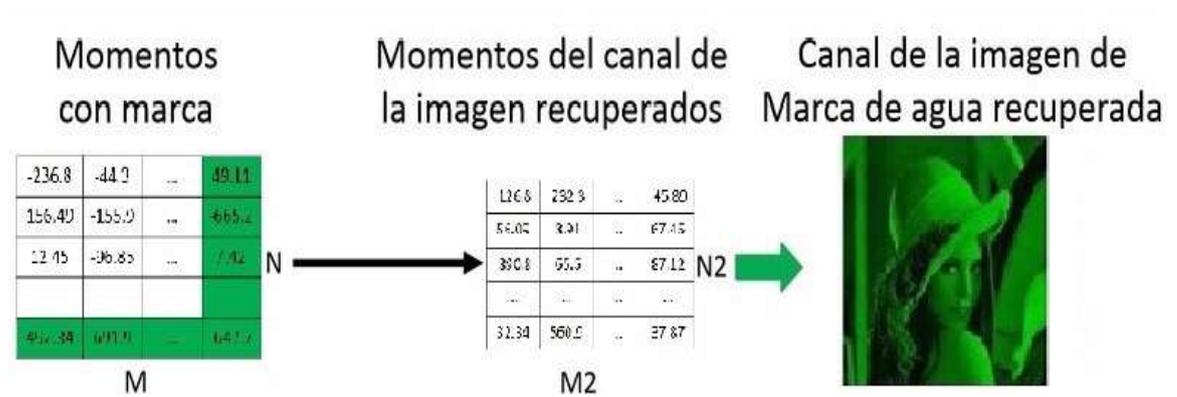


Figura 7.54: Recuperación del canal G(verde) de la marca de agua.

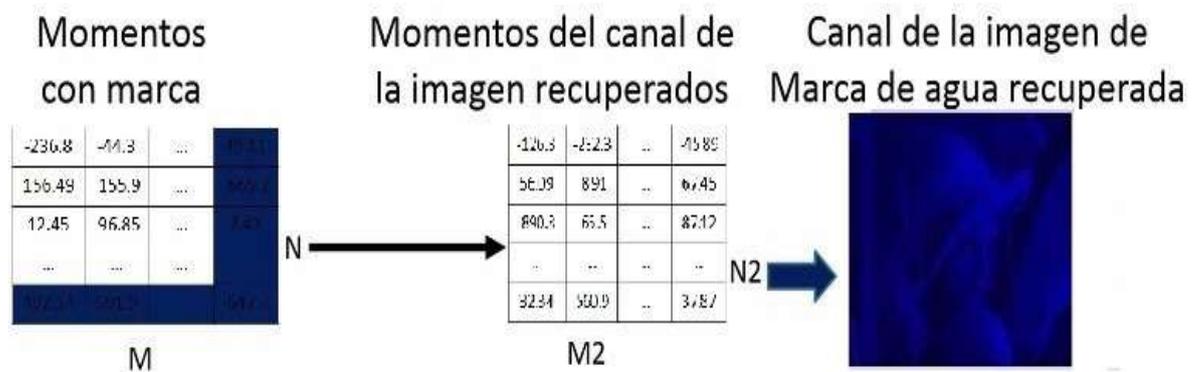


Figura 7.55: Recuperación del canal B(azul) de la marca de agua.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

**Paso 4:** Finalmente se obtiene la imagen de marca de agua recuperada, uniendo los canales que fueron recuperados, como se ve en la Fig. 7.56.

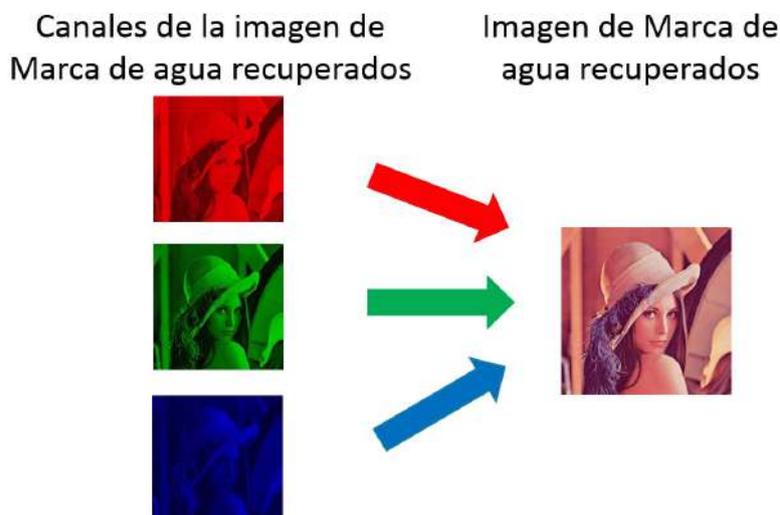


Figura 7.56: Imagen de marca de agua recuperada.

### 7.5. Resultados obtenidos de la marca de agua en imágenes de gran tamaño

Para comprobar el desempeño del algoritmo propuesto para la marca de agua en imágenes de gran tamaño, se realizó el marcado de agua en tres imágenes de color con dimensiones de  $3840 \times 2160$  píxeles presentadas en la Fig. 7.57 y utilizando como marca de agua la imagen de lena con dimensiones de  $512 \times 512$  píxeles, como pruebas para mostrar los resultados obtenidos a través del algoritmo propuesto para la encriptación y imágenes de gran tamaño, al igual que su recuperación.



Figura 7.57: Imágenes de prueba, para la marca de agua.

Se utilizó el algoritmo propuesto para llevar a cabo la marca de agua de las tres imágenes de la Fig. 7.57, los resultados obtenidos de la imagen con marca de agua a

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

través los momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah se pueden observar el las Figs. 7.58, 7.59, 7.60, la recuperación de la imagen de marca de agua y su comparación mediante el cálculo del error RMES.

	Imagen con marca	Marca recuperada
Tchebichef	 RMES:0.010795701	 RMES:0.00944162
Krawtchouk	 RMES:0.50186161	 RMES: 0.01799510
Hahn	 RMES:0.012330215	 RMES: 0.015258317
Racah	 RMES:0.0091651354	 RMES: 0.01387242

Figura 7.58: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de  $512 \times 512$  píxeles, en una imagen de  $3840 \times 2160$  píxeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

	Imagen con marca	Marca recuperada
Tchebichef	 RMES: 0.01415345	 RMES:0.00887821
Krawtchouk	 RMES: 0.49140045	 RMES:0.012854532
Hahn	 RMES: 0.01288454	 RMES:0.017098804
Racah	 RMES: 0.01015741	 RMES:0.011047247

Figura 7.59: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de  $512 \times 512$  píxeles, en una imagen de  $3840 \times 2160$  píxeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah.

## 7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos

	Imagen con marca	Marca recuperada
Tchebichef	 RMES: 0.0156456463	 RMES: 0.009213133
Krawtchouk	 RMES: 0.4189111111	 RMES: 0.015001447
Hahn	 RMES: 0.012777890	 RMES: 0.01499001
Racah	 RMES: 0.010102445	 RMES: 0.01055835

Figura 7.60: Comparación de los resultados de la encriptación de la Imagen de prueba con dimensiones de 512x512 pixeles, en una imagen de 3840x2160 pixeles utilizando momentos de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah.

## **7. Implementación de marca de agua con momentos ortogonales discretos**

Como se puede observar en los resultados obtenidos de la marca de agua en imágenes de gran tamaño con algunas familias de momentos, tales como los momentos de Tchebichef, Hahn y Racah se obtienen mejores resultados durante la inserción y recuperación de la marca de agua.

# Bibliografía

- [1] Potdar, V. M., Han, S., & Chang, E. (2005, August). A survey of digital image watermarking techniques. In *Industrial Informatics, 2005. INDIN'05. 2005 3rd IEEE International Conference on* (pp. 709-716). IEEE.
- [2] Porikli, F. (2007, September). Detection of temporarily static regions by processing video at different frame rates. In *Advanced Video and Signal Based Surveillance, 2007. AVSS 2007. IEEE Conference on* (pp. 236-241). IEEE.
- [3] De Haan, G. (2000). *Video processing for multimedia systems*. Eindhoven University Press.

## Capítulo 8

# Conclusiones y trabajos a futuro

En este trabajo de tesis se presenta una perspectiva general de algunas problemáticas en el cómputo de los momentos ortogonales discretos clásicos y sus posibles soluciones. Además, la mejora en el cómputo de los momentos tiene ventajas como brindar un mejor desempeño en las aplicaciones. Las aportaciones más significativas están mencionadas a continuación:

### **Relación de recurrencia y ortogonalización de Gram-Schmidt**

Los polinomios ortogonales calculados con la relación de recurrencia propuesta por Zhu et al [1], mencionada en el Capítulo 3 generan inestabilidad numérica para altos órdenes. Por tal motivo, en el Capítulo 5 se propuso una relación de recurrencia con respecto a  $n$  para los polinomios ortogonales discretos clásicos, los cuales ayudan a eliminar el problema de aproximación numérica. Posteriormente, para eliminar la inestabilidad numérica durante el cálculo de momentos con altos ordenes, se propuso utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, el cual permite que durante el cálculo de las distintas familias de polinomios conserven la propiedad de la ortogonalidad. La relación de recurrencia propuesta mejora notablemente la reconstrucción de imágenes sin importar su tamaño y utilizando momentos de alto orden.

### **Análisis comparativo de las diferentes familias de polinomios**

En este trabajo de tesis se realizó el cálculo de seis familias de polinomios ortogonales discretos clásicos, tales como: polinomios de Tchebichef, polinomios de Krawtchouk, polinomios de Hahn, polinomios de Meixner, polinomios de Charlier y polinomios de Racah, de los cuales se logró tener un análisis comparativo del desempeño obtenido de cada familia utilizando las diferentes relaciones de recurrencia

## 8. Conclusiones y trabajos a futuro

---

mencionadas y tomando como métrica su capacidad de reconstrucción.

### Algoritmo propuesto para la marca de agua

En este trabajo de tesis se realizó la propuesta de un algoritmo para el marcado de agua en video y su recuperación con momentos ortogonales discretos, de igual forma se presentó la propuesta de un algoritmo para realizar el marcado de agua en imágenes de gran tamaño y su recuperación con momentos ortogonales discretos, de los cuales se obtuvieron buenos resultados con algunas familias de momentos como Tchebichef, Krawtchouk, Hahn y Racah.

### Aplicación de consola

Se realizó el desarrollo de una aplicación para la marca de agua en video y su recuperación, la cual fue desarrollada haciendo uso de librerías especializadas de Emgu CV utilizadas para el procesamiento de imágenes y video, mediante el lenguaje de programación C# en el entorno de desarrollo de Visual Studio 2015.

### Mejor desempeño de las familias de momentos para la marca de agua

Debido a que cada familia de momentos presentan diferentes características y distribución; su capacidad descriptiva es diferente para cada conjunto. Por ello, se realizó la búsqueda de las mejores familias de momentos, también se tomó en cuenta el análisis de reconstrucción de imágenes y los resultados obtenidos de los algoritmos implementados para la inserción y recuperación de la marca de agua, en los que se pudo observar que algunas de las familias de momentos, como los momentos de Krawtchouk obtuvieron mejores desempeños ya que lograron recuperar completamente la marca de agua utilizada. Por otra parte, se obtuvieron mejores resultados con los momentos de Tchebichef, Hahn y Racah para la realizar la marca de agua y su recuperación en imágenes de gran tamaño utilizando el algoritmo propuesto.

Existe una gama amplia de aplicaciones que pueden ser mejoradas con el enfoque propuesto. Como **trabajo a futuro** se propone explorar los siguientes temas:

- Análisis comparativo de los métodos existentes con el método propuesto.
- Proponer un nuevo método para la encriptación de texto en imágenes.
- Reducir el tiempo de cómputo del algoritmo propuesto.

# Bibliografía

- [1] Zhu, H., Liu, M., Shu, H., Zhang, H., & Luo, L. (2010). General form for obtaining discrete orthogonal moments. *IET image processing*, 4(5), 335-352.