

U

P

T

**Múltiples placas de fase bajo la
base de polinomios de Jacobi-
Fourier para extender la
profundidad de campo de un
sistema óptico digital**

por

Enrique González Amador

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

MAESTRO EN COMPUTACIÓN ÓPTICA

en la

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE
TULANCINGO**

Octubre 2017

Tulancingo de Bravo, Hidalgo.

Supervisada por:

Dr. Alfonso Padilla Vivanco

Dra. Carina Toxqui Quitl

©UPT

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y
distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.



Agradecimientos

Agradezco Dios, por brindarme la vida y la oportunidad de realizar este proyecto.

Al Dr. Alfonso Padilla Vivanco y a la Dra. Carina Toxqui Quitl, por su tiempo dispuesto y sus conocimientos para dirigir este trabajo de tesis, por su paciencia y apoyo en todo momento para mejorar mi desempeño académico, personal y profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico recibido mediante la beca número 423645.

A la Universidad Politécnica de Tulancingo, por todo lo brindado para la realización de este trabajo.

A mis sinodales Dr. Cesar Joel Camacho Bello y Dr. José Gabriel Ortega Mendoza por sus comentarios y observaciones que me han hecho mejorar personal y profesionalmente, así como hacer de éste un mejor trabajo.

A mis padres, Antonia y Pablo, quienes me dieron el mejor regalo, la vida, por su amor, esfuerzo y apoyo en todo momento de mi vida, gracias por enseñarme a nunca darme por vencido, estoy orgulloso de ser su hijo. Gracias

A mis hermanos, Toño, Edmundo, Angélica, Clara y Armando gracias por todo su apoyo, cariño y comprensión en todo momento, por enseñarme que siempre se pueden lograr las cosas si se quiere.

A mi novia y amiga Soledad Isabel, gracias por tu amor, apoyo y comprensión. Gracias por la confianza depositada en mí, eres una personita muy especial en mi vida. Gracias también a la familia Cruz Garrido, quienes han sido muy importantes también para mí.

A mis compañeros y profesores de la UPT.

Dedicatoria

A mi familia y amigos que me ha dado la vida, y a mi novia Soledad Isabel y su familia.

Resumen

En este trabajo se proponen veinte nuevos perfiles de placas de fase (PF) a partir de la base de Polinomios de Jacobi-Fourier (PJF) como elemento codificador dentro de un sistema híbrido conocido como Codificación de Frente de Onda (WFC). Se llevó a cabo un análisis numérico para verificar el desempeño de las placas propuestas. Se realizó la optimización de cada uno de los parámetros de desviación de fase o fuerza de las PF propuestas mediante algoritmos genéticos (AG) a través del error cuadrático medio (MSE) entre la función de transferencia modulada (MTF) limitada por difracción y las MTF desenfocadas en un intervalo de desenfoque.

Las pruebas numéricas se implementaron con objetos afectados por desenfoque. Mediante la teoría de imágenes, es posible obtener una imagen intermedia, que recibe el nombre de imagen codificada, la cual es de baja calidad, y requiere de un algoritmo de deconvolución para poder obtener una imagen decodificada de calidad. Se optó por utilizar un filtro de ecualización de espectro para realizar dicho proceso.

Dentro del algoritmo para realizar la simulación del sistema WFC con $PF - PJF$ como elemento codificador se toma en cuenta los parámetros electrónicos de un detector, tales como, número de píxeles, tamaño de píxel y ruido. Mediante la simulación, los resultados numéricos muestran que las $PF - PJF$ propuestas tienen un mejor desempeño que las MFs cúbica y trefoil.

Summary

In this work, we have proposed twenty new phase plate (*PP*) based on the Jacobi-Fourier Polynomials (*JFP*) as a coding element in a hybrid system digital-optical known as Wavefront coding (*WFC*). A numerical performance of the phase mask analysis was performed. The optimization of each parameters of phase deviation or Strength of the *PP* proposed were performed using Genetic Algorithms (*AG*), by evaluating the mean square error (*MSE*) between the focused and defocused *MTFs*.

The numerical tests were performed with objects affected by defocus, using the theory of imaging systems, it is possible obtained an intermediate image, which is of low quality, and requires a deconvolution algorithm to obtain a quality decoded image, we opted to use a spectrum equalization filter to perform such a process.

The algorithm to perform the simulation of the *WFC* system with *PP* - *JFP* as encoder element, the electronic parameters of a detector are taken into account, such as number of pixels, pixel size and noise. The numerical results show that the *PP-JFP* proposed deliver better performance than the cubic *PP* and trefoil *PP*.

Prefacio

Un tema que se ha encontrado activo durante los últimos años es el poder ampliar la profundidad de campo de un sistema óptico usando una apertura fija. Con el paso de los años, se han ido procesando varias formas de cumplir este cometido. La forma tradicional de poder ampliar dicha profundidad, es disminuyendo el diámetro de la apertura. Esto disminuye la resolución del sistema óptico debido a la baja cantidad de luz que ingresa al sistema. De las primeras técnicas usadas para el mismo fin, se refieren a métodos que emplean un apodizador de absorción de potencia.

Nuevas técnicas se han ido implementando con el paso del tiempo, algunas de ellas puramente ópticas. Con el avance en el campo de la computación, se han propuesto también técnicas puramente digitales. Otras personas como Edward Dowski y Thomas Cathey en el año de 1995 propusieron el uso de una placa de fase para la codificación del frente de onda (*WFC*). El sistema WFC propuesto consiste en un elemento codificador de fase, cuyo perfil es cúbico, el cual tiene la propiedad de generar funciones de punto extendido que son invariantes en cierto rango de desenfoque.

Con el paso del tiempo, muchas personas alrededor del mundo han contribuido en la ampliación y mejora de dicha técnica, pues presenta ventajas tales como un menor costo, peso y tamaño del sistema óptico en comparación a otras técnicas. Algunos autores han propuesto diseños de placas de fase con diferentes perfiles, entre ellas, de perfil sinusoidal, exponencial, logarítmicas, por mencionar algunas. Muchas de ellas siendo grandes alternativas con buen desempeño.

Existe una gran cantidad de artículos de investigación que hablan del tema, asociaciones tales como la International Society for Optics and Photonics (*SPIE*) y la Optical Society of America (*OSA*) a través de sus diferentes plataformas, revistas páginas web entre otras, usando palabras clave como “Wavefront-coding”, “Extended Depth of field” permiten acceder a múltiples investigaciones relacionadas al campo.

En este trabajo de tesis se pretende introducir un nuevo perfil de placa de fase, que permita ampliar la profundidad de campo de un sistema óptico a través del uso de sistemas de codificación de frente de onda.

Índice

Resumen	III
Summary	IV
Prefacio	V
Capítulo 1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos del Trabajo de Tesis.....	2
1.3 Trabajos Relacionados.....	3
1.4 Estructura	3
1.5 Productos derivados de la tesis	4
Capítulo 2 TEORÍA DE FORMACIÓN DE IMÁGENES	5
2.1 Teoría de formación de imágenes con iluminación del tipo coherente.....	5
2.2 Teoría de formación de imágenes con iluminación del tipo incoherente	9
2.3 Sistema con iluminación coherente en el dominio frecuencial	10
2.4 Sistema con iluminación incoherente en el dominio frecuencial.....	11
Capítulo 3 MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI- FOURIER.	13
3.1 Revisión teórica de polinomios de Jacobi-Fourier	16
3.2 Máscaras de fase generadas mediante polinomios ortogonales de Jacobi-Fourier	
21	

Capítulo 4 OPTIMIZACIÓN DE LAS MÁSCARAS DE FASE Y ALGORITMO DE SIMULACIÓN	40
4.1 Optimización del parámetro de desviación de fase de las máscaras de fase propuestas	41
4.2 Algoritmo de simulación del sistema óptico-digital para la propuesta de máscaras de fase	51
Capítulo 5 RESULTADOS NUMÉRICOS Y COMPARACIÓN EXPERIMENTAL	54
5.1 Resultados simulados de máscaras de fase con imagen de prueba sin ruido adicional.	55
5.2 Resultados simulados de máscaras de fase con imagen de prueba con ruido Gaussiano	64
5.3 Comparación de Resultados Numéricos y Experimentales	71
Capítulo 6 CONCLUSIONES:	76
Bibliografía	78

Índice de Figuras:

FIGURA 2.1: SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES	6
FIGURA 2.2: SISTEMA FORMADOR DE IMAGEN	8
FIGURA 3.1: PROFUNDIDAD DE CAMPO DE UN SISTEMA ÓPTICO	13
FIGURA 3.2: INVARIANCIA DE LA PSF DE UN SISTEMA ÓPTICO-DIGITAL	15
FIGURA 3.3: SISTEMA DE CODIFICACIÓN DEL FRENTE DE ONDA.	15
FIGURA 3.4: PSF VARIABLES DE UN SISTEMA ÓPTICO TRADICIONAL DESENFOCADO	16
FIGURA 3.5: CURVAS RADIALES DE FAMILIAS DE POLINOMIOS JACOBI $J_0(r, p, q)$ Y $J_1(r, p, q)$ $p = q =$ 6, ..., 15	20
FIGURA 3.6: MAPAS DE CONTORNO DE LOS POLINOMIOS DE JACOBI-FOURIER. A) JACOBI-FOURIER $n = 0,$ $m = 1, p, q = 9,$ B) JACOBI-FOURIER $n = 0, m = 3, p, q = 9,$ C) JACOBI-FOURIER $n = 0, m = 5,$ $p, q = 9,$ D) JACOBI-FOURIER $n = 0, m = 1, p, q = 11,$ E) JACOBI-FOURIER $n = 0, m = 3, p, q =$ 15, F) JACOBI-FOURIER $n = 0, m = 1, p, q = 20.$ SE APRECIA EL CAMBIO EN TAMAÑO DEL CENTRO Y DE LOS LÓBULOS EN LAS ORILLAS.	22
FIGURA 3.7: SISTEMA DE CODIFICACIÓN DE FRENTE DE ONDA PARA FUENTE PUNTUAL	25
FIGURA 3.8: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 0$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 3.$ CON $p = q = 6, \dots, 8$	29
FIGURA 3.9: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 0$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 3.$ CON $p = q = 9, \dots, 11$	30

FIGURA 3.10: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 1$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 3$. CON $p = q = 11, \dots, 13$	31
FIGURA 3.11: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 1$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 3$. CON $p = q = 14, 15$	32
FIGURA 3.12: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 0$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 1$. CON $p = q = 8, \dots, 10$	33
FIGURA 3.13: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI PROPUESTAS CON ORDEN RADIAL $n = 0$ Y ORDEN ARMÓNICO $m = 1$. CON $p = q = 10, 11$	34
FIGURA 3.14: MAPAS DE CONTORNO Y SUPERFICIES 3D DE LAS MÁSCARAS DE FASE PROPUESTAS USANDO COMBINACIONES DE POLINOMIOS DE JACOBI – FOURIER. SE INCORPORAN LA MÁSCARA DE FASE CÚBICA, TREFOIL.....	35
FIGURA 3.15: MAPAS DE CONTORNOS, SUPERFICIES 3D DE LA MÁSCARA DE FASE CÚBICA Y TREFOIL.....	36
FIGURA 3.16: PSFs ENFOCADAS DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI $n =$ $0, m = 3$, Y $p = q = 6, \dots, 11$ Y MÁSCARAS CON JACOBI $n = 1, m = 3$, Y $p = q = 11, \dots, 13$	37
FIGURA 3.17: PSFs ENFOCADAS DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI $n =$ $1, m = 3$, Y $p = q = 14, 15$ Y MÁSCARAS CON JACOBI $n = 0, m = 1$, Y $p = q = 8, \dots, 11$	38
FIGURA 3.18: PSFs ENFOCADAS DE LAS MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN SUPERPOSICIÓN DE POLINOMIOS DE JACOBI $n = 0, m = 0, 3$, Y $p = q = 8, 11$ Y MÁSCARAS DE FASE DE LA LITERATURA	39
FIGURA 4.1: COMPARACIÓN DE <i>MTF</i> LIMITADA POR DIFRACCIÓN Y <i>MTF</i> DE <i>MF</i>	45

FIGURA 4.2: <i>MTFs</i> CORRESPONDIENTES A LOS DIFERENTES PARÁMETROS DE DESENFQUE. (A)	
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 6,6,13\lambda)$, (B) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 7,7,11\lambda)$, (C) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8,9\lambda)$, (D) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 9,9,11\lambda)$, (E)	
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 10,10,23\lambda)$, (F) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 11,11,29\lambda)$	47
FIGURA 4.3: <i>MTFs</i> CORRESPONDIENTES A LOS DIFERENTES PARÁMETROS DE DESENFQUE. (A)	
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 11,11,10\lambda)$, (B) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 12,12,18\lambda)$, (C) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 13,13,28\lambda)$, (D)	
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 14,14,28\lambda)$, (E) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 15,15,29\lambda)$	48
FIGURA 4.4: <i>MTFs</i> CORRESPONDIENTES A LOS DIFERENTES PARÁMETROS DE DESENFQUE. (A)	
$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8,25\lambda)$, (B) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 9,9,28\lambda)$, (C) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 10,10,31\lambda)$, (D) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11,31\lambda)$,	
(E) $M_{01}^c(r, \theta, 10,10,31\lambda)$, (F) $M_{01}^c(r, \theta, 11,11,31\lambda)$	49
FIGURA 4.5: <i>MTFs</i> CORRESPONDIENTES A LOS DIFERENTES PARÁMETROS DE DESENFQUE. (A)	
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda)$, (B) $M_{03}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda) + M_{01}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda)$, (C)	
$M_{03}^c(r, \theta, 11,11,31\lambda) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11,31\lambda)$, (D) TREFOL, (E) CÚBICA	50
FIGURA 4.6: CODIFICACIÓN DE LA IMAGEN	51
FIGURA 4.7: GRABACIÓN DE LA IMAGEN	52
FIGURA 4.8: RECONSTRUCCIÓN DE IMAGEN	53

Índice de Tablas:

TABLA 3.1: FUNCIONES DE MÁSCARAS DE FASE PROPUESTAS PARÁMETROS $p = q = 6, \dots, 15$, CON ÓRDENES RADIALES $n = 0, 1$ Y ORDENES ARMÓNICOS $m = 0, 3$	19
TABLA 3.2: MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI- FOURIER. ADICIONALMENTE SE INCLUYEN LAS MÁSCARAS DE FASE OBTENIDAS DE LA LITERATURA.	24
TABLA 4.1: PARÁMETROS DE DESVIACIÓN DE FASE ÓPTIMOS PARA JACOBI MF PROPUESTAS. SE INCLUYEN LAS MF OBTENIDAS DE LA LITERATURA.	43
TABLA 5.1: RESULTADOS NUMÉRICOS OBTENIDOS A PARTIR DE LA SIMULACIÓN DEL ALGORITMO DESCRITO, USANDO LAS MF PROPUESTAS. LA SIMULACIÓN NO SE INTRODUCE RUIDO ADICIONAL.....	58
TABLA 5.2: RESULTADOS NUMÉRICOS OBTENIDOS A PARTIR DE LA SIMULACIÓN DEL ALGORITMO DESCRITO, USANDO LAS MF PROPUESTAS. LA SIMULACIÓN INTRODUCE RUIDO ADICIONAL DEL TIPO GAUSSIANO.	65
TABLA 5.3: COMPARACIÓN DE RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES USANDO LAS MF BASADAS EN PJF.	72

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

El ampliar la profundidad de campo de un sistema óptico usando un tamaño fijo de abertura ha sido un tema de investigación activo en los últimos años. Una de las primeras formas de ampliar la profundidad de campo, es empleando un apodizador óptico de absorción de potencia, con variaciones de fase de $\pm\pi$ [1-5].

La manera tradicional de poder ampliar la profundidad de campo de un sistema óptico formador de imagen es disminuyendo la abertura del diafragma, esto involucra también, la reducción de las aberraciones. Sin embargo, esto presenta el inconveniente de reducir la capacidad de resolución del sistema debido a que la difracción de la luz es más severa y la cantidad de energía que ingresa es limitada.

Sin embargo, en los últimos años se han propuesto nuevos métodos para solucionar este problema, algunos pueden ser de naturaleza óptica totalmente, otros puramente digitales o híbridos, los cuales combinan elementos ópticos con procesamiento digital.

La óptica adaptativa permite la corrección en tiempo real de distorsiones, es una técnica puramente óptica. Consiste de un espejo deformable, el cual introduce se deforma a manera de compensar las aberraciones ópticas del frente de onda para así tener un frente de onda libre de aberraciones [6, 7].

Una de las técnicas puramente digitales es la deconvolución ciega, considerando un modelo de sistema de formación de imagen y ciertas restricciones, es posible realizar una

Introducción

estimación de la función de punto extendido (*PSF*) y una imagen sin degradación del objeto gracias a un algoritmo computacional, por ejemplo, el algoritmo Fienup [8].

Los sistemas de Codificación de Frente de Onda son sistemas híbridos óptico–digitales que hacen uso de un elemento de fase esférico llamado placa de fase (*PF*) o máscara de fase (*MF*), colocado en la apertura de salida y procesamiento digital de imágenes para extender la profundidad de campo (*EDoF*) en sistemas formadores de imágenes [3]. Tomando en cuenta, que el cambio de fase es proporcional al camino óptico, la codificación se logra ajustando el grosor de la máscara de fase a la distribución de fase requerida. En los últimos años, el uso de las pantallas de cristal líquido (*LCD*) como modulares espaciales de luz en *WFC* ha sido propuesto [9, 10]. Dichas pantallas permiten una implementación más flexible de las *MF*, pues los parámetros de dichas máscaras pueden ser modificados dinámicamente.

1.2 Objetivos del Trabajo de Tesis

Objetivo

- Proponer una nueva familia de máscaras de fase que permitan ampliar la profundidad de campo de un sistema óptico-digital, basadas en polinomios de Jacobi-Fourier.

Objetivos Particulares

- Revisión teórica de los polinomios de Jacobi-Fourier y de los sistemas de codificación de frente de onda *WFC*.
- Implementar los polinomios de Jacobi-Fourier, y un sistema *WFC* en Matlab®.
- Proponer un método de optimización del parámetro de desviación de fase de las máscaras de fase propuestas.

Introducción

- Programar el algoritmo de simulación en Matlab® para un sistema óptico determinado para verificar el funcionamiento de las máscaras de fase.
- Comparación de resultados numéricos y experimentales.

1.3 Trabajos Relacionados

La *EDoF* de un sistema formador de imagen usando un tamaño fijo de abertura ha sido un tema de investigación activo en los últimos años. Mediante el empleo de sistemas *WFC* se han realizado múltiples propuestas de *PM*, que han sido diseñadas con el fin de generar funciones de punto extendido (*PSFs*) invariantes para un cierto intervalo de desenfoque [3], lo que se traduciría en *EDoF*.

Algunos autores han propuesto *PM* basadas en diferentes funciones, se pueden encontrar: cúbica [3], sinusoidal [11, 12], exponencial [13], tangencial [14], logarítmica [15,16], racional [17], raíz cuadrada [18], entre otras.

También se han propuesto placas de fase basadas en polinomios circulares de Zernike tales como *trefoil* $Z_{10} = \sqrt{8}r^3 \cos 3\theta$ [19, 20]. Asimismo, se han llevado a cabo combinaciones de polinomios de Zernike rotados a diferentes ángulos como propuestas de máscaras de fase [21]. O. Palillero et al. [22], también propone la superposición de cuatro polinomios de Zernike como función de máscara de fase y Prasad et al. [20] realizan combinaciones de hasta 6 polinomios de ésta misma familia.

Algunas aplicaciones de *WFC* se han estudiado para: corrección de aberraciones ópticas [23], microscopia [24], obtención de imágenes de alta resolución en retina humana [25], entre otras posibles aplicaciones.

1.4 Estructura

El trabajo de Tesis está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presentan fundamentos de teoría de formación de imágenes para sistemas ópticos con

Introducción

iluminación coherente e incoherente partiendo de la teoría escalar de difracción, incluyendo ecuaciones para la formación de imagen dadas de la aplicación de la teoría de sistemas lineales. En el Capítulo 3 se lleva a cabo una breve revisión teórica de los *JFP* y se presentan las *MF* generadas haciendo uso de dichos polinomios. El algoritmo de optimización del parámetro de desviación de fase de las *MF* propuestas y la comparación del desempeño de las *MTFs* de cada una de las *MF*, así como el algoritmo de simulación del sistema óptico-digital con dichas máscaras de fase se presentan en el Capítulo 4. El Capítulo 5 muestra los resultados obtenidos numéricamente mediante la simulación del algoritmo y parámetros del sistema, además se muestran los resultados obtenidos experimentalmente y se comparan con resultados simulados. Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

1.5 Productos derivados de la tesis

1. González-Amador, E., Padilla-Vivanco, A., Toxqui-Quitl, C., & Zermeño-Loreto, O. (2017, August). Optimization of wavefront coding imaging system using heuristic algorithms. In Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XVIII (Vol. 10375, p. 103750Y). International Society for Optics and Photonics.
2. González-Amador, E., Padilla-Vivanco, A., & Toxqui-Quitl, C. (2016, noviembre). Simulación de un sistema de codificación de frente de onda con aberración de desenfoque y astigmatismo. 9no. Congreso de investigación internacional UPT.

Capítulo 2

TEORÍA DE FORMACIÓN DE IMÁGENES

En el presente capítulo se introducen los conceptos de modelado del proceso de formación de imágenes. Un sistema óptico formador de imágenes puede ser caracterizado por algunos parámetros tales como, el tipo y tamaño de la pupila, así como el tipo de iluminación del sistema. La teoría de sistemas lineales permite su estudio de manera más simple, mediante una función característica que lo define, la llamada función de punto extendido (*PSF*), que se obtiene como la imagen que resulta de colocar un objeto puntual luminoso. También, se muestra el análisis del tratamiento para sistemas formadores de imágenes con dos tipos de iluminación: iluminación coherente e iluminación incoherente.

2.1 Teoría de formación de imágenes con iluminación del tipo coherente

El tipo de iluminación coherente se debe a la contribución de cada punto que conforma el frente de onda, en donde además cada uno de dichos puntos presenta la misma fase [26]. La onda de luz coherente incidente manifiesta una respuesta en el plano de observación al pasar a través de una abertura finita. En la Fig. 2.1 se muestra un sistema de coordenadas rectangulares que ilustra la formación de imagen de un punto dentro de un sistema óptico.

Teoría de Formación de Imágenes

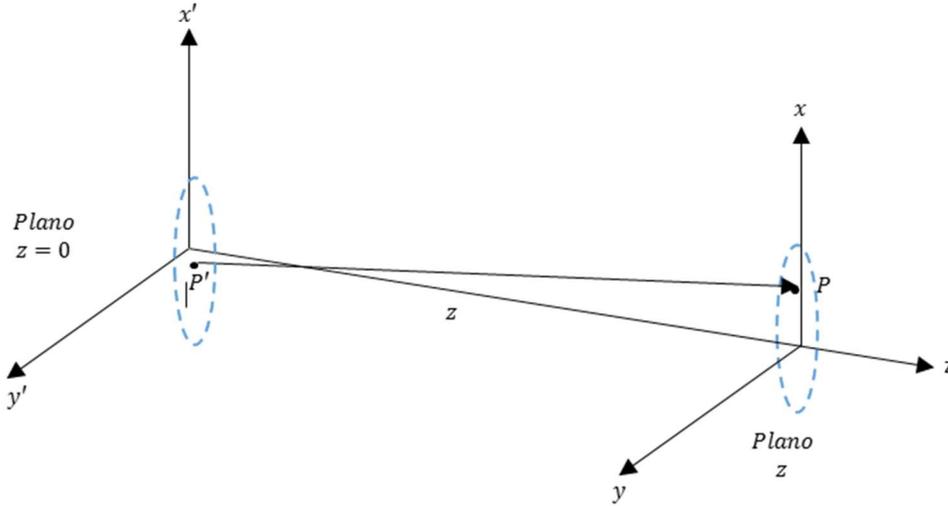


Figura 2.1: Sistema de Coordenadas Rectangulares

El campo en el plano de observación a una distancia z , la cual se puede expresar con la ecuación que se presenta, [27]

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint U(x', y') \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} dx' dy', \quad (2.1)$$

con $r_{01} = [z + (x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ correspondiente al número de onda, y λ la longitud de onda de la luz. Usando una expansión binomial es posible simplificar el valor de r_{01} ,

$$r_{01} \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\{x-x'\}}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\{y-y'\}}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.2)$$

Haciendo uso de dicha aproximación y sustituyendo, es posible realizar la aproximación conocida como paraxial, [27]

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \iint U(x', y') \exp \left[j \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{z} (xx' + yy') \right] dx' dy', \quad (2.3)$$

Teoría de Formación de Imágenes

también conocida como *Difracción de Fresnel* o *difracción de campo cercano*.

A partir de la difracción de Fresnel considerando que z es más grande que el factor de fase cuadrático $z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)}{2}$, la exponencial se puede aproximar a la unidad. De esta manera, la perturbación en el plano de observación puede expresarse como:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \iint U(x', y') \exp\left[-j\frac{k}{z}(xx' + yy')\right] dx' dy', \quad (2.4)$$

conocida como *difracción de Fraunhofer* o *difracción de campo lejano*. Esta ecuación también puede adoptar la siguiente forma:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \iint U(u, v) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dudv, \quad (2.5)$$

donde u y v son conocidas como frecuencias espaciales dadas por $u = \frac{x'}{\lambda z}$ y $v = \frac{y'}{\lambda z}$.

De acuerdo al análisis anterior, es posible considerar que la difracción de Fresnel se puede calcular llevando a cabo la *Transformada de Fourier (TF)* del producto de la amplitud compleja en la abertura y el factor de fase cuadrático; mientras que la difracción de Fraunhofer se puede obtener a partir de la *TF* de la amplitud compleja en el plano de la abertura.

La manera más general de un sistema formador de imagen es a través de un diseño simple con una lente de focal f . Mediante una aproximación paraxial usando óptica geométrica es posible calcular la posición Z_2 de la imagen producida por dicha lente en el plano conocido como *plano imagen* de un objeto colocado a una distancia Z_1 en un plano conocido como el *plano objeto* mediante la ecuación de lentes delgadas: [26]

Teoría de Formación de Imágenes

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f} = 0. \quad (2.6)$$

Tomando en cuenta el esquema del sistema formador de imagen mostrado en la Fig. 2.2 en donde, como se mencionó anteriormente, existen dos planos, objeto e imagen, colocados a una distancia Z_o de la pupila de entrada y Z_i de la pupila de salida respectivamente. Un sistema óptico puede contener δ cantidad de elementos, sin embargo, siempre contendrá una pupila de entrada y una pupila de salida, y es posible hacer una simplificación del sistema óptico ya que una es imagen de la otra.

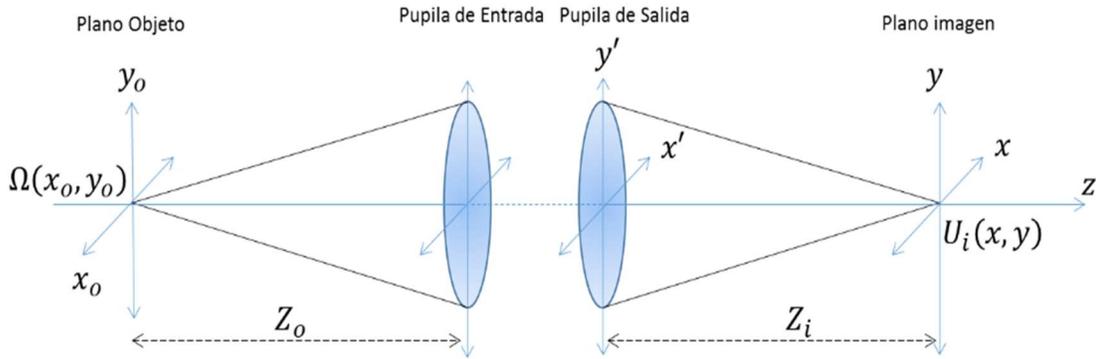


Figura 2.2: Sistema Formador de Imagen

Debido a la linealidad del fenómeno de propagación que se tiene en un sistema óptico, se puede formular una expresión que define el proceso de formación de imágenes en términos de un estímulo puntual, Para este análisis, corresponde con un objeto puntual luminoso,

$$g_{co}(x, y) = \iint h'(x - x_o, y - y_o) \Omega(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (2.7)$$

donde $\Omega(x_o, y_o)$ es el estímulo producido por el objeto puntual, $h'(x - x_o, y - y_o)$ es la función que describe al sistema óptico y $g_{co}(x, y)$ como la salida del sistema óptico en amplitud compleja. La salida se le conoce como *función de punto extendido en amplitud*.

Teoría de Formación de Imágenes

La *función de punto extendido coherente* corresponde a la *TF* de la función de la pupila $P(x', y')$ y queda expresada por la ecuación,

$$h'(x, y) = \iint P(x', y') \exp[-j2\pi(ux + vy)] dudv. \quad (2.8)$$

Si ahora el objeto es representado como una distribución de amplitud compleja $o_c(x_o, y_o)$, la imagen correspondiente está dada por:

$$g_{co}(x, y) = \iint h'(x - x_o, y - y_o) O_c(x_o, y_o) dx_o dy_o. \quad (2.9)$$

Los sistemas ópticos formadores de imagen, cuya iluminación es coherente son lineales respecto al campo o amplitud compleja.

Haciendo uso de las ventajas de la teoría de sistemas lineales en el análisis de sistemas formadores de imágenes [28]. La Ec. (2.9) puede ser expresada como una convolución de dos funciones, es decir:

$$g_{co}(x, y) = h'(x, y) * O_c(x, y), \quad (2.10)$$

donde $g_{co}(x, y)$ es la distribución de amplitud compleja en el plano de salida, $O_c(x, y)$ es la amplitud compleja del objeto, $h'(x, y)$ es la *función de punto extendido coherente* del sistema y $*$ es el operador que indica la convolución.

2.2 Teoría de formación de imágenes con iluminación del tipo incoherente

La iluminación incoherente es dinámica, es decir, su naturaleza es aleatoria, existe dependencia en el tiempo y el espacio, por lo que es necesario llevar a cabo un promedio temporal. Con lo cual, la ecuación que permite modelar la formación de imágenes es descrita mediante:

$$g_{ic}(x, y) = \langle |\iint h'(x - x_o, y - y_o) o(x_o, y_o; t) dx_o dy_o|^2 \rangle, \quad (2.11)$$

Teoría de Formación de Imágenes

donde ahora $g_{ic}(x, y)$ es la salida del sistema óptico en *intensidad*. Al desarrollar el módulo al cuadrado de $g_{ic}(x, y)$ la expresión toma la forma:

$$g_{ic}(x, y) = \iint dx_o dy_o h'(x - x_o, y - y_o) \cdot h'^*(x - x_o, y - y_o) \iint dx_o dy_o \times \langle o(x_o, y_o; t) \cdot o^*(x_o, y_o; t) \rangle, \quad (2.12)$$

sustituyendo los valores, $h(x - x_o, y - y_o) = h'(x - x_o, y - y_o) \cdot h'^*(x - x_o, y - y_o)$ y $o_i(x_o, y_o) = \langle o(x_o, y_o; t) \cdot o^*(x_o, y_o; t) \rangle$, haciendo uso de la teoría de coherencia, la ecuación de formación de imágenes se define como [27]:

$$g_{ic}(x, y) = \iint h(x - x_o, y - y_o) \cdot o_i(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (2.13)$$

aquí, $g_{ic}(x, y)$ es la salida del sistema óptico en intensidad, $o_i(x_o, y_o)$ es la transmitancia del objeto en intensidad y $h(x - x_o, y - y_o)$ es la *función de punto extendido*. Los sistemas ópticos formadores de imágenes con iluminación incoherente son lineales respecto a la intensidad [28].

De igual forma la Ec. (2.13) es una integral de convolución, por lo que se puede escribir de manera más simple haciendo uso de las ventajas de la teoría de sistemas lineales en el análisis de sistemas formadores de imágenes de la siguiente manera:

$$g_{ic}(x, y) = h(x, y) * O_i(x, y), \quad (2.14)$$

donde, $O_i(x, y)$ es la intensidad del objeto, $h(x, y)$ es la función de punto extendido en intensidad, $g_{ic}(x, y)$ es la distribución en intensidad en el plano de salida.

2.3 Sistema con iluminación coherente en el dominio frecuencial

Haciendo uso de la *Transformada de Fourier (TF)* es posible trasladar el análisis de la formación de imágenes al espacio de Fourier o espacio en frecuencia [28]. Del análisis

Teoría de Formación de Imágenes

de Fourier se establece que el operador de convolución tiene como equivalente a una operación de multiplicación de los espectros. Debido a que la ecuación que describe la formación de imágenes en un sistema de iluminación coherente es una integral de convolución, es posible emplear dicho teorema. Para ello es necesario llevar a cabo el cálculo de los espectros de Fourier de los elementos que se convolucionarán [26].

En primer lugar, se define la función de transferencia óptica en amplitud, la cual sencillamente es la *TF* de la *PSF* descrita de la siguiente forma:

$$H_C(u, v) = \mathfrak{F}\{h'(x, y)\}, \quad (2.15)$$

donde $H_C(u, v)$ es conocida como *Función de Transferencia Óptica Coherente*, u y v son las frecuencias espaciales mencionadas con anterioridad y \mathfrak{F} es el operador que indica la *TF*. . Expresando la Ec. (2.10) en el dominio frecuencial es definida como:

$$G_{CO}(u, v) = H_C(u, v) \cdot O_C(u, v), \quad (2.16)$$

donde $O_C(u, v)$ es el espectro de Fourier de la función objeto, $G_{CO}(u, v)$ es el espectro de frecuencias para el caso de la función imagen.

2.4 Sistema con iluminación incoherente en el dominio frecuencial

Similar al análisis anterior, en el caso de sistemas formadores de imagen, con iluminación incoherente, simplemente se realiza la Transformada de Fourier de la Ec. (2.14), la cual describe la formación de imágenes, obteniendo:

$$G_{IC}(u, v) = H_I(u, v) \cdot O_I(u, v), \quad (2.17)$$

donde $G_{IC}(u, v)$ es el espectro de la imagen, $O_I(u, v)$ corresponde al espectro de la distribución de intensidad del objeto, $H_I(u, v)$ es la *TF* de $h(x, y)$ conocida como *función*

Teoría de Formación de Imágenes

de transferencia óptica, *OTF*. El módulo de la función de transferencia óptica $|OTF|$ es conocido como *función de transferencia de modulación MTF*. La función de transferencia óptica puede ser descrita también como:

$$OTF(u, v) = H_C(u, v) \cdot H_C^*(u, v), \quad (2.18)$$

donde $H_C(u, v)$ es la *TF* de la función de punto extendido coherente.

En el análisis, se han establecido conceptos relacionados con la formación de imágenes en sistemas ópticos. Por otra parte, las funciones de transferencia permiten describir el sistema óptico ya sea con iluminación coherente o del tipo incoherente. Adicionalmente, se describió el análisis de dichos sistemas de manera lineal, haciendo énfasis en el uso de la *TF* para poder llevar el proceso al espacio frecuencial.

Capítulo 3

MÁSCARAS DE FASE BASADAS EN POLINOMIOS DE JACOBI-FOURIER.

La profundidad de campo (*DOF*) de un sistema óptico formador de imágenes puede definirse como la distancia medida sobre el eje óptico, a partir del plano objeto donde las imágenes correspondientes tienen alto nivel de detalle y un buen contraste, pudiendo decirse que las imágenes están en foco. La expresión matemática que define a la *DOF* es [22]:

$$DOF = \mp \left[\frac{\lambda}{2(NA)^2(M)^2} \right] \quad (3.1)$$

donde *NA* es la apertura numérica y *M* es el valor de la amplificación.

La Fig. 3.1 muestra esquemáticamente la definición de profundidad de campo.

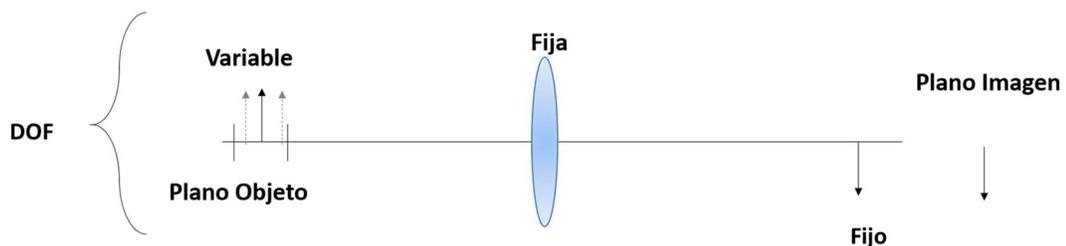


Figura 3.1: Profundidad de Campo de un Sistema Óptico

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Una técnica que permite extender la profundidad de campo es la de Codificación de Frente de Onda (*WFC*) se propuso en el año de 1995 por Edward R. Dowski y Thomas Cathey [3]. Esta consiste de un sistema óptico-digital que combina el uso de un sistema óptico y tratamiento digital de imágenes. Lo que en conjunto permite extender la profundidad de campo de un sistema formador de imágenes tradicional. Este tipo de sistemas óptico – digitales hacen uso de un elemento de codificación llamado *máscara de fase (MF)* o también *placa de fase (PP)* colocada en el plano de la pupila de salida, el cual tiene la capacidad de generar funciones de punto extendido (*PSFs*) invariantes para un intervalo de desenfoque, lo que se traduce en un aumento de la profundidad de campo del sistema formador de imagen. Entre otras cosas permite también, reducir tamaño, peso y costo del sistema [29, 30]. En la Fig. 3.2 se aprecia un esquema óptico con los elementos básicos para el sistema óptico-digital. Se puede apreciar de acuerdo a lo descrito con anterioridad, la invariancia de la *PSF*. Ya que si se hiciera un trazo de rayos se tendría una divergencia de los rayos en comparación al sistema óptico tradicional.

Sin embargo, las imágenes entregadas por este tipo de sistema óptico (imágenes codificadas) en general son borrosas y de baja calidad. Por lo que, se lleva a cabo la grabación de dicha imagen a través de una cámara digital. Haciendo uso de un tratamiento digital a la imagen codificada es posible llevar a cabo la decodificación de imagen mediante un filtro de restauración [18, 31]. Luego del tratamiento digital, es posible obtener una imagen con alto nivel de detalle y contraste del objeto. El esquema de un sistema óptico-digital codificador del frente de onda se muestra en la Fig. 3.3. Se puede apreciar en dicha imagen cada uno de los pasos descritos con anterioridad.

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

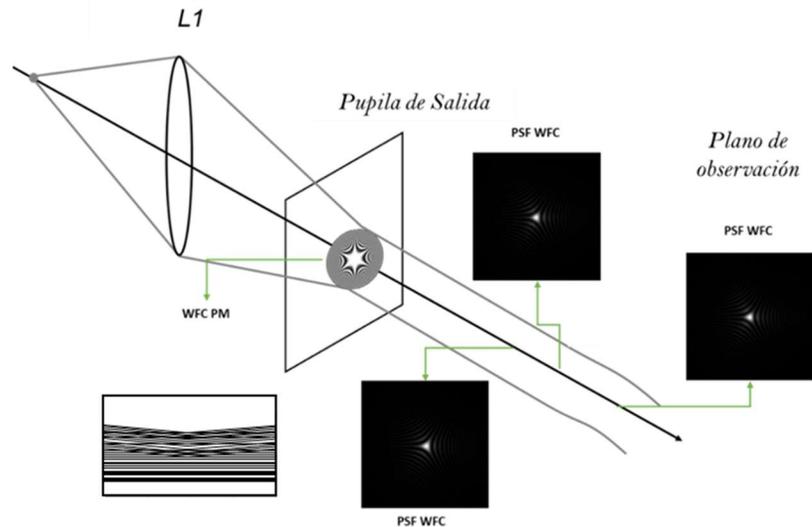


Figura 3.2: Invariancia de la PSF de un sistema óptico-digital

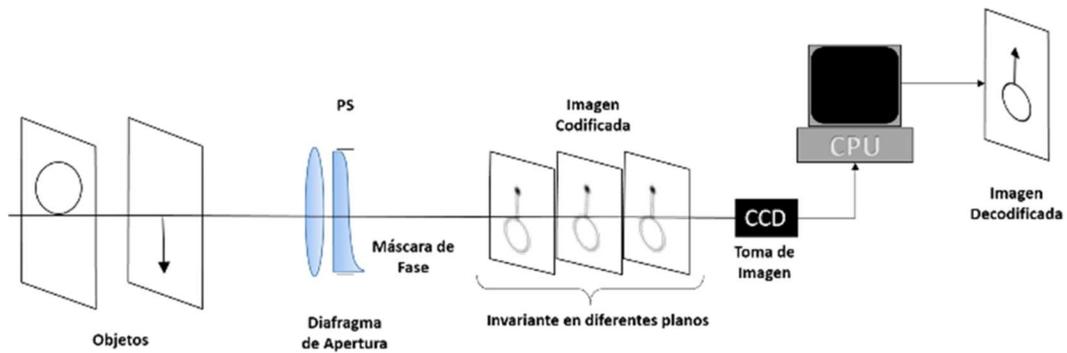


Figura 3.3: Sistema de codificación del frente de onda.

Llevando a cabo un análisis para un objeto puntual como elemento de entrada de un sistema óptico tradicional es posible observar la PSF del sistema. Si éste es limitado únicamente por difracción, se tendrá un disco de *Airy* en el plano de observación. Sin embargo, si se hace un desplazamiento por dicho plano se tendrán PSF desenfocadas, como se muestra en la Fig. 3.4. Los sistemas ópticos tradicionales en donde no hay máscara de fase, la PSF del sistema es variable.

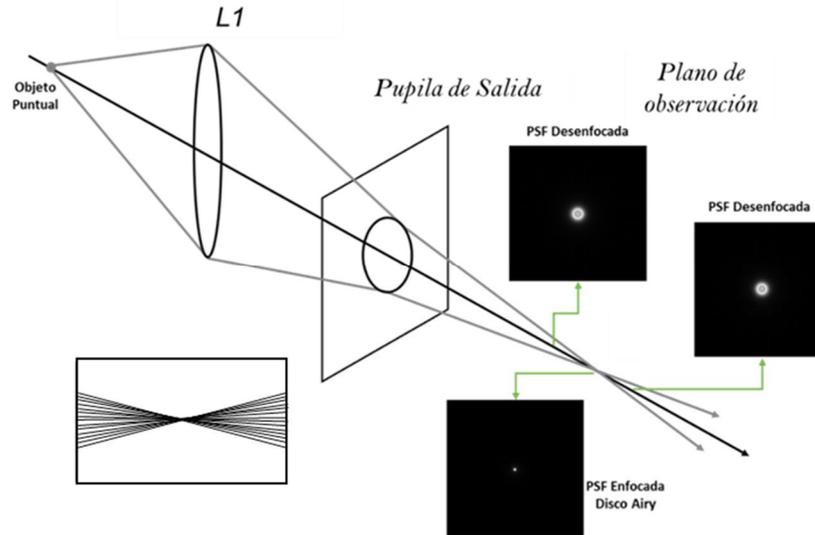


Figura 3.4: PSF variables de un sistema óptico tradicional desenfocado

En la literatura se sugiere que las Funciones de Transferencia de Modulación (*MTFs*) de los sistemas *WFC*, muestran caídas apreciables en cuanto a contraste, en comparación con las *MTFs* de sistemas limitados por difracción. Sin embargo, también se aprecia que la pasa banda de frecuencias espaciales de dichas *MTFs* no presentan ceros. Por lo que sus respectivas *PSFs* son invariantes para un rango restringido de desenfoco [18, 22,32].

En este capítulo se introducen familias de *MF* que permitan *EDoF* basadas en polinomios circulares de Jacobi-Fourier se hace un análisis minucioso de los candidatos, forma y *PSFs* de dichas funciones.

3.1 Revisión teórica de polinomios de Jacobi-Fourier

Los polinomios de Jacobi – Fourier surgen a partir de una ecuación diferencial [33], la cual permite generar diferentes conjuntos de polinomios ortogonales a través de la modificación de sus parámetros p y q . Por ejemplo, cuando $p = q = 2$, se obtiene el conjunto Fourier–Mellin; el conjunto Chebyshev–Fourier si $p = 2$ y $q = 3/2$; con

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

valores $p = 4$ y $p = 3$, se obtiene el conjunto Pseudo Jacobi-Fourier; y Legendre-Fourier para $p = q = 1$.

Bathia y Wolf [34] mencionan que existe infinito número de familias de polinomios invariantes a la rotación y ortogonales en el círculo unitario. Los polinomios de Jacobi-Fourier se componen de dos funciones separables. En primer lugar, el polinomio ortogonal de Jacobi $J_n(p, q, r)$ y en segundo lugar el factor exponencial de Fourier $\exp(jm\theta)$. Es decir:

$$P_{nm}(r, \theta, p, q) = J_n(p, q, r) \exp(jm\theta), \quad (3.2)$$

en donde n y m son el orden radial y armónico circular, respectivamente. Los polinomios normalizados de Jacobi están definidos por la ecuación [33]

$$J_n(p, q, r) = \sqrt{\frac{w(p, q, r)}{b_n(p, q)}} G_n(p, q, r), \quad (3.3)$$

donde $G_n(p, q, r)$ describen los polinomios de Jacobi, la constante de normalización está dada por $b_n(p, q)$ y $w(p, q, r)$ es la función de peso. Estas últimas se pueden obtener a partir de las expresiones:

$$G_n(p, q, r) = (-1)^n \frac{n! \Gamma(q)}{\Gamma(p+n)} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{\Gamma(p+n+s)}{(n-s)! s! \Gamma(q+s)} r^s, \quad (3.4)$$

$$b_n(p, q) = \frac{n! \Gamma^2(q) \Gamma(p-q+n+1)}{\Gamma(q+n) \Gamma(p+n) (p+2n)}, \quad (3.5)$$

$$w(p, q, r) = (1-r)^{p-q} r^{q-1}, \quad (3.6)$$

donde $\Gamma(\)$ representa la función gamma. Los parámetros p y q deben obedecer con: $p - q > -1$ y $q > 0$. Existe un método rápido para calcular estas expresiones numéricas con alta precisión [35].

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Además, dentro de la infinidad de conjuntos se encuentra también el conjunto de polinomios de Zernike. Con $n = m + 2s$, La parte radial de los polinomios de Zernike están relacionados con la parte radial de los polinomios de Jacobi-Fourier por [36]:

$$R_{m+2s}^{|m|}(r) = (-1)^n \binom{m+s}{s} r^m G_s(m+1, m+1, r^2), \quad (3.7)$$

V. Nhu et al, [18] mencionan que aquellas máscaras que varían rápidamente en los bordes de la pupila y suavemente en el centro de la misma, son máscaras que presentan un mejor desempeño. Logrando producir *MTFs* más estables, sin variaciones abruptas entre ellas, lo que se traduce en un mejor funcionamiento para la *EDoF*. De esta forma se llevó a cabo un análisis minucioso para encontrar funciones de polinomios de Jacobi-Fourier que pudieran ser consideradas como máscaras de fase.

En la Tabla 3.1 se muestran funciones polinomiales para las familias $p = q = 6, \dots, 15$; con $n = 0, 1$; $m = 0, 3$. Asimismo, en la Fig. 3.5, se presenta una comparación de las curvas radiales para los polinomios $J_0(r)$ y $J_1(r)$ de las mismas familias p, q mencionadas.

Dentro de ellas se puede ver que, existe una expresión algebraica específica que al analizar la parte cosenoidal de dicha expresión $P_{03}(r, \theta, 7, 7) = J_0(7, 7, r) \exp(j3\theta)$ se tiene entonces $\sqrt{7r^6} \exp(j3\theta) = \sqrt{7}r^3(\cos 3\theta + j \sin 3\theta)$. Si se toma solamente la parte real de dicha función y se compara con el polinomio de Zernike llamado *trefoil* descrito por $Z_{10}(r, \theta) = \sqrt{8}r^3 \cos 3\theta$ es posible observar que sólo difieren entre ellas por un factor de normalización del polinomio. La función *trefoil* ha sido ampliamente utilizada en diferentes aplicaciones de sistemas codificadores del frente de onda como máscara de fase. Esto sugiere que, existe un conjunto de funciones circulares de Jacobi-Fourier que tienen relación con *trefoil*.

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Tabla 3.1: Funciones de Máscaras de fase propuestas parámetros $p = q = 6, \dots, 15$, con órdenes radiales $n = 0, 1$ y ordenes armónicos $m = 0, 3$.

Función Polinomial	Función Polinomial
$P_{03}(r, \theta, 6,6) = J_0(6,6,r)\exp(j3\theta)$	$P_{13}(r, \theta, 15,15) = J_1(15,15,r)\exp(j3\theta)$
$P_{03}(r, \theta, 7,7) = J_0(7,7,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}(r, \theta, 8,8) = J_0(8,8,r)\exp(j\theta)$
$P_{03}(r, \theta, 8,8) = J_0(8,8,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}(r, \theta, 9,9) = J_0(9,9,r)\exp(j\theta)$
$P_{03}(r, \theta, 9,9) = J_0(9,9,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}(r, \theta, 10,10) = J_0(10,10,r)\exp(j\theta)$
$P_{03}(r, \theta, 10,10) = J_0(10,10,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}(r, \theta, 11,11) = J_0(11,11,r)\exp(j\theta)$
$P_{03}(r, \theta, 11,11) = J_0(11,11,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}^C(r, \theta, 10,10) = J_0(10,10,r)\cos\theta$
$P_{13}(r, \theta, 11,11) = J_1(11,11,r)\exp(j3\theta)$	$P_{01}^C(r, \theta, 11,11) = J_0(11,11,r)\cos\theta$
$P_{13}(r, \theta, 12,12) = J_1(12,12,r)\exp(j3\theta)$	$P_{03}(r, \theta, 8,8) + P_{01}(r, \theta, 8,8) = J_0(8,8,r)\exp(j3\theta) + J_0(8,8,r)\exp(j\theta)$
$P_{13}(r, \theta, 13,13) = J_1(13,13,r)\exp(j3\theta)$	$P_{03}(r, \theta, 8,8) + P_{01}(r, \theta, 8,8) = J_0(8,8,r)\cos 3\theta + J_0(8,8,r)\cos\theta$
$P_{13}(r, \theta, 14,14) = J_1(14,14,r)\exp(j3\theta)$	$P_{03}(r, \theta, 11,11) + P_{01}(r, \theta, 11,11) = J_0(11,11,r)\cos\theta + J_0(11,11,r)\exp(j\theta)$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

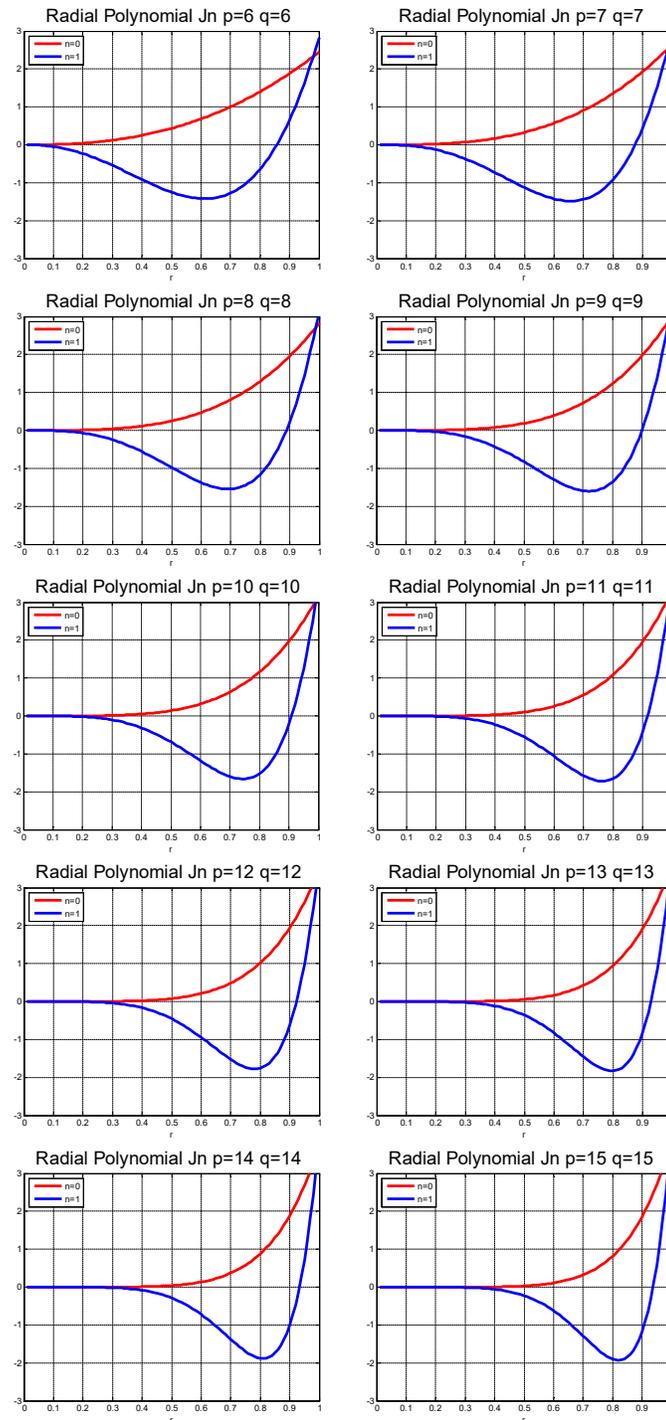


Figura 3.5: Curvas radiales de familias de polinomios Jacobi $J_0(r, p, q)$ y $J_1(r, p, q)$ $p = q = 6, \dots, 15$

3.2 Máscaras de fase generadas mediante polinomios ortogonales de Jacobi-Fourier

El punto de partida es encontrar familias de polinomios de Jacobi-Fourier que describan características de máscaras de fase como las descritas en párrafos anteriores.

Inspeccionando las curvas de las funciones radiales en la Fig. 3.5 se observó que conforme se aumentan los valores de $p = q$, se presenta un desplazamiento donde se produce la primera oscilación significativa. Los polinomios de orden radial $n = 0, 1$ son aquellos que presentan menos oscilaciones dentro del radio unidad, haciendo que las funciones de polinomios Jacobi radiales con dichos valores sean los mejores candidatos para plantear máscaras de fase.

De acuerdo al análisis realizado, las familias con $p = q \leq 5$ y $n = 0, 1$ no presentan características de máscara de fase descritas con anterioridad, ya que los lóbulos presentes en dichas familias son demasiado extensos, haciendo que la región del centro de la pupila sea pequeña o prácticamente nula en algunos casos.

Otro aspecto importante es el control del orden armónico circular m , el cual permite establecer los parámetros angulares con buen desempeño, los de mejor funcionamiento son $m = 1$ y $m = 3$. El número de lóbulos que aparece en el contorno de la máscara depende directamente del orden m . Cuando $m > 3$ provoca que los cambios en los lóbulos sean más rápidos y cortos, mientras que como se dijo anteriormente al incrementar los valores de p y q el centro se hace más, haciendo entonces que ocurran cambios bruscos en la orilla de la pupila, siendo también más abruptos. Teniendo el inconveniente de presentar artefactos en la imagen decodificada. En la Fig. 3.6 es posible apreciar los cambios mencionados

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

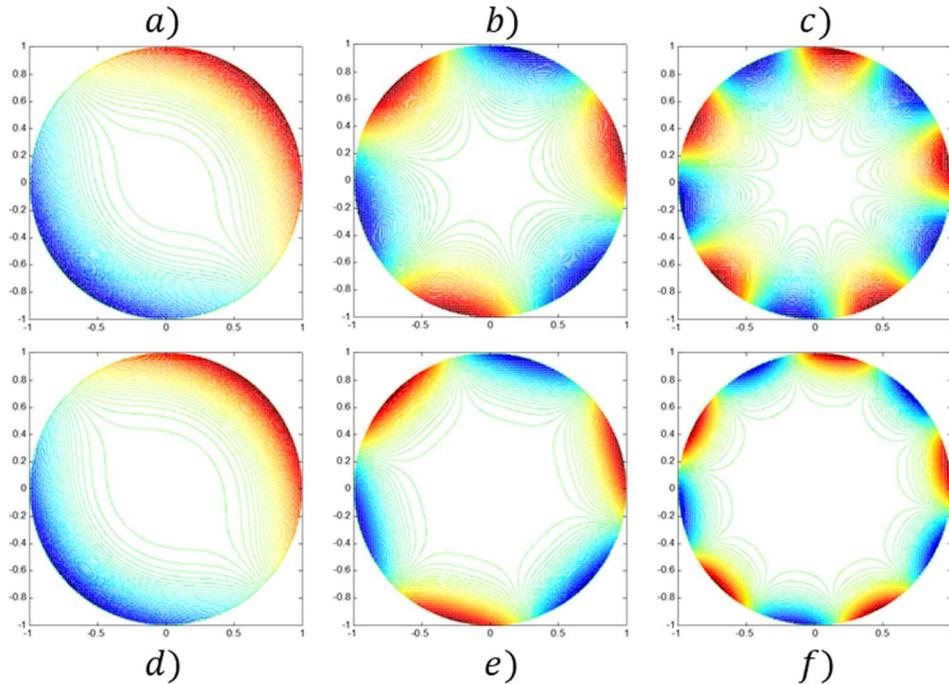


Figura 3.6: Mapas de Contorno de los polinomios de Jacobi- Fourier. a) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 1$, $p, q = 9$, b) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 3$, $p, q = 9$, c) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 5$, $p, q = 9$, d) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 1$, $p, q = 11$, e) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 3$, $p, q = 15$, f) Jacobi-Fourier $n = 0$, $m = 1$, $p, q = 20$. Se aprecia el cambio en tamaño del centro y de los lóbulos en las orillas.

Del análisis realizado para los polinomios Jacobi-Fourier se observó que las familias $p = q = 6, \dots, 11$, con orden radial $n = 0$ y $m = 3$, presentan características de máscaras de fase, pues muestran centros suaves, con lóbulos bien definidos en los contornos de la pupila.

Se proponen nuevas placas de fase basadas en las expresiones matemáticas como las mostradas en la Tabla 3.1. La expresión que describe la función de la máscara de fase es descrita por:

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

$$M_{nm}^{c,s}(r, \theta, p, q, \alpha) = \alpha J_n(p, q, r) \begin{Bmatrix} Re[e^{jm\theta}] \\ Im[e^{jm\theta}] \end{Bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$M_{nm}^{c+s}(r, \theta, p, q, \alpha) = \alpha J_n(p, q, r) \{Re[e^{jm\theta}] + Im[e^{jm\theta}]\} \quad (3.8b)$$

donde α es el parámetro de desviación de fase en unidades de longitud de onda o comúnmente llamada también como fuerza.

Desarrollando las funciones polinomiales de la Tabla 3.1 mediante las ecuaciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 y dándole la forma de la Ec. (3.8) es posible determinar la expresión que permite describir las funciones de máscaras de fase basadas en polinomios Jacobi – Fourier. Las funciones de máscara de fase basadas en polinomios de Jacobi-Fourier se muestran en la Tabla 3.2.

De manera similar al análisis realizado en el Capítulo 2, el esquema para la formación de imagen de un sistema óptico-digital con máscara de fase es mostrado en la Fig. 3.6.

Mediante el uso de la transformada de Fourier en coordenadas polares [27], es posible calcular la amplitud compleja de la PSF del sistema óptico desenfocado con codificación de frente de onda usando las máscaras de fase propuestas, la cual viene dada por la Ec. (3.9):

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Tabla 3.2: Máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi- Fourier. Adicionalmente se incluyen las máscaras de fase obtenidas de la literatura.

No.	Máscara de Fase
1	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 6,6, \alpha) = \alpha\sqrt{6}r^{\frac{5}{2}}(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
2	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 7,7, \alpha) = \alpha\sqrt{7}r^3(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
3	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha) = \alpha 2\sqrt{2}r^{\frac{7}{2}}(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
4	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 9,9, \alpha) = \alpha 3r^4(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
5	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 10,10, \alpha) = \alpha\sqrt{10}r^{\frac{9}{2}}(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
6	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha) = \alpha\sqrt{11}r^5(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
7	$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha) = \alpha 11\sqrt{13}r^5 \left[\frac{12}{11}r - 1 \right] (\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
8	$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 12,12, \alpha) = \alpha 12\sqrt{14}r^{\frac{11}{2}} \left[\frac{13}{12}r - 1 \right] (\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
9	$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 13,13, \alpha) = \alpha 13\sqrt{15}r^6 \left[\frac{14}{13}r - 1 \right] (\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
10	$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 14,14, \alpha) = \alpha 56r^{\frac{13}{2}} \left[\frac{15}{14}r - 1 \right] (\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
11	$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 15,15, \alpha) = \alpha 15\sqrt{17}r^7 \left[\frac{16}{15}r - 1 \right] (\cos 3\theta + \sin 3\theta)$
12	$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha) = \alpha 2\sqrt{2}r^{\frac{7}{2}}(\cos \theta + \sin \theta)$
13	$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 9,9, \alpha) = \alpha 3r^4(\cos \theta + \sin \theta)$
14	$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 10,10, \alpha) = \alpha\sqrt{10}r^{\frac{9}{2}}(\cos \theta + \sin \theta)$
15	$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha) = \alpha\sqrt{11}r^5(\cos \theta + \sin \theta)$
16	$M_{01}^c(r, \theta, 10,10, \alpha) = \alpha\sqrt{10}r^{\frac{9}{2}} \cos \theta$
17	$M_{01}^c(r, \theta, 11,11, \alpha) = \alpha\sqrt{11}r^5 \cos \theta$
18	$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha) = \alpha 2\sqrt{2}r^{\frac{7}{2}}[(\cos 3\theta + \sin 3\theta) + (\cos \theta + \sin \theta)]$
19	$M_{03}^c(r, \theta, 8,8, \alpha) + M_{01}^c(r, \theta, 8,8, \alpha) = \alpha 2\sqrt{2}r^{\frac{7}{2}}[\cos 3\theta + \cos \theta]$
20	$M_{03}^c(r, \theta, 11,11, \alpha) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha) = \alpha\sqrt{11}r^5[\cos 3\theta + (\cos \theta + \sin \theta)]$
	$Z_{10}(r, \theta) = \alpha\sqrt{8}r^3 \cos 3\theta$
	$fase\ cúbica = \alpha(x^3 + y^3)$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

$$h_{wfc}(\rho, \varphi; p, q, \alpha, W_{20}) = \int_0^1 \exp(jkW_{20}r^2)rdr \int_0^{2\pi} \exp[jkM_{nm}^{c+s}(r, \theta, p, q, \alpha)]\exp[-j2\pi\rho r\cos(\theta - \varphi)]d\theta, \quad (3.9)$$

para $M_{nm}^{c,s}(r, \theta, p, q, \alpha) = \alpha J_n(p, q, r) \begin{Bmatrix} \text{Re}[e^{jm\theta}] \\ \text{Im}[e^{jm\theta}] \end{Bmatrix}$. Las coordenadas polares (r, θ) y (ρ, ϕ) son respectivamente, coordenadas en el plano de la pupila de salida y en el plano de la imagen del sistema. En la Fig. 3.7 se muestra el esquema del sistema WFC propuesto para una fuente del tipo puntual.

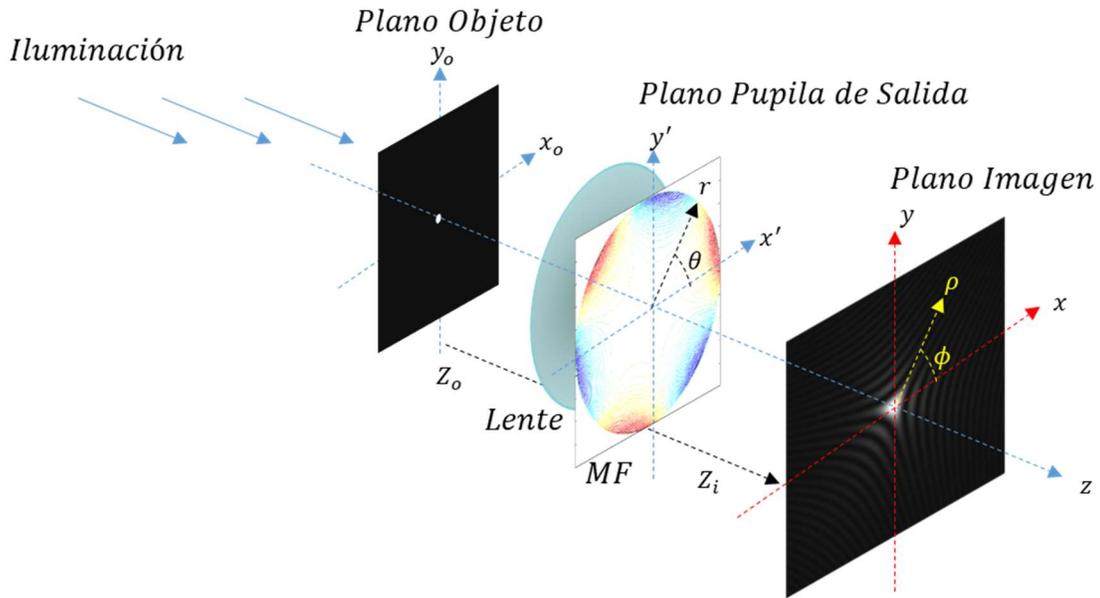


Figura 3.7: Sistema de codificación de frente de onda para fuente puntual

El parámetro W_{20} es la constante típica de aberración de desenfoque. En un sistema óptico libre de aberraciones al colocar un objeto puntual luminoso en el plano objeto a una distancia dada, el frente de onda esférico divergente del objeto puntual es transformado en un frente de onda esférico convergente, es decir, la imagen de un punto es un disco de *Airy*.

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Debido a que no existe algún parámetro que pudiera modificar a la onda esférica, se puede establecer como una onda de referencia. Objetos colocados en diferentes posiciones se considerarán desenfocados en el plano imagen. H. Hopkins [37] describió que la diferencia entre la esfera de referencia y la esfera del frente de onda de objetos colocados a diferentes distancias determina la diferencia angular expresada por W_{20} .

La intensidad de la PSF está dada por $|h_{wfc}|^2$ la cual será invariante en un cierto intervalo de desenfoque.

La MTF se calcula a partir de la expresión:

$$MTF(\alpha, W_{20}) = \left| \Im \left\{ |h_{wfc}(\rho, \varphi; p, q, \alpha, W_{20})|^2 \right\} \right| \quad (3.10)$$

En las Figuras 3.8, ..., 3.14 se muestran los mapas de contorno y las superficies en 3D, de las placas de fase propuestas. Adicionalmente en la Fig. 3.15 se muestran también los casos de fase cúbica y trefoil, obtenidos de la literatura. Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran las máscaras de fase con $n = 0$ y $m = 3$ y $p = q = 6, \dots, 11$. Como se puede apreciar, estas funciones son muy similares entre sí, la parte central de la superficie es suave y muestran lóbulos en las orillas de la pupila. Se aprecia la cercanía que tiene con la función *trefoil*. Contrariamente, en los casos $p = q > 11$, con $n = 0$ y $m = 3$, al desarrollar las simulaciones las imágenes decodificadas presentan artefactos, de esta manera se optó por no considerarlas, aunque para algunas aplicaciones específicas pudiesen ser de utilidad.

Las familias $p = q = 11, \dots, 15$ para orden radial $n = 1$ y $m = 3$ se presentan en las Figuras 3.10 y 3.11. Como se observa estas funciones muestran nuevamente características de funciones de máscara de fase, pues cuentan con centro amplio y lóbulos bien definidos en el contorno. Se observa que la parte central suave es muy similar a las de las Figuras 3.8 y 3.9, pero alrededor de este, se cuenta con dos secciones de picos o lóbulos. Los más cercanos al centro son más suaves y extensos en comparación a los que se encuentran en la orilla de la pupila los cuales son más abruptos.

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

Las máscaras de fase para orden $n = 0$ y $m = 1$ se muestran en las Figuras 3.12 y 3.13. Estas máscaras comparten similitud en la forma y sucede el mismo fenómeno de aumentar el tamaño de la parte central conforme p, q aumenta. Se considera que dichas máscaras guardan cierta similitud en relación a la máscara de fase cúbica propuesta por Dowsky y Cathey [3], pues como se verá más adelante el desempeño es similar en ambas. Al considerar la parte radial del polinomio y la parte cosenoidal, entonces la máscara de fase presenta un giro de 45° .

La Fig. 3.14 muestra placas de fase obtenidas a partir de la combinación lineal de algunos conjuntos de polinomios de Jacobi-Fourier. En específico sólo de los conjuntos $p = q = 8$ y $p = q = 11$, dichas combinaciones son de algunas de las máscaras que mostraron un mejor desempeño. Para las dos primeras propuestas existe cierta similitud entre ambas y como se puede ver en los mapas de contorno, muestran características de máscara de fase ya citadas con anterioridad. Ambas máscaras se componen de los mismos polinomios y solo existe un giro de 45° de diferencia entre una y otra. La última propuesta máscara de fase también guarda cierta similitud en forma a la máscara de fase cúbica y las propuestas de las Figuras 3.12 y 3.13, se observa una PSF más cercana a la de fase cúbica.

Finalmente, la Fig. 3.15 presenta las máscaras de fase obtenidas de la literatura, máscara de fase cúbica y trefoil, con las cuales se llevó a cabo la comparación del desempeño de las mismas.

De acuerdo al análisis gráfico realizado, es posible considerar a las familias de polinomios $p = q = 6, \dots, 15$ para órdenes radiales $n = 0$ y 1 , y órdenes armónicos circulares $m = 1$ y 3 como las más adecuadas. Estas funciones polinomiales cumplen con las características citadas en la literatura para usarse como máscaras de fase.

A manera de comparar las *PSFs* numéricas de las *MF* citadas con anterioridad, se muestran en las Figuras 3.16, 3.17 y 3.18 cada una de ellas. Como se puede observar, las

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

familias de máscaras de fase propuestas guardan la singularidad de poder variar el tamaño de la *PSF*. Donde el tamaño del centro suave cambia entre ellas conforme varían los parámetro p y q , sin la necesidad de cambiar el tamaño de la abertura del sistema. También es posible observar la similitud que guardan ciertas *MF* con la máscara de fase trefoil, aunque como se observara más adelante el desempeño en sistemas *WFC* es diferente.

En las *MF* con $n = 0$ y $m = 1$, donde sólo se hace uso de la parte real de la función, es decir, la parte cosenoidal, su *PSF* es más parecida a la *PSF* de la aberración óptica conocida por *coma*, y de acuerdo a O. Palillero et al, y Prassat et al, dicha máscara también permite realizar la *EDoF*.

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

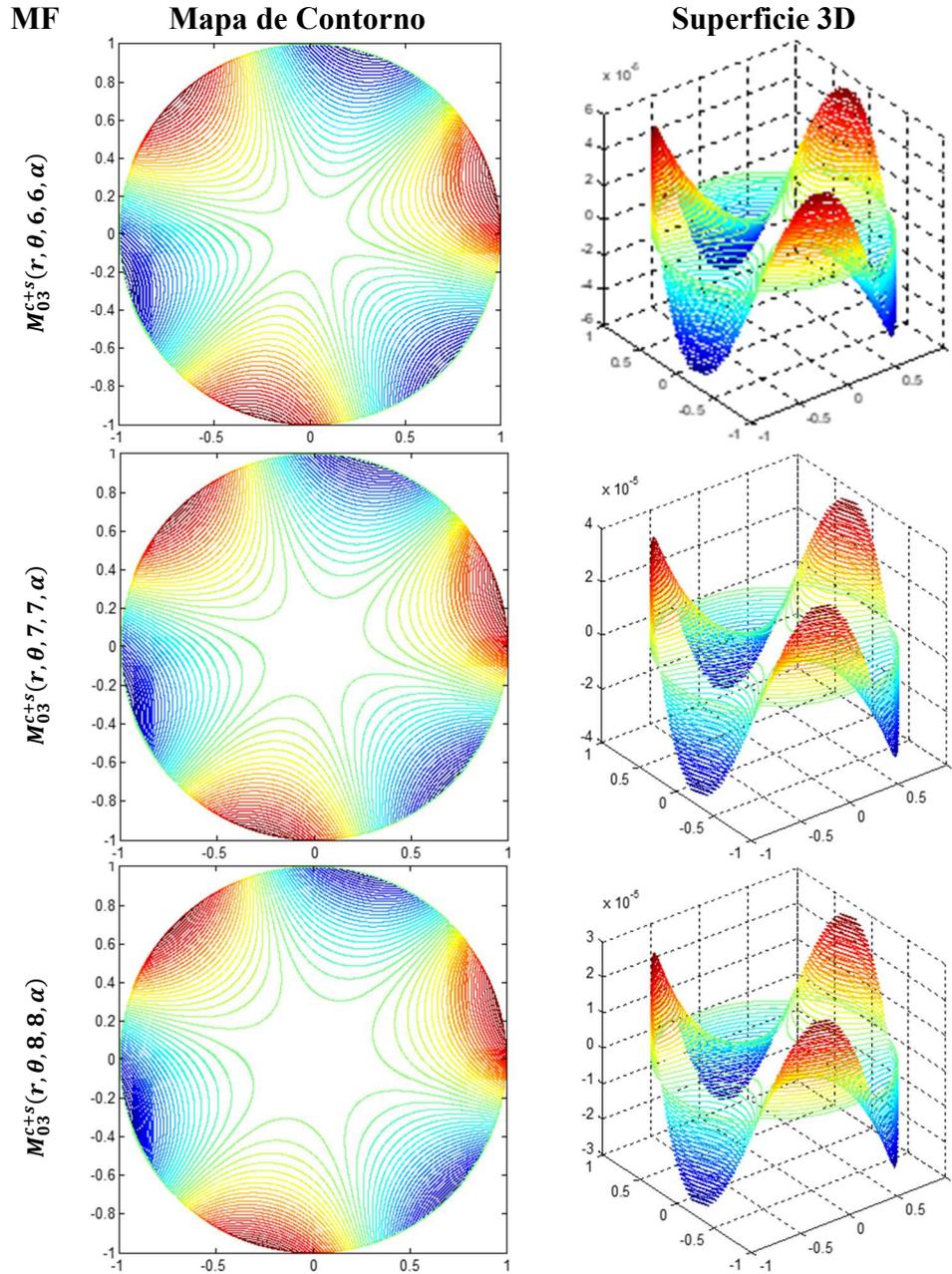


Figura 3.8: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestos con orden radial $n = 0$ y orden armónico $m = 3$. Con $p = q = 6, \dots, 8$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

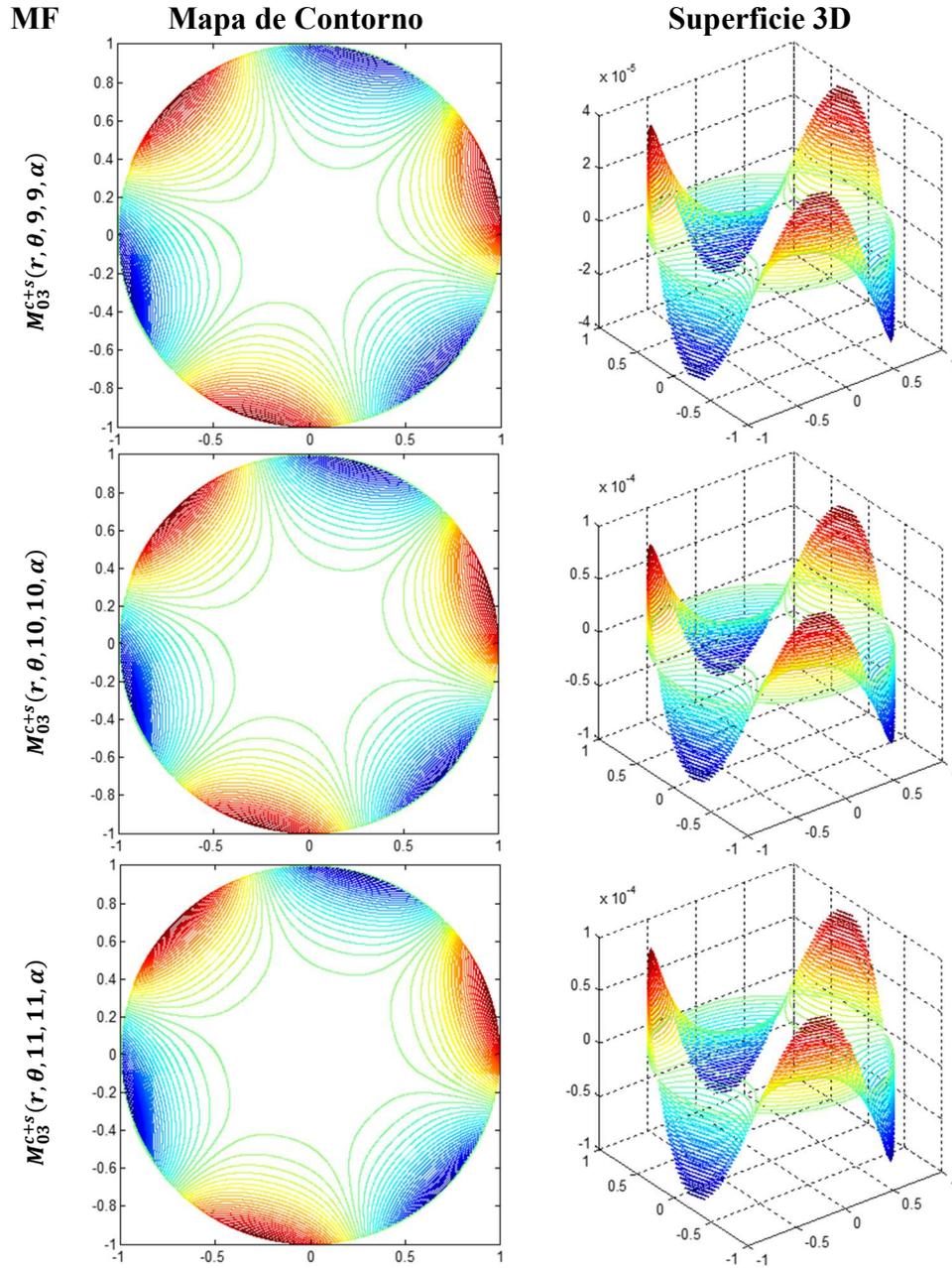


Figura 3.9: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestas con orden radial $n = 0$ y orden armónico $m = 3$. Con $p = q = 9, \dots, 11$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

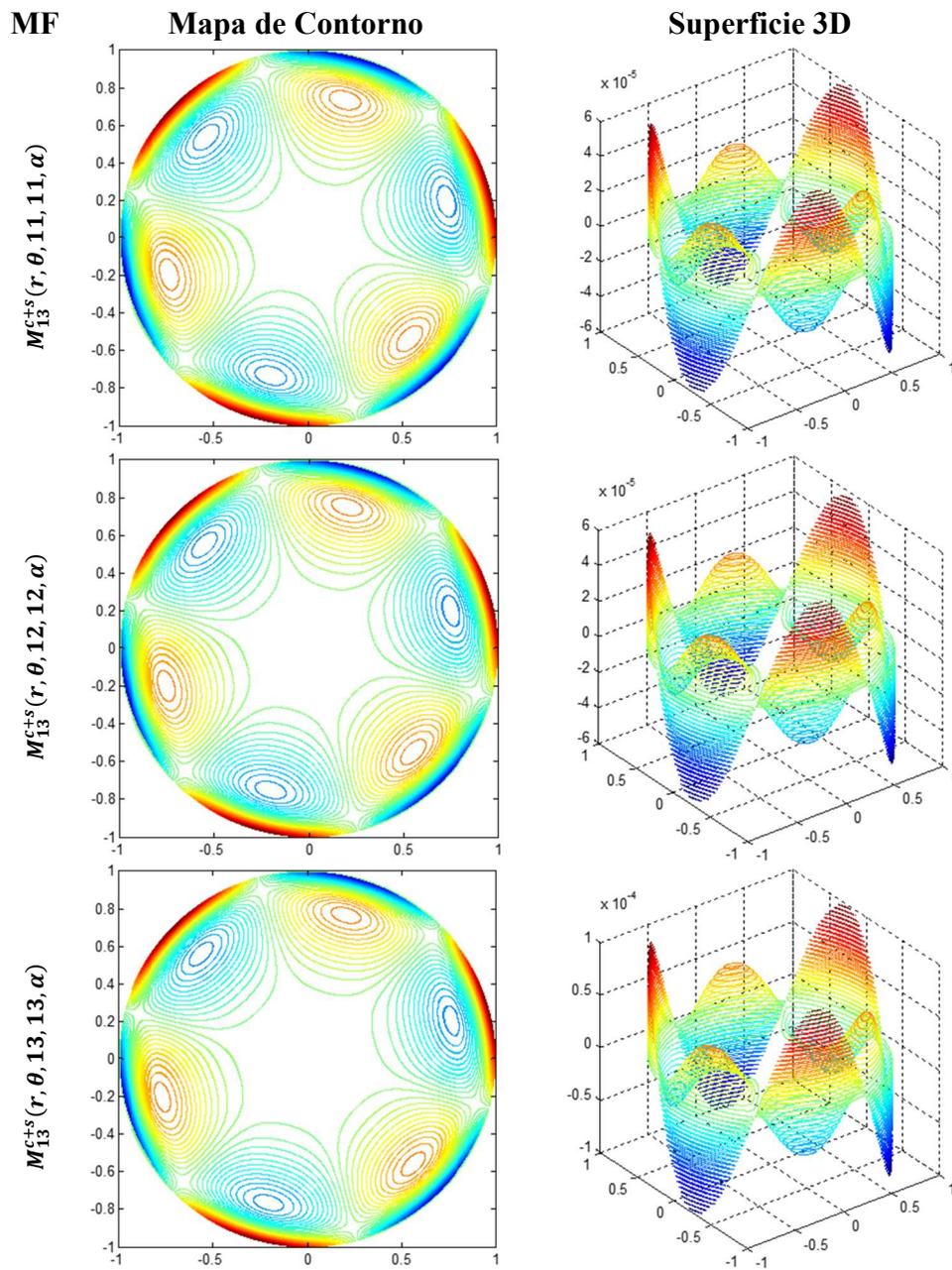


Figura 3.10: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestas con orden radial $n = 1$ y orden armónico $m = 3$. Con $p = q = 11, \dots, 13$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

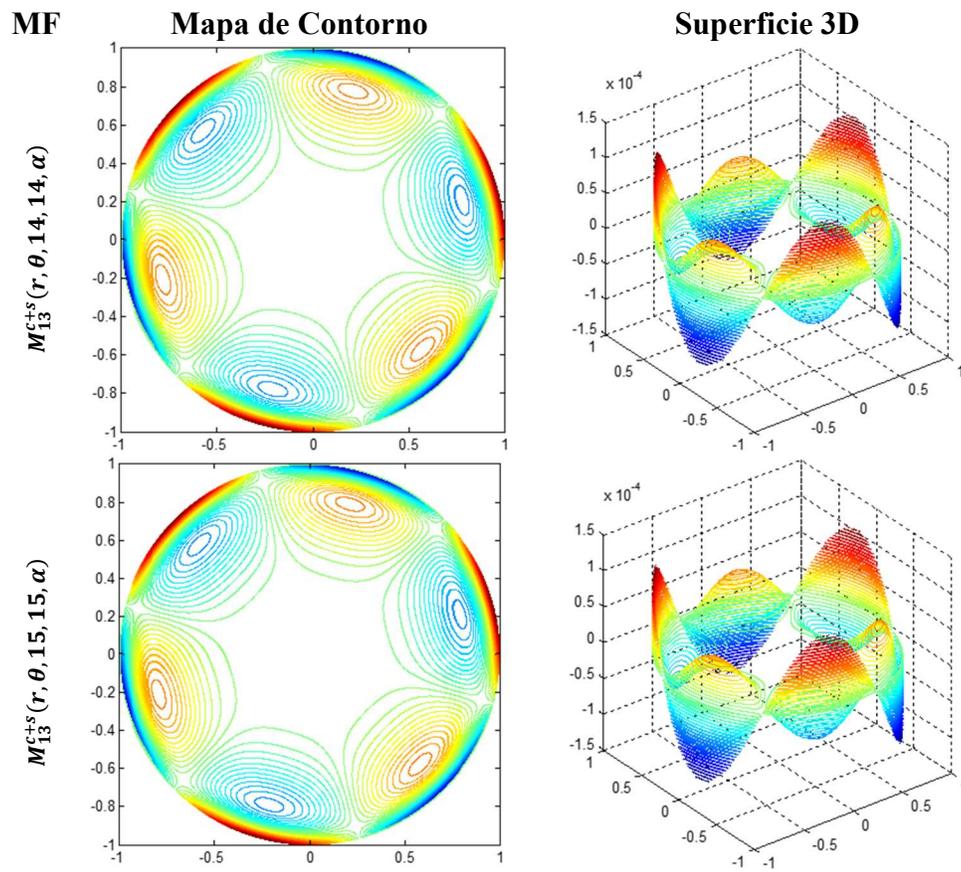


Figura 3.11: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestas con orden radial $n = 1$ y orden armónico $m = 3$. Con $p = q = 14, 15$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

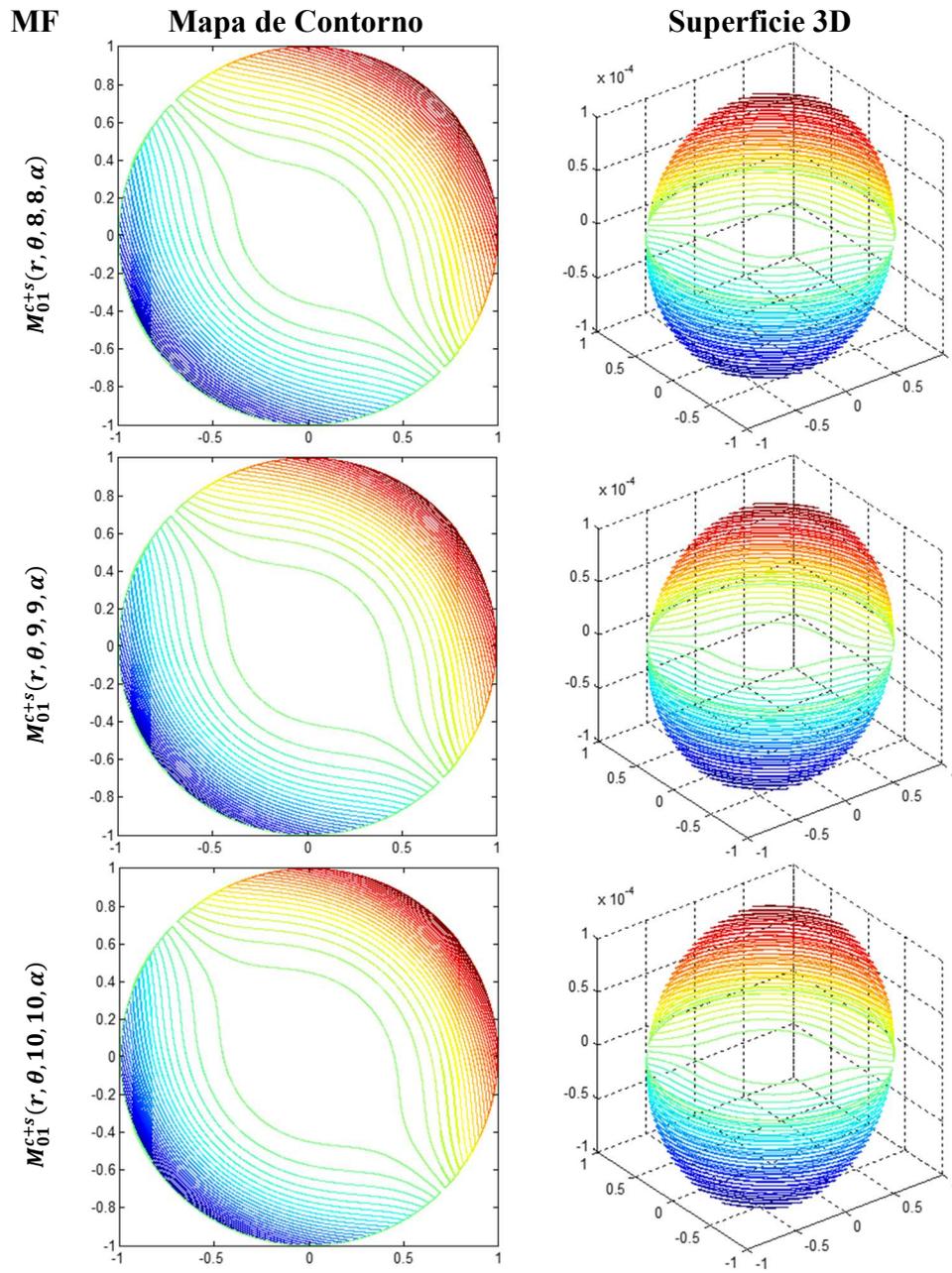


Figura 3.12: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestas con orden radial $n = 0$ y orden armónico $m = 1$. Con $p = q = 8, \dots, 10$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

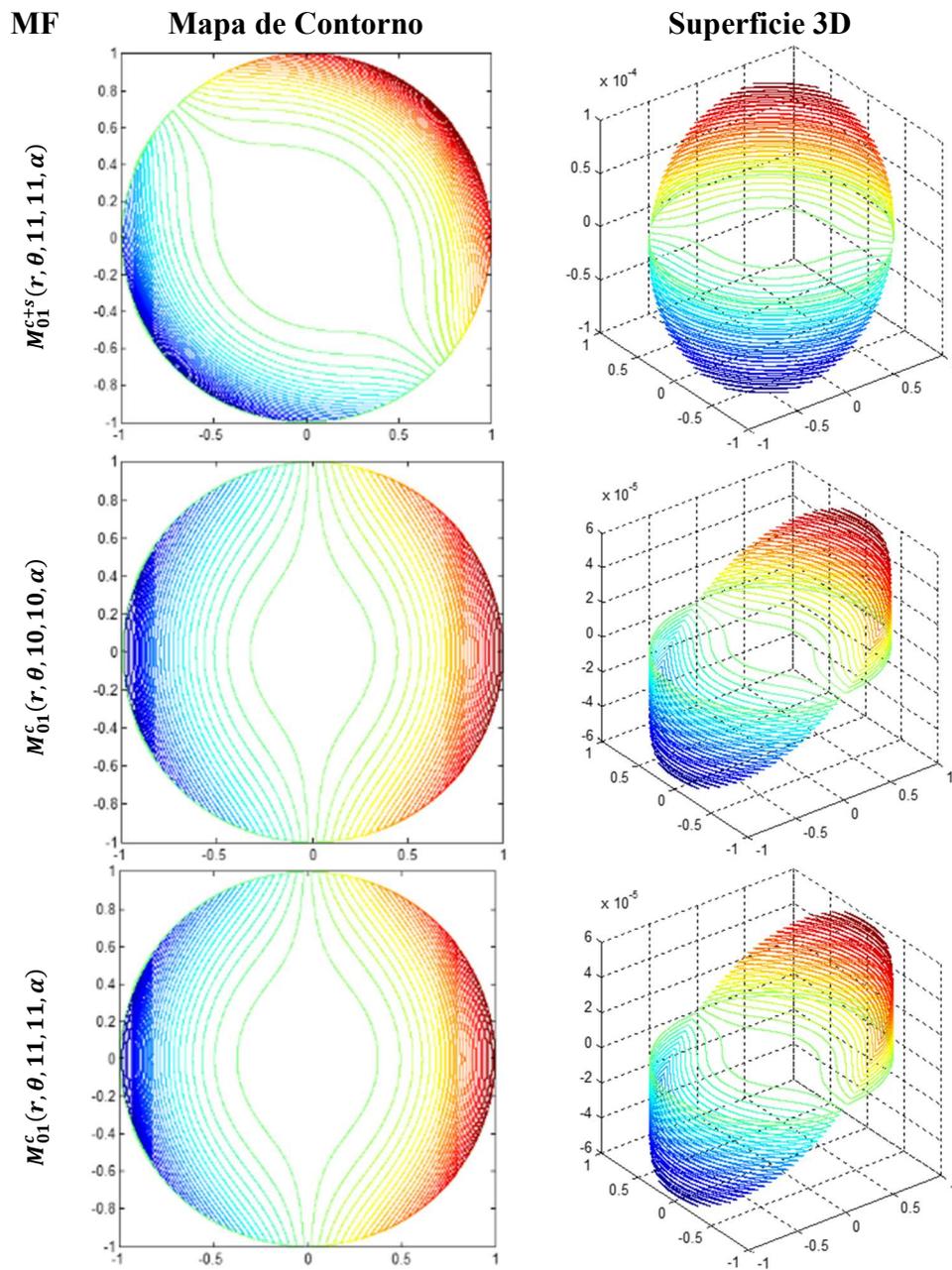


Figura 3.13: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi propuestas con orden radial $n = 0$ y orden armónico $m = 1$. Con $p = q = 10, 11$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

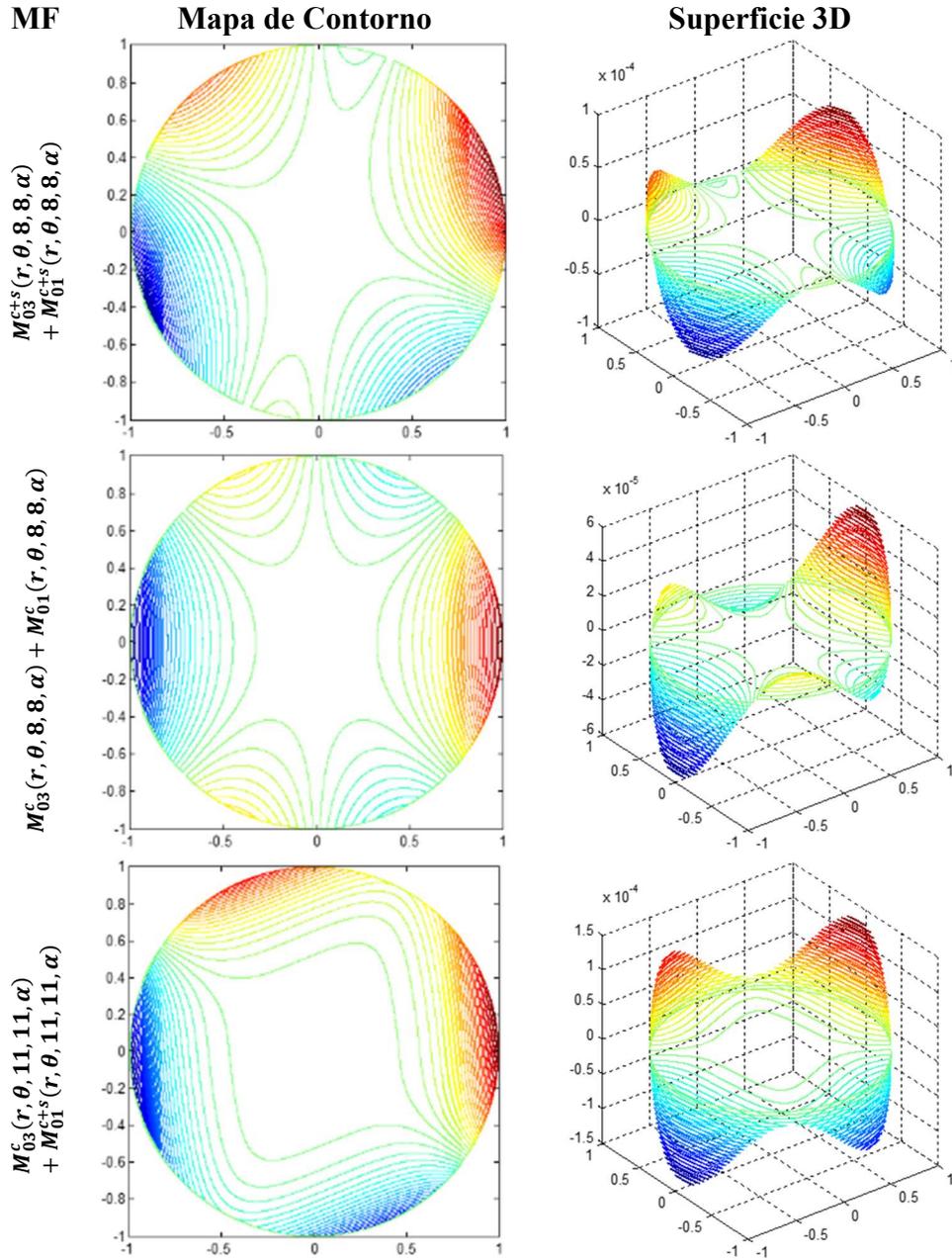


Figura 3.14: Mapas de contorno y superficies 3D de las máscaras de fase propuestas usando combinaciones de polinomios de Jacobi – Fourier. Se incorporan la máscara de fase cúbica, trefoil

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

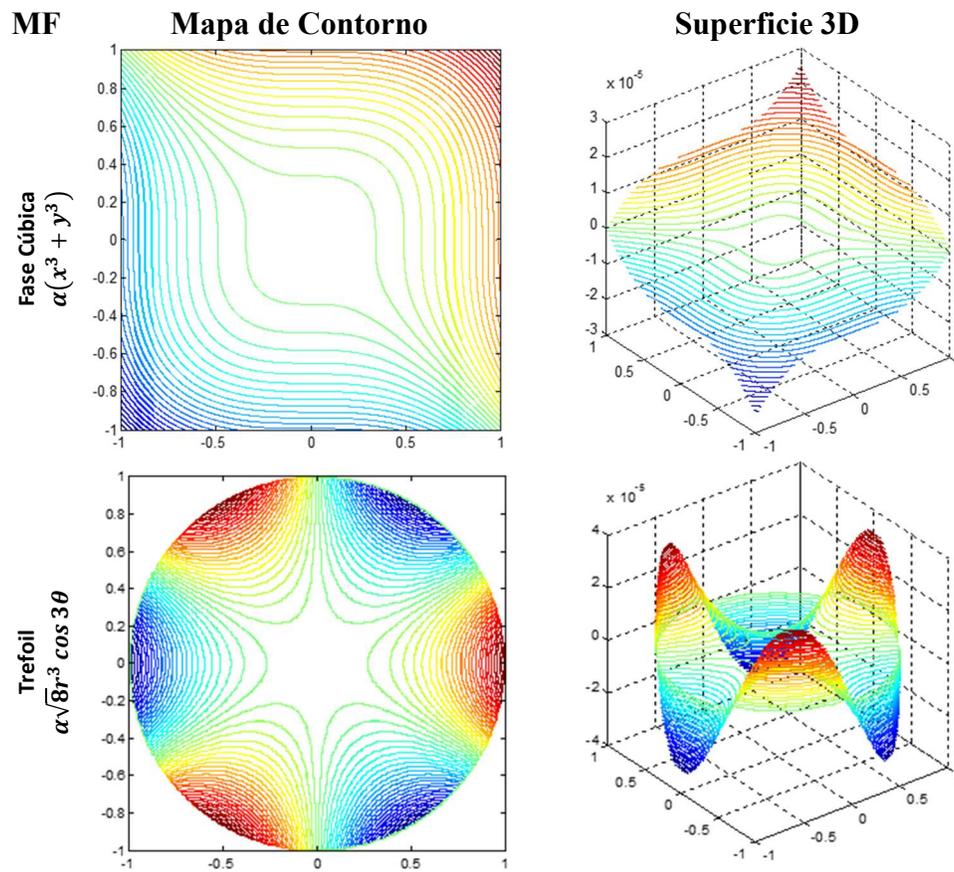


Figura 3.15: Mapas de contornos, superficies 3D de la máscara de fase cúbica y trefoil

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

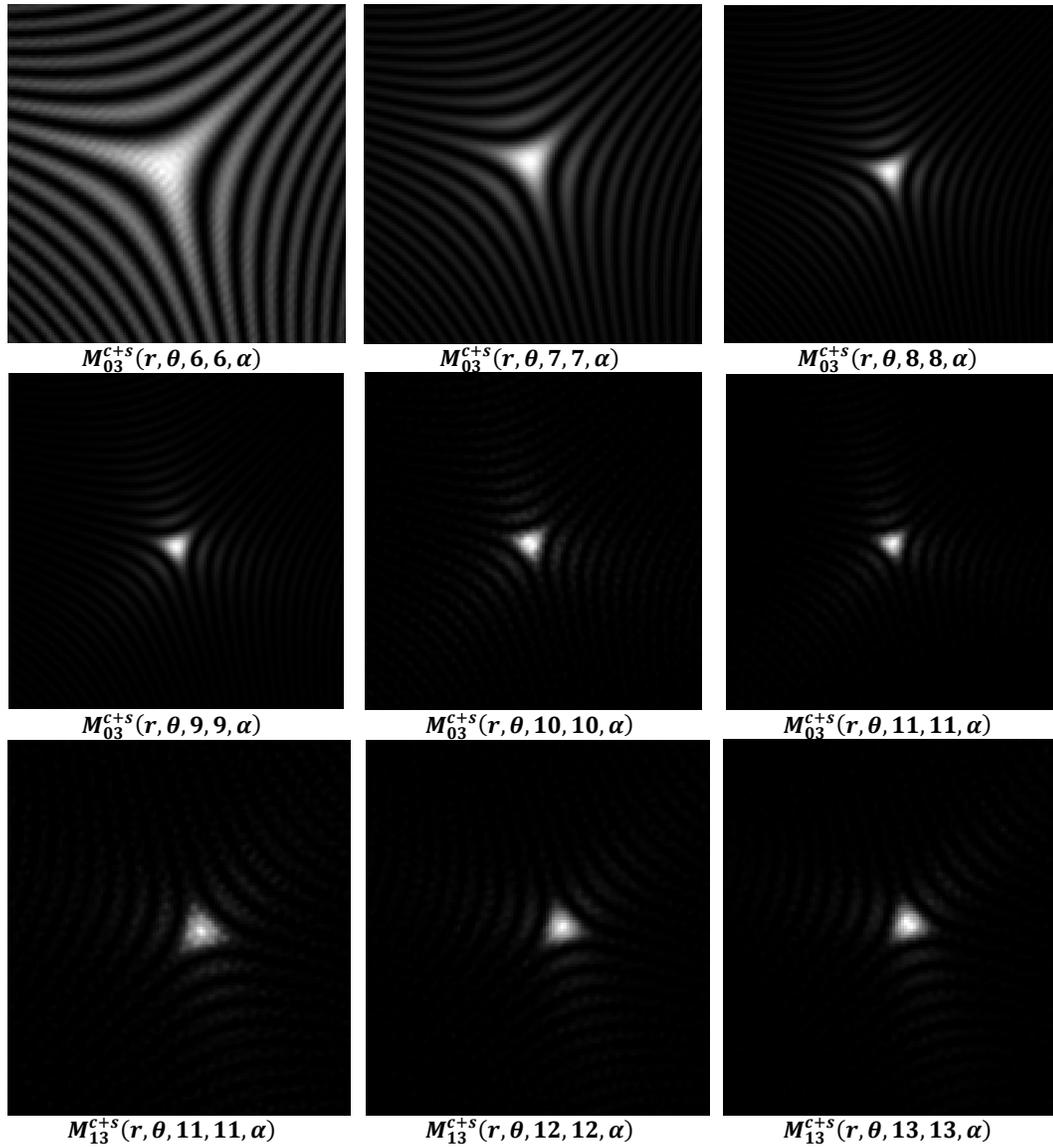


Figura 3.16: PSFs enfocadas de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi $n = 0$, $m = 3$, y $p = q = 6, \dots, 11$ y máscaras con Jacobi $n = 1$, $m = 3$, y $p = q = 11, \dots, 13$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

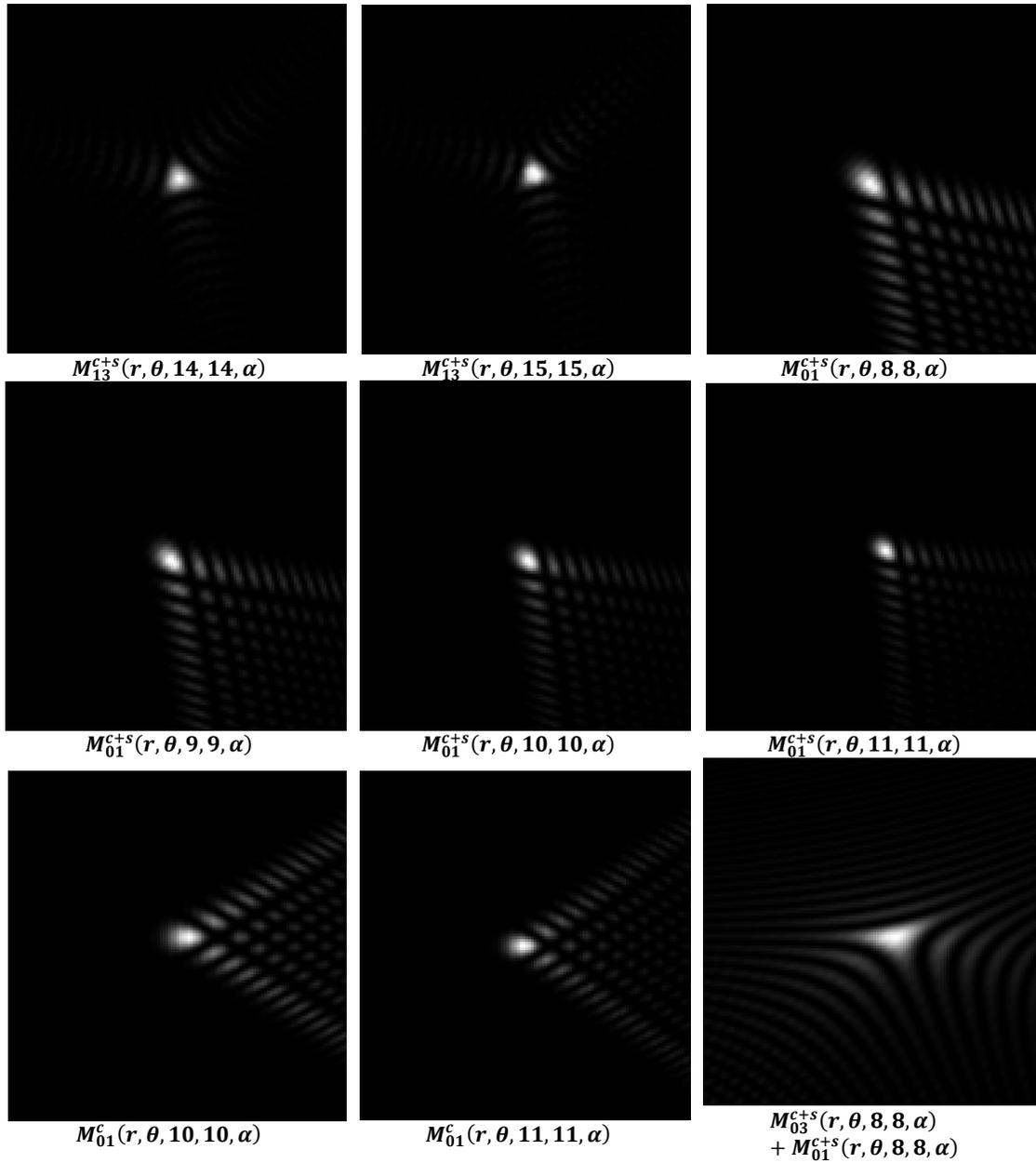


Figura 3.17: PSFs enfocadas de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi $n = 1$, $m = 3$, y $p = q = 14, 15$ y máscaras con Jacobi $n = 0$, $m = 1$, y $p = q = 8, \dots, 11$

Máscaras de Fase Basadas en Polinomios de Jacobi-Fourier

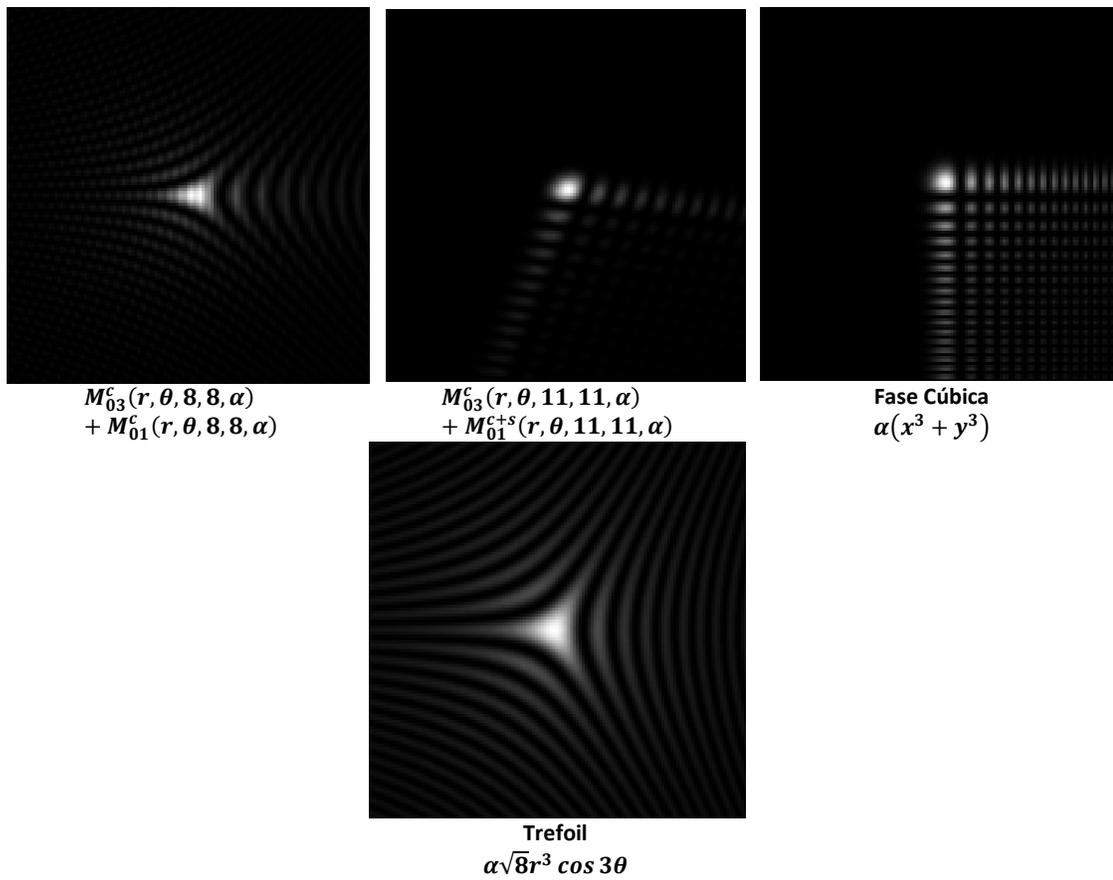


Figura 3.18: PSFs enfocadas de las máscaras de fase basadas en superposición de polinomios de Jacobi $n = 0, m = 0, 3$, y $p = q = 8, 11$ y máscaras de fase de la literatura

Capítulo 4

OPTIMIZACIÓN DE LAS MÁSCARAS DE FASE Y ALGORITMO DE SIMULACIÓN

En este capítulo se muestra el proceso de optimización del parámetro de desviación de fase las *MF* basadas en *PJF* mediante el empleo de Algoritmos Genéticos (*AG*). Los *AG* es una técnica de búsqueda iterativa, la idea es optimizar una función objetivo utilizando los principios de la selección natural sobre los parámetros de la función [38]. Se utiliza el error cuadrático medio (*MSE*) como herramienta para determinar el valor óptimo, y una descripción básica del *AG*. Se detalla el tipo de filtro de restauración usado para realizar la decodificación de la imagen codificada, el cual consiste en un filtro de equalización de espectro. Adicionalmente, un análisis de las respuestas de las *MTFs*, de las funciones de *MF* propuestas empleando el parámetro de desviación de fase óptimo encontrado es ejecutado. Finalmente, se presenta el algoritmo de simulación para verificar el desempeño de las *MF* propuestas en el contexto de imágenes digitales mediante un sistema óptico-digital con características determinadas. Se hace énfasis en los parámetros de muestreo en cada una de las etapas de la simulación con el fin de simular el desempeño del mismo si se utilizarán diferentes tipos de sensores *CCD* para la grabación de la imagen codificada y su efecto en el proceso de restauración de dicha imagen.

4.1 Optimización del parámetro de desviación de fase de las máscaras de fase propuestas

Es necesario mencionar que el desempeño de las máscaras de fase en los sistemas de codificación del frente de onda, depende del diseño de perfil de fase adecuado que permita generar *PSFs* invariantes. Sin un diseño adecuado y un parámetro de desviación de fase óptimo la técnica sería incapaz de llevar a cabo la invariancia al desenfoque.

Es importante hacer énfasis en que, de acuerdo a la aplicación y sistema óptico-digital donde se realice la implementación de la máscara de fase, los resultados podrían ser diferentes. Es decir, un valor de la fuerza para la máscara de fase podría requerir ser mayor o menor de acuerdo a la implementación que se requiera.

En esta sección se presenta la optimización del parámetro de desviación de fase para las funciones de máscaras de fase propuestas implementadas en un sistema óptico-digital particular con parámetros ópticos cuyo diámetro de la pupila de salida $D = r = 12 \text{ mm}$, distancia al plano imagen $Z_i = 25 \text{ mm}$, y una longitud de onda de 632 nm .

La optimización del parámetro de *desviación de fase* o *Fuerza* α en términos de la longitud de onda se calcula haciendo uso del *Error Cuadrático Medio* (*MSE*) obtenido a partir de la comparación de la *MTFs* desenfocadas y la *MTF* limitada por difracción del sistema, es decir:

$$MSE(\alpha) = \frac{1}{5} \sum_{W_{20}=1}^5 |MTF(\alpha, W_{20}) - MTF(\alpha, 0)|^2, \quad (4.1)$$

en donde *MTF* está dado por la Ec. (3.9). De la Ec. (4.1), se deduce que el valor de W_{20} está determinado dentro del intervalo de $[\lambda, 5\lambda]$. La búsqueda del parámetro *óptimo* de desviación de fase α se hace a través del uso de *algoritmos genéticos AG*, dentro de un intervalo limitado de valores $\alpha \in [-32\lambda, 32\lambda]$.

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

Al llevar a cabo el desarrollo del algoritmo genético [38], inicialmente se crea una población inicial de τ individuos, dichos individuos serán valores de Fuerza α obtenidos de forma aleatoria dentro del intervalo limitado de búsqueda.

Cada uno de los miembros de la población inicial se hace evaluar con el fin de obtener el valor de error MSE de cada uno de ellos. La *función objetivo* es considerada como la búsqueda del valor mínimo de error MSE de la población, es decir, existe un valor α dentro de la población inicial que entrega un valor *mínimo* de error MSE . A dicho valor encontrado es considerado como valor *Apto* y se define como:

$$Apto_{\alpha} = \min_{\alpha}\{MSE(\alpha)\}. \quad (4.2)$$

Con el valor *Apto* se realizan el *cruzamiento* y la *mutación* con el fin de proponer una nueva población de individuos generada a partir de él. Con la nueva población generada se repite el proceso descrito anteriormente. Después de un determinado número de iteraciones se observa como el valor de α converge hacia un determinado valor.

Los parámetros de desviación de fase α óptimos para las máscaras de fase propuestas se muestran en la Tabla 4.1.

El valor del error MSE por sí solo no puede determinar que la máscara de fase entregara la mejor imagen decodificada, como se mencionó en capítulos anteriores, esto hace que se tenga la mejor invariancia en el sistema, sin embargo, el perfil de la máscara, así como la naturaleza de la curva de la MTF si presenta oscilaciones en el rango de frecuencias describe la calidad de la imagen decodificada que se tendrá, pues estas invariancias están relacionadas con la presencia de artefactos en la imagen final.

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

Tabla 4.1: Parámetros de desviación de fase óptimos para Jacobi MF propuestas. Se incluyen las MF obtenidas de la literatura.

Phase Mask	Phase Deviation Parameter (strength) α	Error MSE
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 6,6, \alpha)$	13λ	0.44×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 7,7, \alpha)$	11λ	0.052×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha)$	9λ	0.24×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 9,9, \alpha)$	11λ	5.3×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 10,10, \alpha)$	23λ	19.7×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha)$	29λ	67.5×10^{-3}
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha)$	10λ	65.6×10^{-3}
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 12,12, \alpha)$	18λ	46.3×10^{-3}
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 13,13, \alpha)$	28λ	49.9×10^{-3}
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 14,14, \alpha)$	28λ	82.2×10^{-3}
$M_{13}^{c+s}(r, \theta, 15,15, \alpha)$	29λ	72.1×10^{-3}
$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha)$	25λ	17.3×10^{-3}
$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 9,9, \alpha)$	28λ	20.8×10^{-3}
$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 10,10, \alpha)$	31λ	41.3×10^{-3}
$M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha)$	31λ	135.3×10^{-3}
$M_{01}^c(r, \theta, 10,10, \alpha)$	31λ	261.8×10^{-3}
$M_{01}^c(r, \theta, 11,11, \alpha)$	31λ	461.8×10^{-3}
$M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8, \alpha)$	14λ	101.1×10^{-3}
$M_{03}^c(r, \theta, 8,8, \alpha) + M_{01}^c(r, \theta, 8,8, \alpha)$	11λ	0.51×10^{-3}
$M_{03}^c(r, \theta, 11,11, \alpha) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11, \alpha)$	31λ	368.4×10^{-3}
$Z_{10}(r, \theta)$	12λ	1.04×10^{-3}
<i>cubic phase</i>	15λ	134.4×10^{-3}

Posterior a la optimización del parámetro de desviación de fase, se realiza la implementación del filtro de restauración para realizar el proceso de decodificación.

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

Típicamente, la imagen codificada presenta degradación debido a la incorporación de la máscara de fase, ésta imagen es capturada por un sensor y tratada digitalmente mediante algoritmos computacionales.

Como se mencionó anteriormente, para realizar el proceso de decodificación es necesario usar un filtro de restauración, en este trabajo se utiliza una expresión obtenida de la referencia [31], la cual es una generalización del filtro de *Wiener*, dicha generalización se encuentra en la forma llamada *filtro de media geométrica* cuya expresión está dada por:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\gamma \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \beta \frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}} \right]^{1-\gamma} \quad (4.2)$$

donde H es el modulo $|OTF|$ de la máscara de fase usada para llevar a cabo la codificación del frente de onda; $S_n(u, v)$ y $S_f(u, v)$ son los espectros de potencia del ruido y de la imagen codificada respectivamente. Generalmente, estos espectros son desconocidos y normalmente se establecen como un valor constante K , es decir, $K = \frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}$. Las constantes γ y β son reales y positivas. De acuerdo al valor de dichas constantes será la repercusión que tengan sobre el tipo de filtrado, de manera que, cuando $\gamma = 0$ el filtro se convierte en el llamado *filtro de Wiener paramétrico*, que se reduce al *filtro de Wiener estándar* al tener $\beta = 1$. Cuando $\gamma = 1$ entonces se tiene la configuración de un *filtro inverso*. Con $\gamma = 1/2$ el filtro entonces tiene el producto de ambas cantidades elevadas a la misma potencia y entonces recibe el nombre de *filtro de media geométrica*. Finalmente, cuando $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1$ el filtro es referido comúnmente como *filtro de ecualización de espectro*.

Los resultados que se muestran en este trabajo se obtuvieron a partir de la configuración de filtro de *ecualización de espectro*. El valor de la constante K se ajustó

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

de manera cualitativa de acuerdo a los mejores resultados obtenidos en las imágenes decodificadas.

Debido a que el filtro utilizado provoca un marcado realce de los bordes (altas frecuencias) en el contexto del filtraje, y además se agrega ruido adicional del tipo Gaussiano como parte de la simulación; se hace uso de un *filtro Butterworth Pasa Bajas* con el fin de “suavizar” dichos bordes y eliminar parte del ruido agregado. Para que la imagen final tenga una mejor calidad.

Con el fin de demostrar la invariancia de las máscaras de fase de Jacobi - Fourier, se calcularon las *MTFs* desenfoadas de dichas máscaras utilizando los valores de fuerza óptimos dados por el algoritmo (Tabla 4.1) y las características del sistema descritas con anterioridad. Los parámetros de desenfoque utilizados son de $[0, 5\lambda]$.

La Fig. 4.1 muestra la comparación en magnitud de una *MTF* limitada por difracción y una *MTF* de *MF*, como se puede observar la magnitud de la *MTF* de la *MF* es peor en comparación a la limitada por difracción ya que se aprecia una caída bastante marcada. Las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 muestran las *MTFs* desenfoadas de las funciones de máscara de fase propuestas, además de la máscara de fase cúbica y trefoil. Se aprecia una mejor sensibilidad al desenfoque, debido a la cercanía que presentan las curvas a pesar del desenfoque agregado.

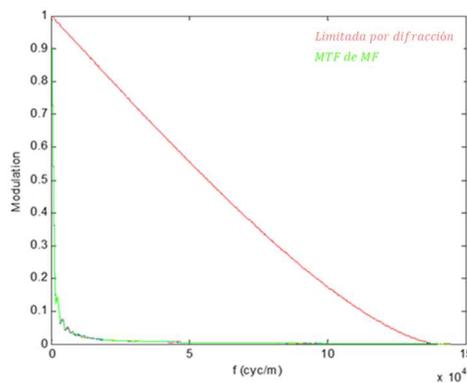


Figura 4.1: Comparación de *MTF* limitada por difracción y *MTF* de *MF*.

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

Al analizar las *MTFs* se puede observar que algunas de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi-Fourier muestran una mayor invariancia en todo el rango de frecuencia espacial que la máscara de fase cúbica y la trefoil. Sin embargo, también en algunas se observar que muestran oscilaciones en bajas frecuencias. Las máscaras de fase que presentan mayor invariancia y menor oscilaciones son $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8,9\lambda)$, $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 9,9,11\lambda)$, $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 10,10,23\lambda)$, $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 13,13,28\lambda)$, $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 9,9,28\lambda)$, las combinaciones $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda)$ y $M_{03}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda) + M_{01}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda)$, sugieren ser mejores candidatas para aplicaciones de desenfoque.

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

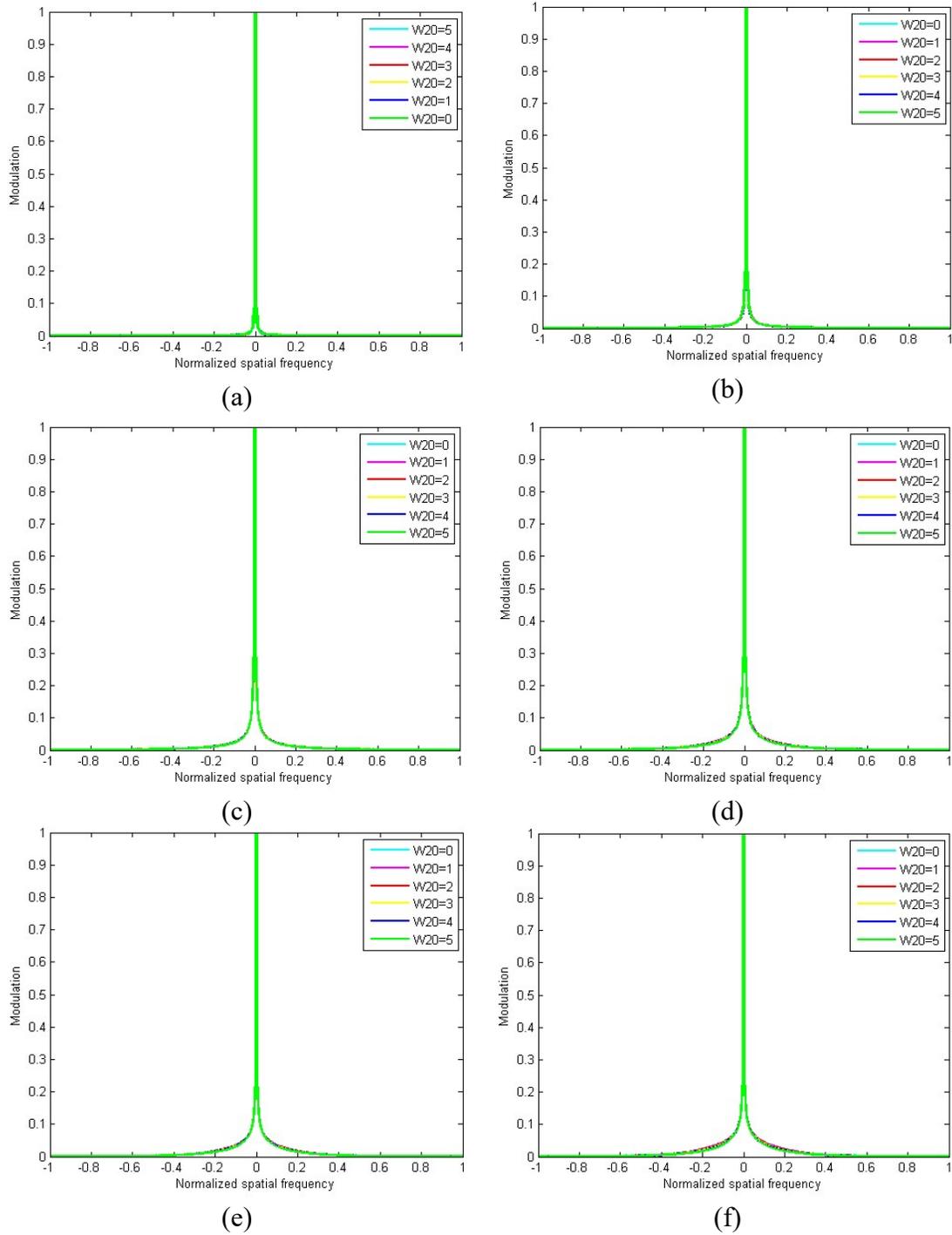


Figura 4.2: MTFs correspondientes a los diferentes parámetros de desenfoque. (a) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 6, 6, 13\lambda)$, (b) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 7, 7, 11\lambda)$, (c) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8, 8, 9\lambda)$, (d) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 9, 9, 11\lambda)$, (e) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 10, 10, 23\lambda)$, (f) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 11, 11, 29\lambda)$

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

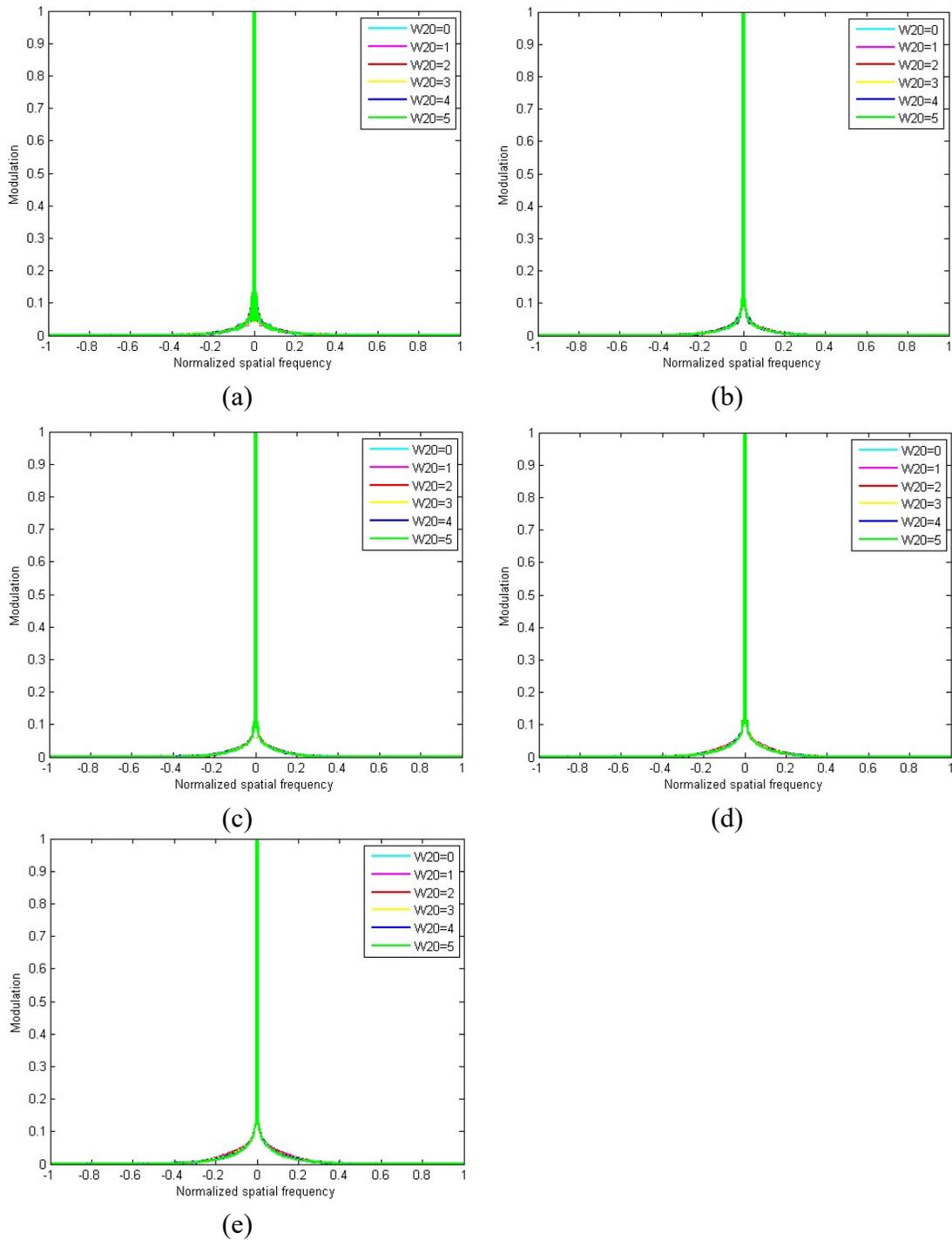


Figura 4.3: $MTFs$ correspondientes a los diferentes parámetros de desenfoque. (a) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 11, 11, 10\lambda)$,
 (b) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 12, 12, 18\lambda)$, (c) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 13, 13, 28\lambda)$, (d) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 14, 14, 28\lambda)$,
 (e) $M_{13}^{c+s}(r, \theta, 15, 15, 29\lambda)$

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

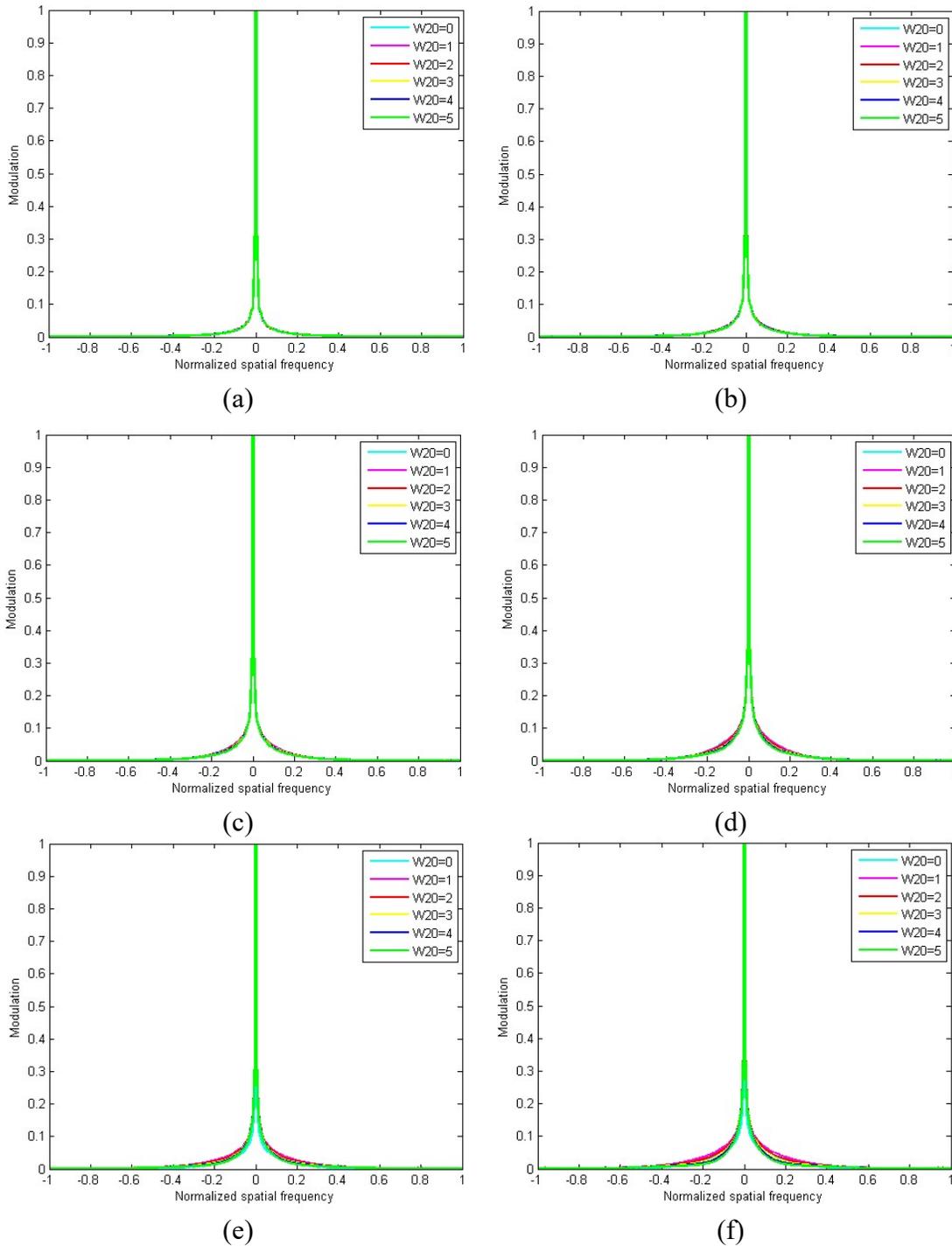


Figura 4.4: *MTFs* correspondientes a los diferentes parámetros de desenfoque. (a) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8, 8, 25\lambda)$, (b) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 9, 9, 28\lambda)$, (c) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 10, 10, 31\lambda)$, (d) $M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11, 11, 31\lambda)$, (e) $M_{01}^c(r, \theta, 10, 10, 31\lambda)$, (f) $M_{01}^c(r, \theta, 11, 11, 31\lambda)$

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

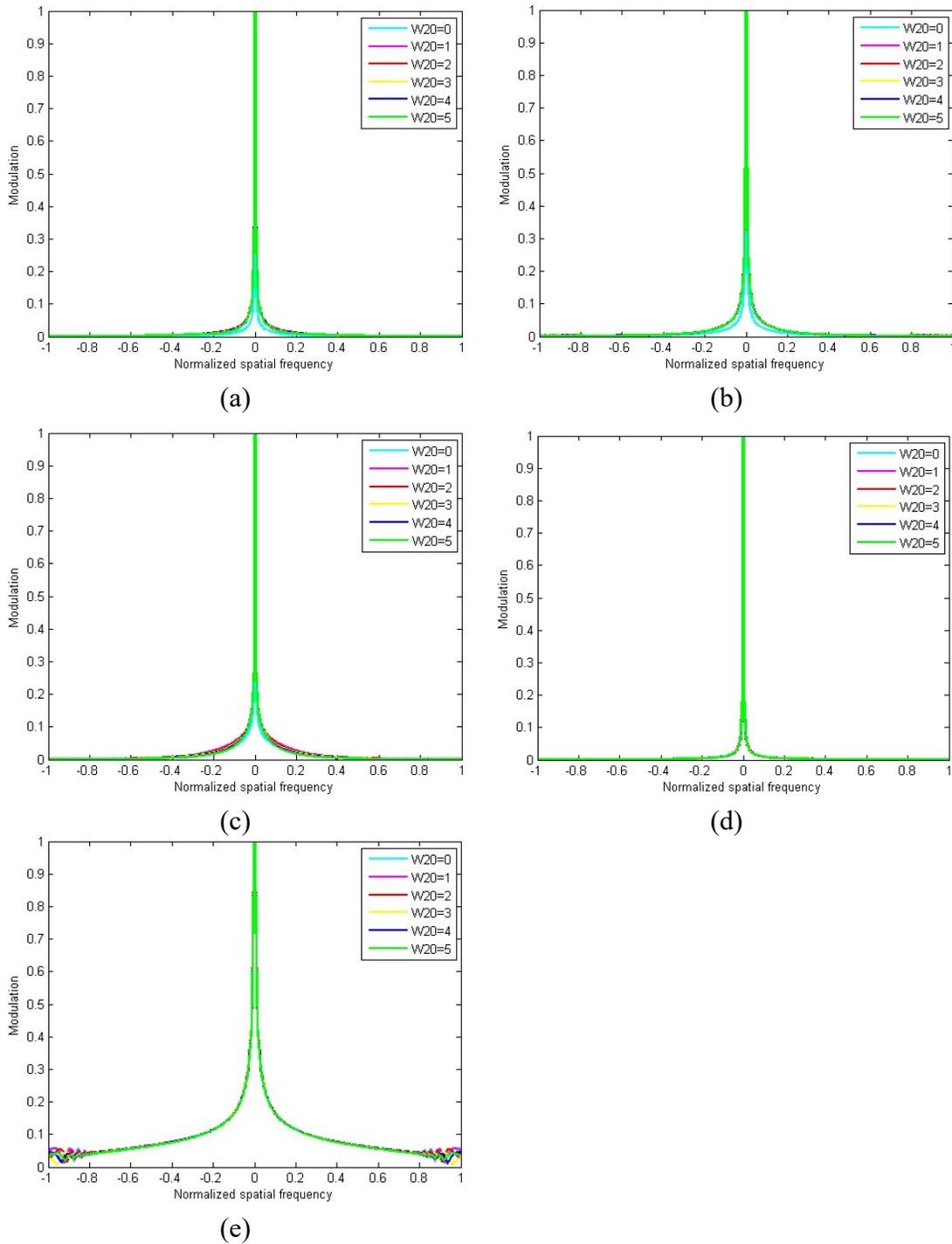


Figura 4.5: *MTFs* correspondientes a los diferentes parámetros de desenfoco. (a) $M_{03}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 8,8,14\lambda)$, (b) $M_{03}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda) + M_{01}^c(r, \theta, 8,8,11\lambda)$, (c) $M_{03}^c(r, \theta, 11,11,31\lambda) + M_{01}^{c+s}(r, \theta, 11,11,31\lambda)$, (d) trefoil, (e) cúbica

4.2 Algoritmo de simulación del sistema óptico-digital para la propuesta de máscaras de fase

La simulación hace uso de un objeto ideal O_i y la PSF del sistema óptico digital con máscara de fase, cuyas características fueron anteriormente descritas. Ambos son muestreados usando píxeles cuadrados de tamaño $dx = 0.688 \mu m$ con resolución igual a 1024×1024 píxeles. La convolución de estos dos elementos entrega la imagen I_i , la cual es referida como imagen codificada. En la Fig. 4.5 se observa esquemáticamente el procedimiento realizado digitalmente.

Para simular que la imagen codificada es capturada por un sensor CCD con píxeles cuadrados de tamaño $du = 5.5 \mu m$, se lleva a cabo un sub-muestreo IS_i , de la imagen I_i , por un factor de 8, quedando así una imagen de 128×128 píxeles.

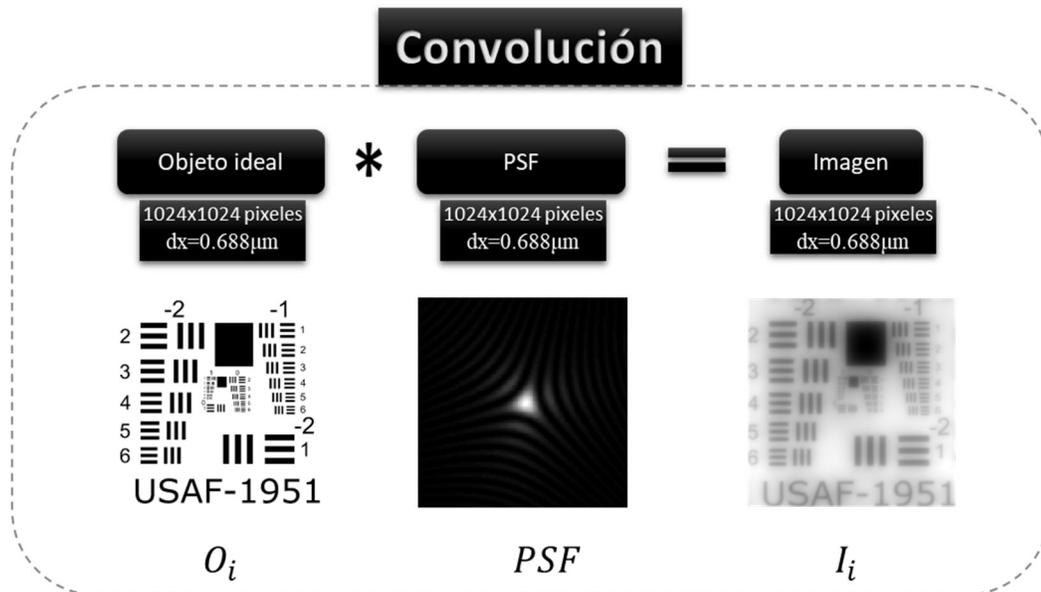


Figura 4.6: Codificación de la imagen

En este punto es posible agregar ruido, pues en el sensor de captura de imagen es donde generalmente se presenta algún tipo de ruido debido a deficiencias eléctricas o del

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

algún otro tipo [39]. El tipo de ruido η que se utiliza es del tipo Gaussiano. Se realiza la transformada de Fourier de la imagen sub-muestreada, de esta forma es posible cambiar al dominio de frecuencias espaciales. La Fig. 4.6 esquematiza el proceso.

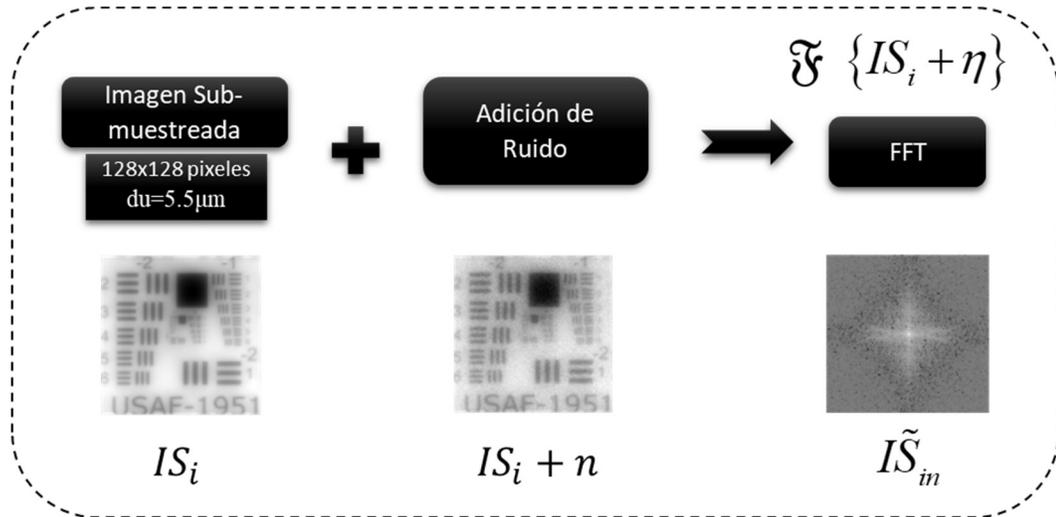


Figura 4.7: Grabación de la Imagen

A continuación, se lleva a cabo el proceso de decodificación o reconstrucción de la imagen codificada. Para ello en primer lugar es necesario realizar un relleno de ceros alrededor de la imagen del espectro de frecuencias $I\tilde{S}_{in}$, con el fin de llevarla nuevamente al tamaño original de 1024×1024 píxeles. Como se describió en capítulos anteriores, es posible realizar la decodificación de la imagen mediante el uso de un filtro de *Ecuación de Espectro*. Haciendo uso del espectro con relleno de ceros de la imagen codificada y la *TF* de la *PSF* con máscara de fase altamente muestreada y el parámetro K . Empleando la Transformada Inversa de Fourier es posible visualizar la imagen decodificada o recuperada OR_i . Sin embargo, de acuerdo a los cálculos la imagen tiene tamaño de 1024×1024 píxeles y no la del tamaño del sensor de grabado, además en ella aún se puede ver parte de ruido. No obstante, al usar un filtro pasa bajas *Butterworth*

Optimización de las Máscaras de Fase y Algoritmo de Simulación

B es posible reducir éste ruido en la imagen. La imagen recuperada IR_i , usando ambos filtros, se obtiene calculando la $\mathfrak{F}^{-1}\{I\tilde{B}_i\}$.

Finalmente se hace un sub-muestreo una vez más para visualizar una imagen IR_{Si} , que tiene el tamaño del sensor simulado. En la Fig. 4.7 se puede observar con detalle el proceso completo de reconstrucción.

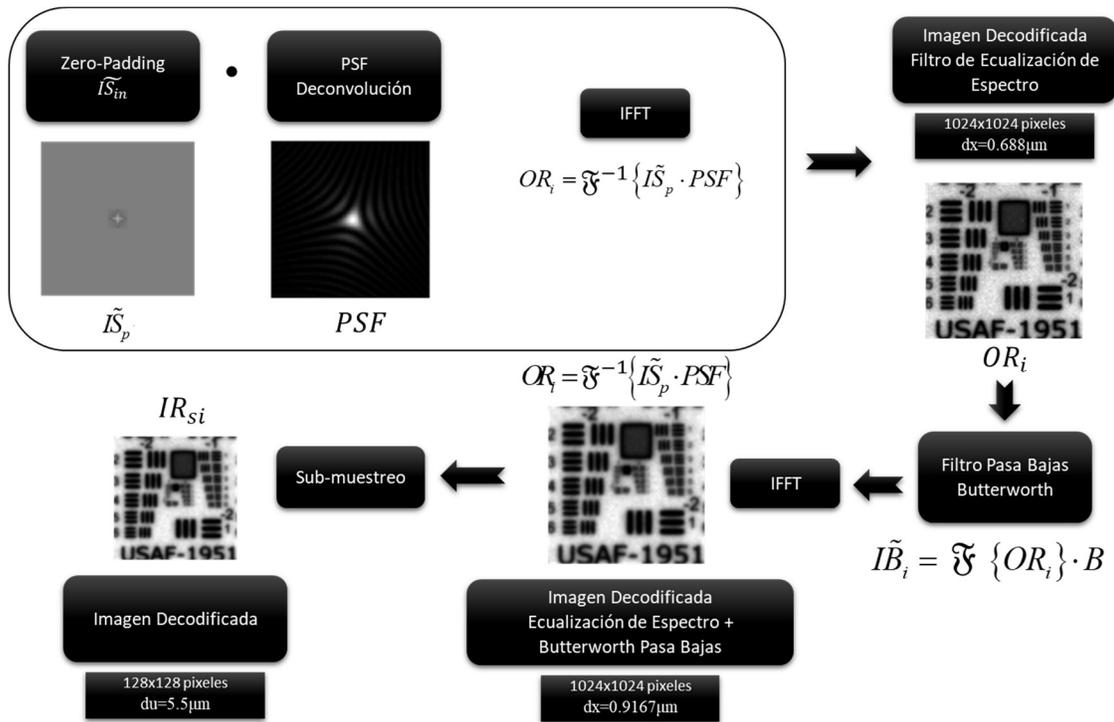


Figura 4.8: Reconstrucción de imagen

Se desarrollaron un conjunto de simulaciones con el fin de verificar el desempeño de las máscaras de fase propuestas y el algoritmo previamente descritos; esto en el contexto de imágenes digitales de prueba.

Capítulo 5

RESULTADOS NUMÉRICOS Y COMPARACIÓN EXPERIMENTAL

Con el propósito de evaluar el desempeño de las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi-Fourier propuestas, se llevaron a cabo múltiples simulaciones de sistemas *WFC*. Las fuerzas óptimas de las Máscaras de Fase se determinaron usando *AG* de la sección anterior. Los parámetros ópticos de la simulación son: diámetro de la pupila de salida, $D = 12 \text{ mm}$, $\lambda = 632 \text{ nm}$, $f = 25 \text{ mm}$. En este capítulo se muestran los resultados numéricos obtenidos a partir del sistema óptico-digital descrito, haciendo énfasis también en los parámetros de muestreo usados en cada uno de los procesos, los cuales se describen a continuación.

Para realizar la simulación de la imagen codificada capturada se estableció llevar a cabo dos tipos de sub-muestreo de la misma usando dos resoluciones diferentes. El primero, el descrito en el algoritmo, es decir, sub-muestreo *de* $128 \times 128 \text{ pixeles}$ con tamaño de pixel $du = 5.5 \mu\text{m}$. El segundo sub-muestreo se determinó con una resolución de $512 \times 512 \text{ pixeles}$ con tamaño de pixel $du = 1.38 \mu\text{m}$. Adicionalmente, se llevó a cabo una última simulación en la que no se realiza ningún sub-muestreo teniendo entonces la misma resolución que el objeto de entrada $1024 \times 1024 \text{ pixeles}$ y un tamaño de pixel $du = 0.688 \mu\text{m}$.

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

El contar con un sensor de imagen de buena calidad es fundamental para llevar a cabo la decodificación de imagen adecuadamente. Se llevó a cabo la simulación para dos casos, el primero, corresponde a imágenes decodificadas a partir de imágenes codificadas que no fueron afectadas por ruido *Gaussiano*, y el segundo corresponde a imágenes decodificadas en las que a las imágenes codificadas se les agrego ruido del tipo *Gaussiano*.

5.1 Resultados simulados de máscaras de fase con imagen de prueba sin ruido adicional.

La Tabla 5.1 muestra series de imágenes decodificadas IR_{Si} a partir de imágenes codificadas I_i con las máscaras de fase basadas en polinomios de Jacobi-Fourier propuestas. Se verifica que el sistema entrega resultados adecuados a pesar del parámetro de desenfoque $W_{20} = 3\lambda$ que se asigna al sistema WFC. Los resultados presentados en dicha tabla están libres de ruido adicional en la simulación.

Las imágenes decodificadas usando un sub-muestreo de 128×128 pixeles corresponden a la columna a) de la Tabla 5.1. Como se observa, los resultados son de baja calidad en comparación al resto. Además de que, difícilmente puede resolver todos los detalles de la imagen. El número de pixeles de 128×128 es demasiado pequeño comparado con la resolución del objeto de entrada como para poder resolver todas las líneas de la imagen de prueba, pues el grupo de líneas pequeñas de *USAF 1951* no es capaz de resolverse. En la mayoría de los casos los resultados obtenidos no presentan una alta calidad, sin embargo, los detalles de mayor tamaño en las imágenes recuperadas son resueltos adecuadamente. En algunas de las máscaras propuestas, específicamente a las familias M_{03} con $p = q = 8, \dots, 11$ las imágenes restauradas son de buena calidad, teniendo menos cantidad de artefactos, y mejor contraste en el fondo.

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

Centrando ahora el análisis en donde se lleva a cabo un sub-muestreo de 512×512 *pixeles*, correspondiente a la columna **b)** en la Tabla 5.1, se observa una mejora significativa en los resultados, pues los fondos poseen una mejor calidad en un mayor número de máscaras de fase propuestas y se puede resolver de mejor manera aquel grupo de líneas pequeñas de la imagen. Las máscaras de fase propuestas que comprenden desde M_{03} con $p = q = 6, \dots, 11$ son muy similares entre sí, como se vio en capítulos anteriores.

Sin embargo, al realizar el proceso de recuperación de las imágenes codificadas, con dichas máscaras, $M_{03}(r, \theta, 6, 6, \alpha)$ muestra un desempeño inferior en comparación con las demás. Se observa el fondo de la imagen restaurada de manera no uniforme y presenta ciertos artefactos, los cuales pueden estar relacionados con el tamaño del centro del polinomio, pues es la función de máscara de fase que presenta el menor tamaño en el centro.

Analizando los resultados obtenidos empleando las máscaras de fase desde M_{13} con $p = q = 11, \dots, 15$ en la misma Tabla, se observa que existe mayor similitud entre ellos. El contraste es aceptable en las imágenes y la presencia de artefactos no es tan severa. Sin embargo, en algunos casos, el grupo de líneas pequeñas no es capaz resolverse en comparación con las del grupo anterior.

En el caso de los resultados obtenidos a partir de imágenes codificadas con las máscaras de fase que comprenden M_{01} con $p = q = 8, \dots, 11$, donde además, dos de las funciones propuestas utilizan solamente la parte cosenoidal, es posible apreciar una cantidad marcada de artefactos a simple vista en las imágenes. Por lo tanto, se puede verificar el parecido que hay entre estos dos tipos de máscaras de fase. Visualizando las imágenes recuperadas cuando se hace un sub-muestreo de menor resolución como el caso de 128×128 *pixeles*, estos artefactos se aprecian aún más.

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

Las imágenes M_{01}^C con $p = q = 8, \dots, 11$, son similares a las descritas con anterioridad y se aprecia como los artefactos presentes cambian de dirección haciéndolos similares a la dirección de la *PSF*, sin embargo en el sub-muestreo de 512×512 *pixeles*, la presencia de artefactos ya no es tan evidente y se ven imágenes con una mejora en la calidad.

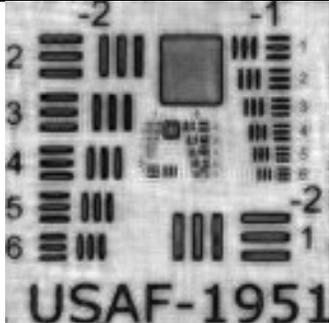
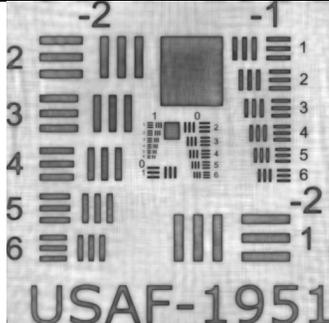
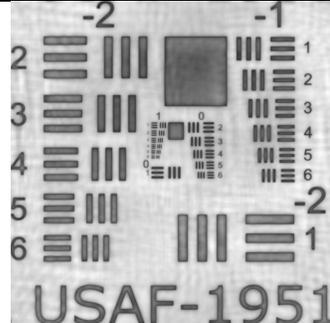
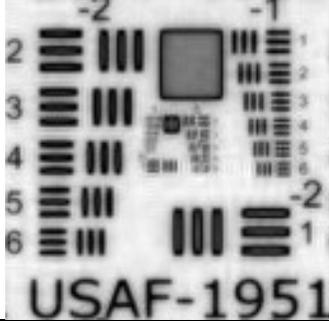
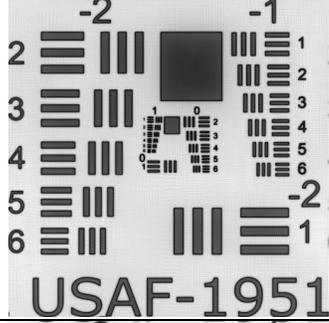
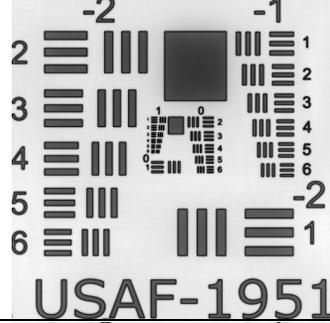
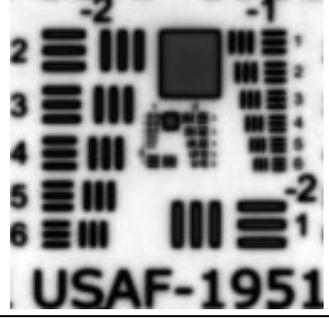
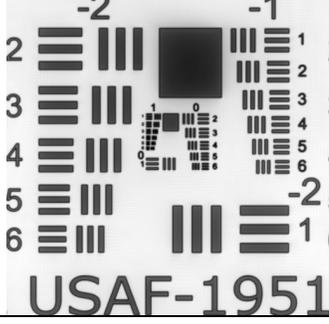
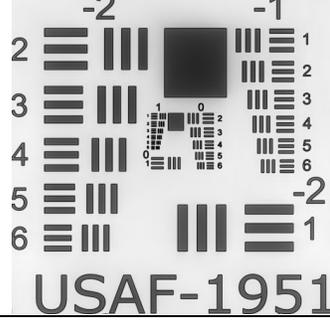
Las imágenes decodificadas correspondientes a $M_{03} + M_{01}$ y $M_{03}^C + M_{01}^C$ con valores $p = q = 8$ logran un mejor desempeño, pues éstas tienen una muy buena calidad, el fondo no presenta artefactos y son uniformes, además de que el valor del parámetro de desviación de fase que requieren no es tan alto. La imagen decodificada a partir de la codificación de imagen con $M_{03}^C + M_{01}$ con valores $p = q = 11$ presenta nuevamente artefactos, además el valor del parámetro de desviación de fase tiene un aumento significativo en comparación a otras máscaras propuestas.

Los resultados obtenidos a partir de las máscaras de fase típicas usadas en la literatura se simularon bajo las características del sistema óptico-digital anteriormente descritas. Como se observa, la única que presenta un desempeño adecuado es trefoil. La máscara de fase cúbica tiene un desempeño muy bajo al obtener la imagen decodificada, pues se nota muy fácilmente la presencia de artefactos.

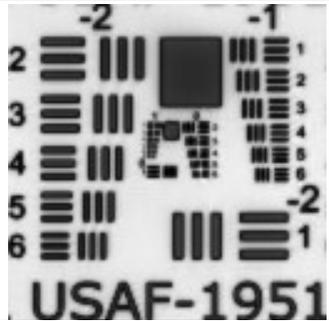
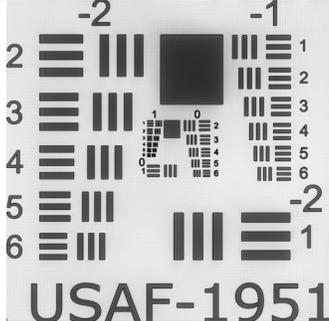
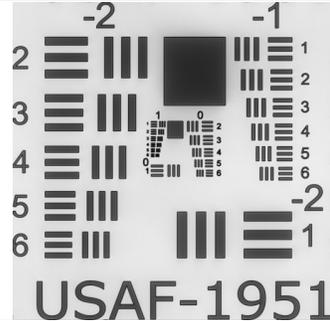
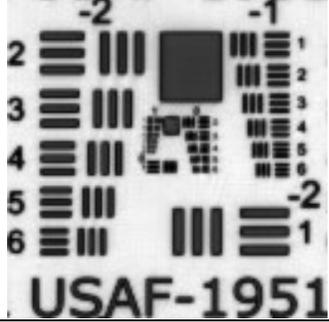
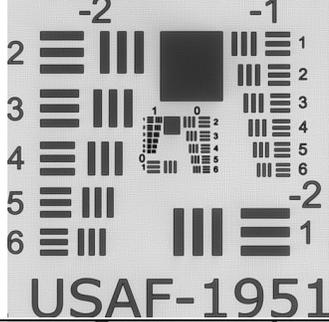
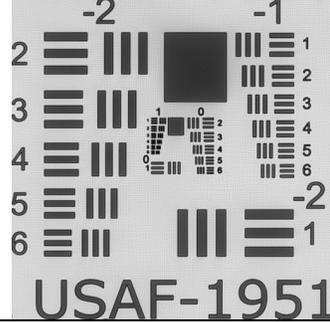
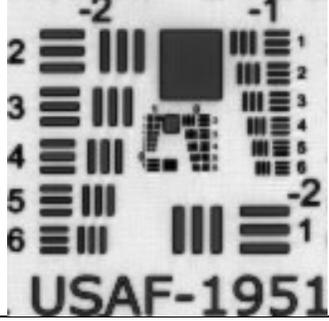
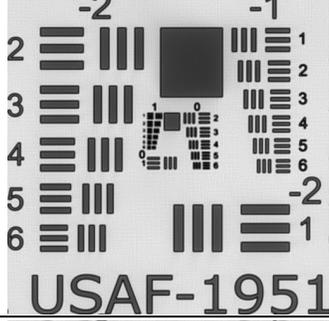
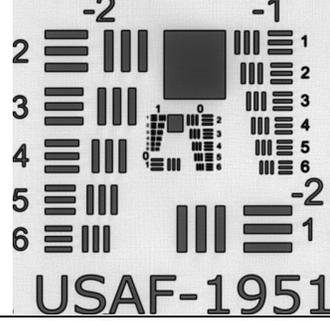
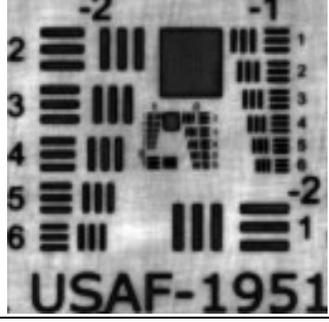
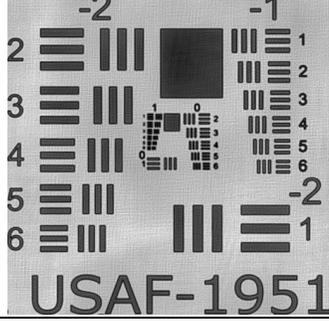
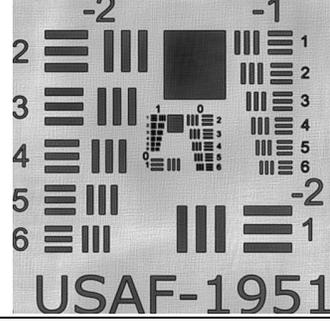
Se llevó a cabo la simulación del sistema sin emplear ningún sub-muestreo, por lo que la resolución fue equivalente a la del objeto de entrada, es decir, de 1024×1024 *pixeles*, con $du = 0.688 \mu m$. Además se puede apreciar en la columna c) de la Tabla 5.1, los resultados mantienen cierta similitud con los obtenidos con el sensor de 512×512 *pixeles*. La diferencia más significativa es que en algunos tipos de máscaras de fase propuestas, se resuelve una mayor cantidad de detalles, esto hace notar que entre mejor resolución se tenga en el sensor al momento de capturar la imagen codificada, el proceso de decodificación tendrá mejores resultados en contraste, y resolución en la imagen final.

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

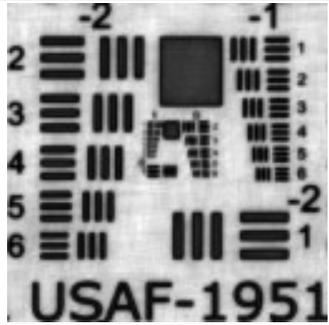
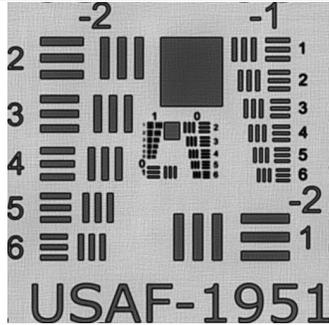
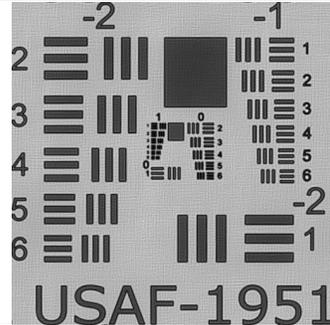
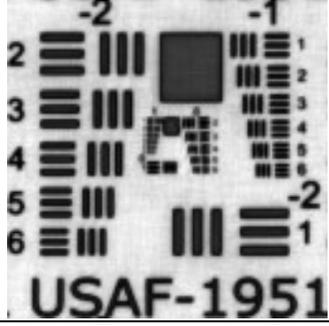
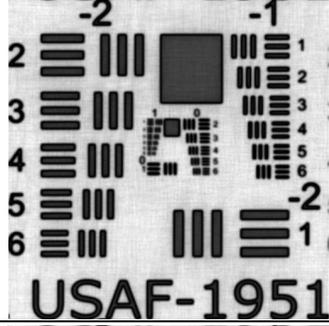
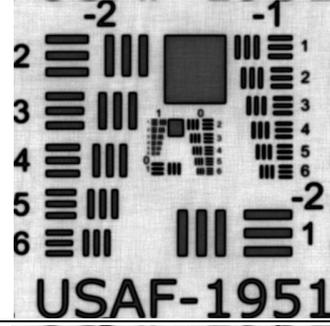
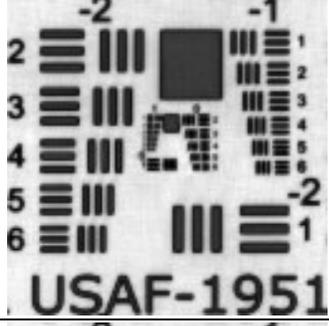
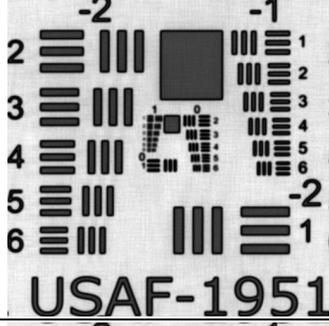
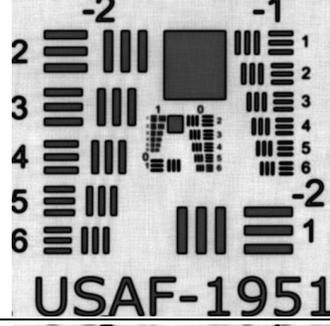
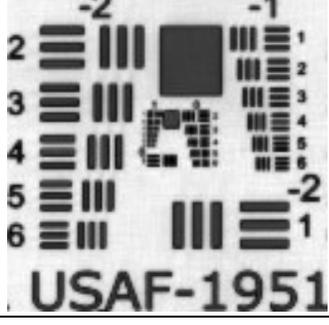
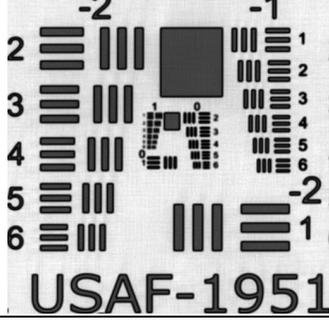
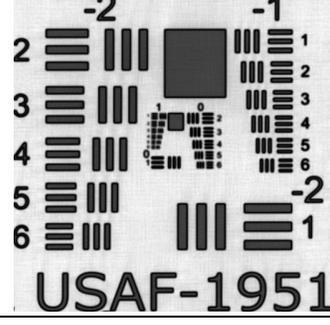
Tabla 5.1: Resultados numéricos obtenidos a partir de la simulación del algoritmo descrito, usando las MF propuestas. La simulación no se introduce ruido adicional.

MF	$d_u = 5.5 \mu m$ IR_{Si} 128x128 pixeles a)	$d_u = 1.38 \mu m$ IR_{Si} 512x512 pixeles b)	$d_u = 0.688 \mu m$ IR_{Si} 1024x1024 pixeles c)
$M_{03}(r, \theta, 6, 6, \alpha)$ $\alpha = 13\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 7, 7, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 9\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{03}(r, \theta, 9, 9, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 23\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 29\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 10\lambda$			

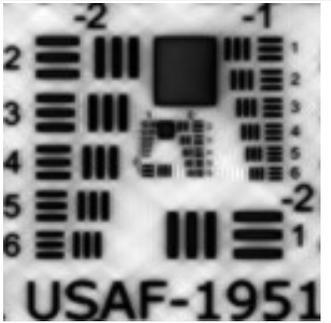
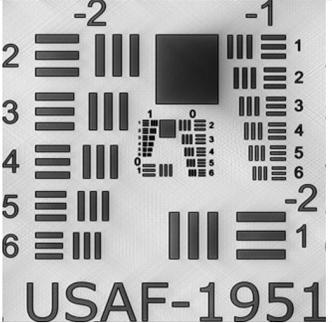
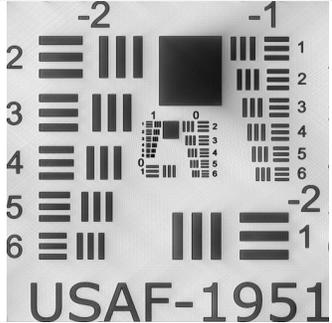
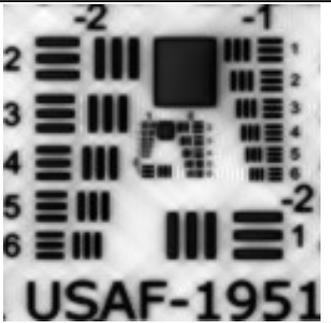
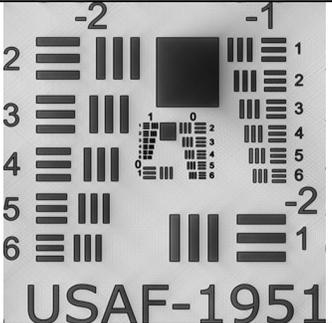
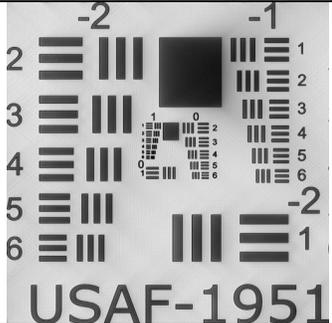
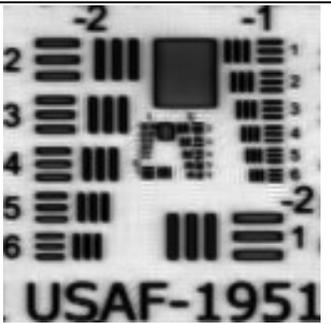
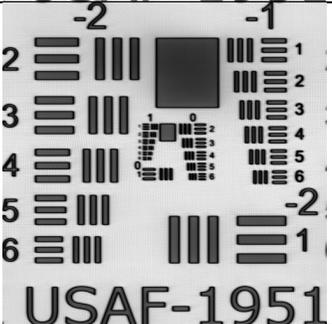
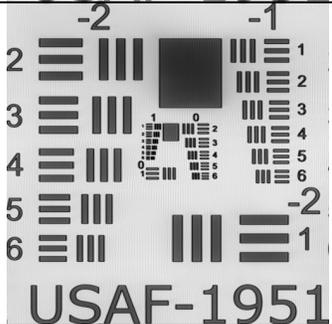
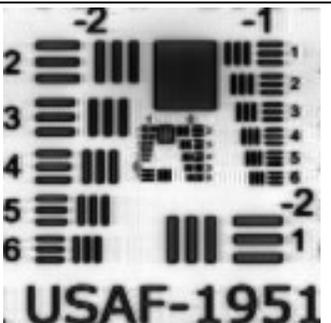
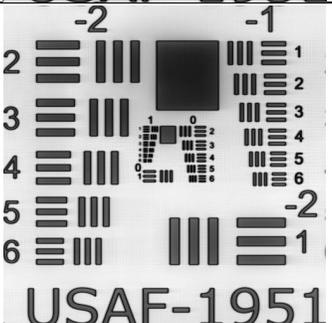
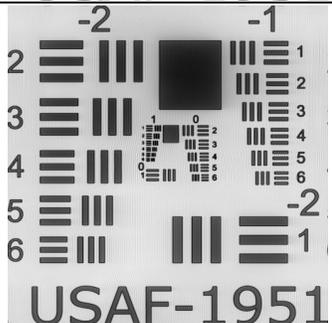
Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{13}(r, \theta, 12, 12, \alpha)$ $\alpha = 18\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 13, 13, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 14, 14, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 15, 15, \alpha)$ $\alpha = 29\lambda$			

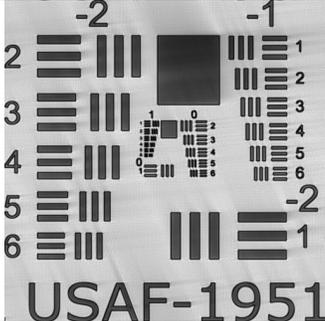
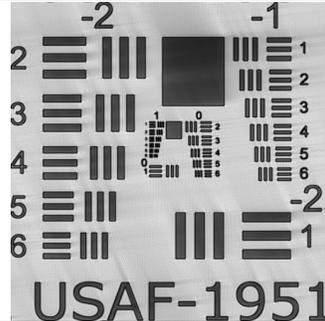
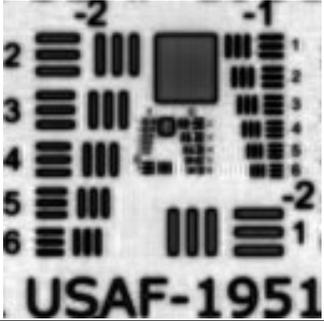
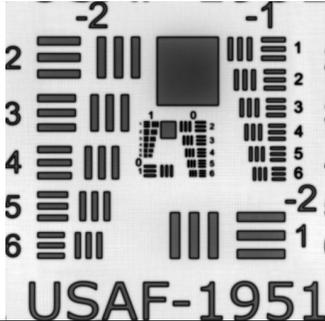
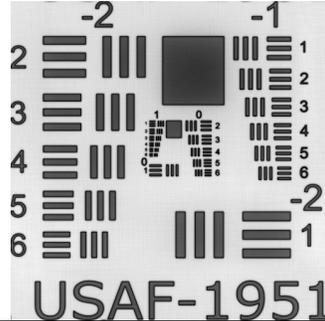
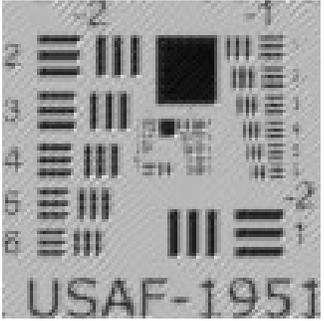
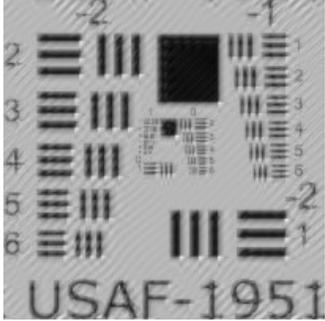
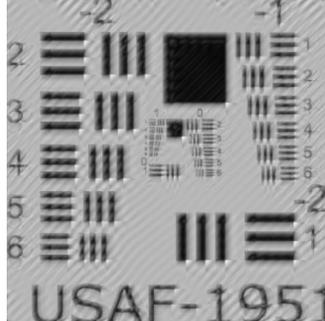
Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{01}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 25\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 9, 9, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{01}^C(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{01}^C(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $+ M_{01}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 14\lambda$			
$M_{03}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $+ M_{01}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{03}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $+ M_{01}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
<i>Trefoil</i> $\alpha = 12\lambda$			
<i>Cubic-phase</i> $\alpha = 15\lambda$			

5.2 Resultados simulados de máscaras de fase con imagen de prueba con ruido Gaussiano

El segundo análisis de resultados corresponde al caso en el que se agregó ruido del tipo Gaussiano usando las mismas resoluciones en el sub-muestreo, los resultados se muestran en la Tabla 5.2.

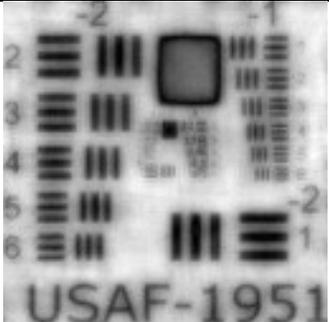
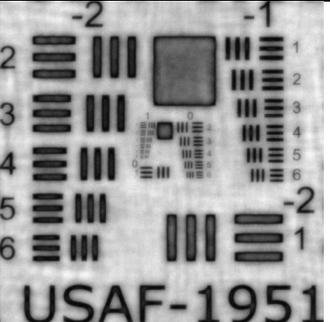
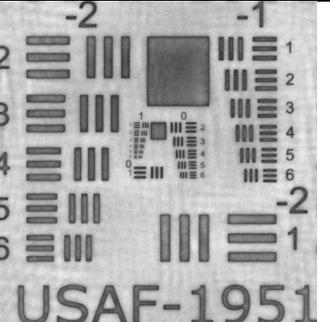
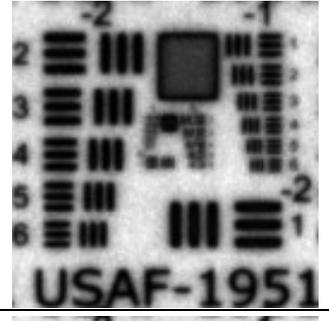
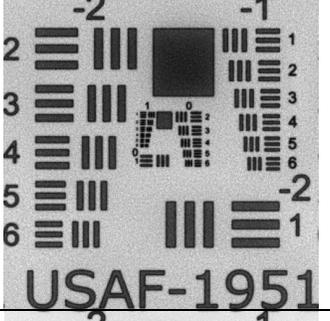
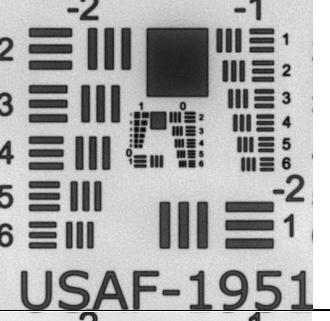
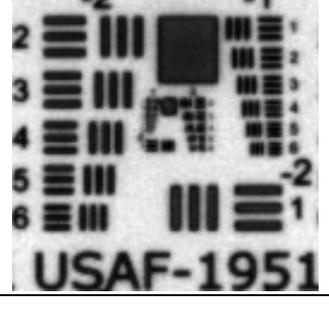
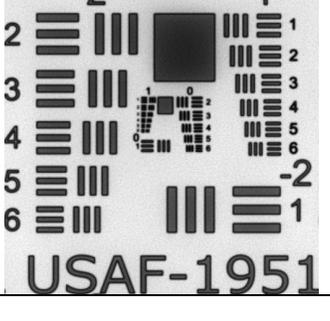
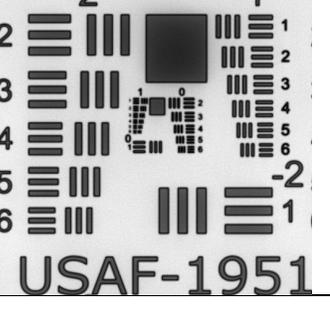
Realizando la simulación de captura de imagen codificada usando el sensor de 128×128 *pixeles* las imágenes decodificadas están muy por debajo de un buen resultado. Como se vio anteriormente, el hecho de usar una baja resolución complica la visualización de los detalles asociados a las altas frecuencias. Cuando la imagen se ve afectada por ruido entonces el resultado es aún peor.

En todos los casos mostrado en la columna **a)** de la Tabla 5.2., se tienen pocos detalles de la imagen, presencia de ruido a simple vista y en algunos casos de artefactos.

Las imágenes decodificadas, a partir del sub-muestreo de la imagen codificada simulando usar un sensor de 512×512 *pixeles*, correspondientes a la columna **b)** en la Tabla 5.2., son similares a las decodificadas de igual forma en la Tabla 5.1 columna **b)**. Existe un punto en el cual se diferencian significativamente. Esto es, la presencia de ruido. Gracias al uso del filtro Butterworth pasa bajas, éste se logra reducir y aunque se tiene una mejora respecto a la reducción de ruido, en la mayoría de los casos sigue siendo evidente. Puesto que no se puede eliminar del todo, ya que cuanto más se reduce la frecuencia de corte del filtro, adicionalmente a la reducción de ruido se eliminan frecuencias altas propias de la imagen, haciendo entonces que se pierdan detalles de la imagen final.

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

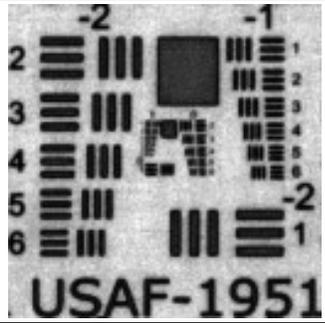
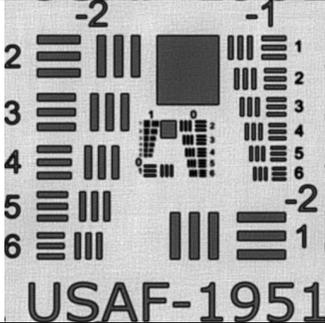
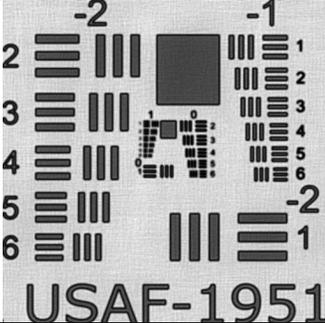
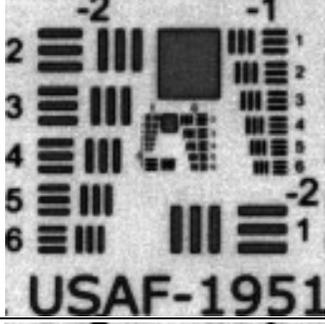
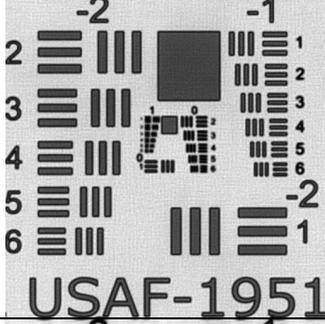
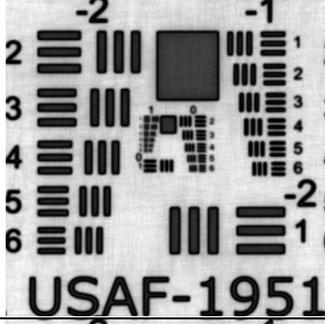
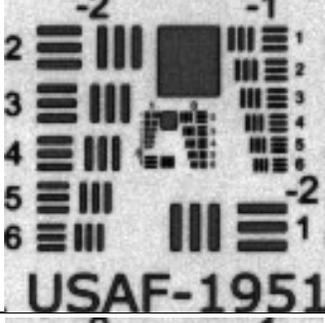
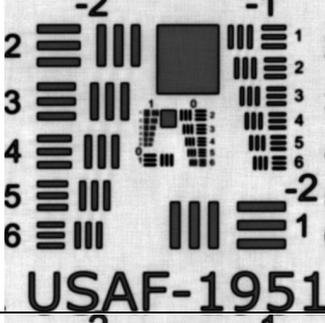
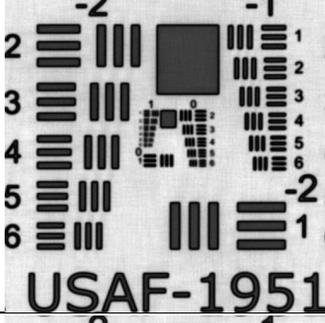
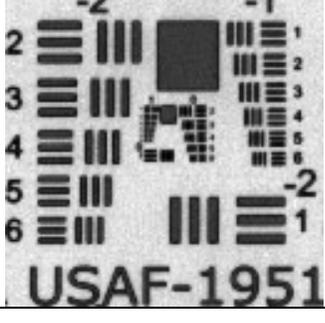
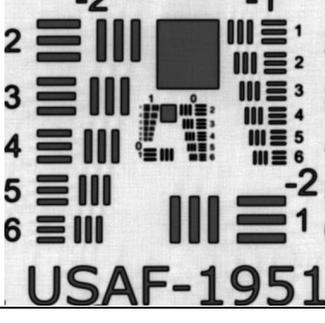
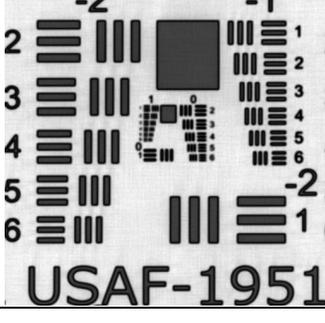
Tabla 5.2: Resultados numéricos obtenidos a partir de la simulación del algoritmo descrito, usando las MF propuestas. La simulación introduce ruido adicional del tipo Gaussiano.

MF	$d_u = 5.5 \mu m$ IR_{si} $M = 1e^{-3} \quad \sigma = 1e^{-6}$ 128x128 pixeles a)	$d_u = 1.38 \mu m$ IR_{si} $M = 1e^{-3} \quad \sigma = 100e^{-9}$ 512x512 pixeles b)	$d_u = 0.688 \mu m$ IR_{si} $M = 1e^{-3} \quad \sigma = 100e^{-9}$ 1024x1024 pixeles c)
$M_{03}(r, \theta, 6, 6, \alpha)$ $\alpha = 13\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 7, 7, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 9\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{03}(r, \theta, 9, 9, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 23\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 29\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 10\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{13}(r, \theta, 12, 12, \alpha)$ $\alpha = 18\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 13, 13, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 14, 14, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{13}(r, \theta, 15, 15, \alpha)$ $\alpha = 29\lambda$			

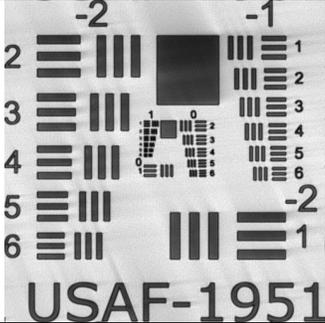
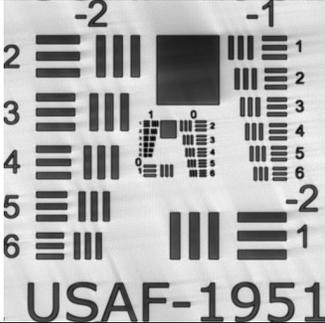
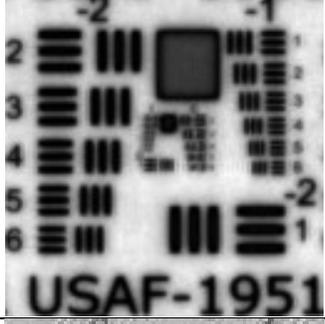
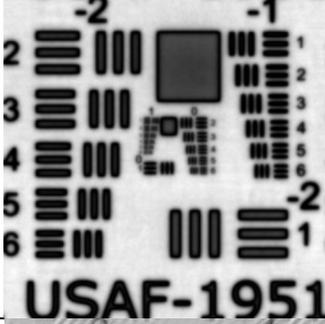
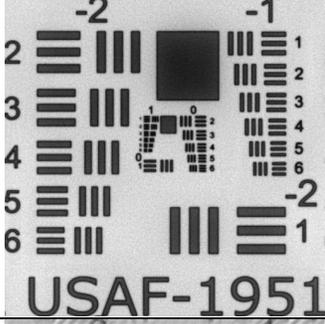
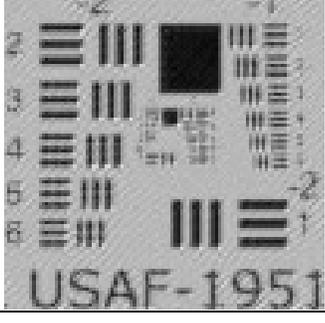
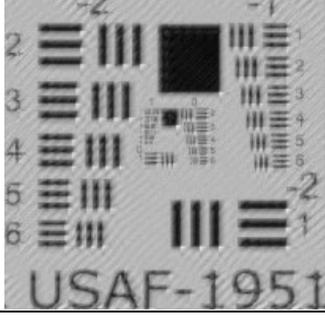
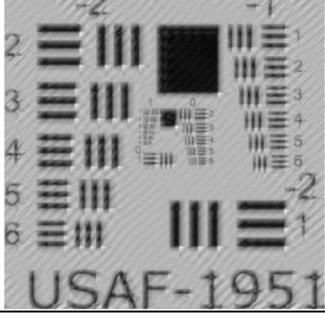
Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{01}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 25\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 9, 9, \alpha)$ $\alpha = 28\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{01}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{01}^C(r, \theta, 10, 10, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{01}^C(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
$M_{03}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $+ M_{01}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 14\lambda$			
$M_{03}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $+ M_{01}^C(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

$M_{03}^C(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $+ M_{01}(r, \theta, 11, 11, \alpha)$ $\alpha = 31\lambda$			
<i>Trefoil</i> $\alpha = 12\lambda$			
<i>Cubic-phase</i> $\alpha = 15\lambda$			

5.3 Comparación de Resultados Numéricos y Experimentales

Adicionalmente se llevó a cabo una última simulación. Para un diámetro de pupila de salida $D = 12 \text{ mm}$, el número de pixeles cuadrados que conforman este diámetro está dado por :

$$Dpx = \frac{D}{m_0}, \quad (5.1)$$

donde m_0 es el tamaño de pixel en micras,

$$m_0 = \frac{\lambda f}{N dx}, \quad (5.2)$$

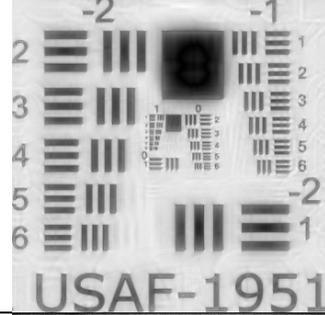
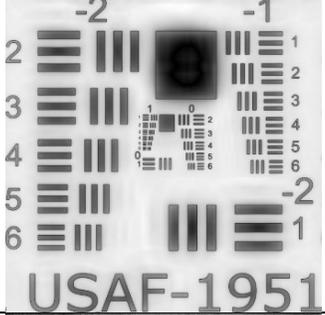
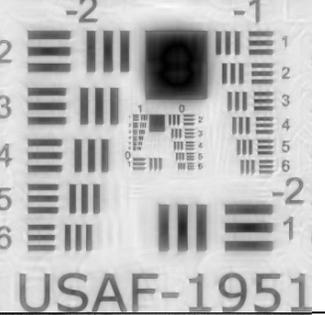
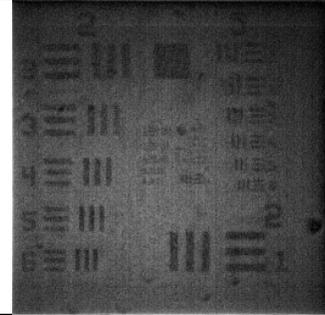
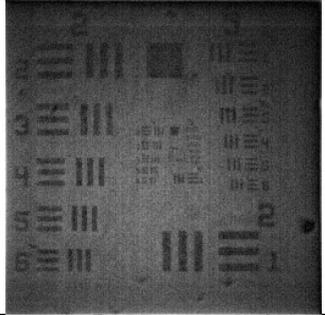
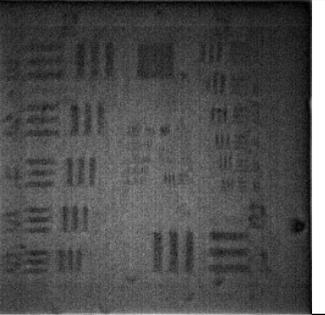
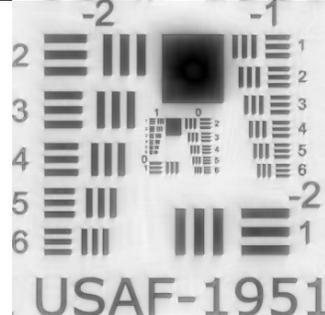
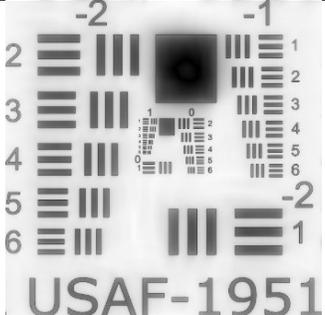
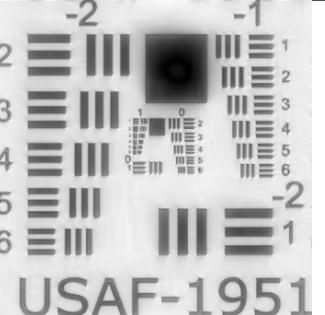
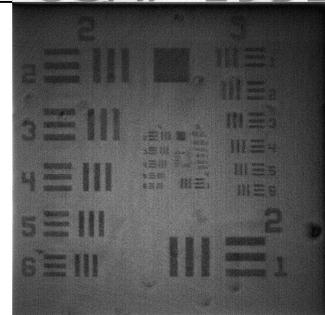
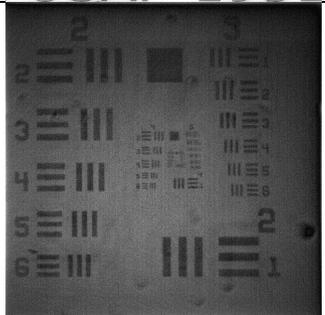
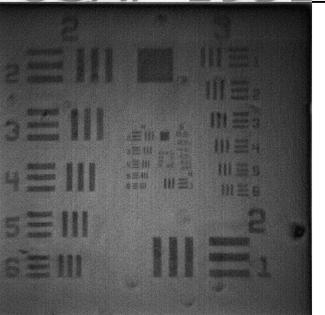
N es el número total de pixeles del arreglo en la pupila. De esta forma, asumiendo el caso en que, $N \times N = 3672 \times 3672 \text{ pixeles}$ y $dx = 0.9167 \mu\text{m}$ se tiene que el valor de $m_0 = 4.69 \mu\text{m}$. Por lo que, el número de pixeles del diámetro de la pupila de salida es $Dpx = 12 \times 10^{-3} \text{m} / 4.69 \times 10^{-6} \text{m} = 2556$.

La simulación hace uso del objeto ideal O_i y la PSF del sistema con las características anteriormente descritas. Tanto O_i como la PSF son muestreados usando pixeles cuadrados de tamaño $dx = 0.9167 \mu\text{m}$. El proceso se realiza de la misma manera que en la sección 4.2. Así, la imagen IS_i es obtenida por el submuestreo de I_i por un factor de 6, resultando en $612 \times 612 \text{ pixeles}$ de resolución.

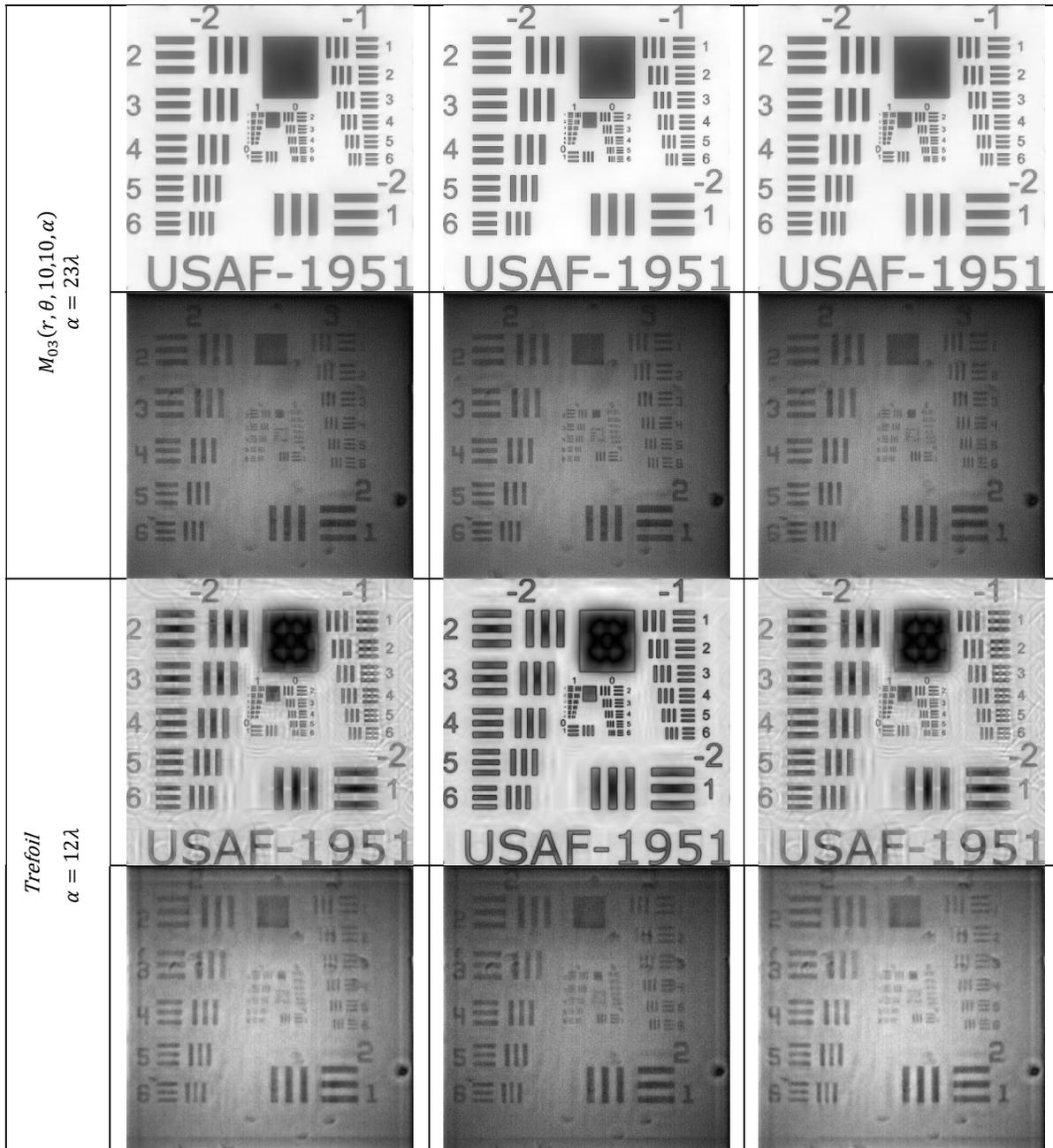
En la Tabla 5.3 se observan la comparación de resultados obtenidos numéricamente y experimentalmente de las imágenes decodificadas usando el algoritmo de deconvolución de ecualización de espectro. De acuerdo a los resultados obtenidos, es posible resolver hasta 28.51 pl/mm , a pesar del desenfoque W_{20} inducido en el sistema

Resultados de Simulación y Comparación Experimental

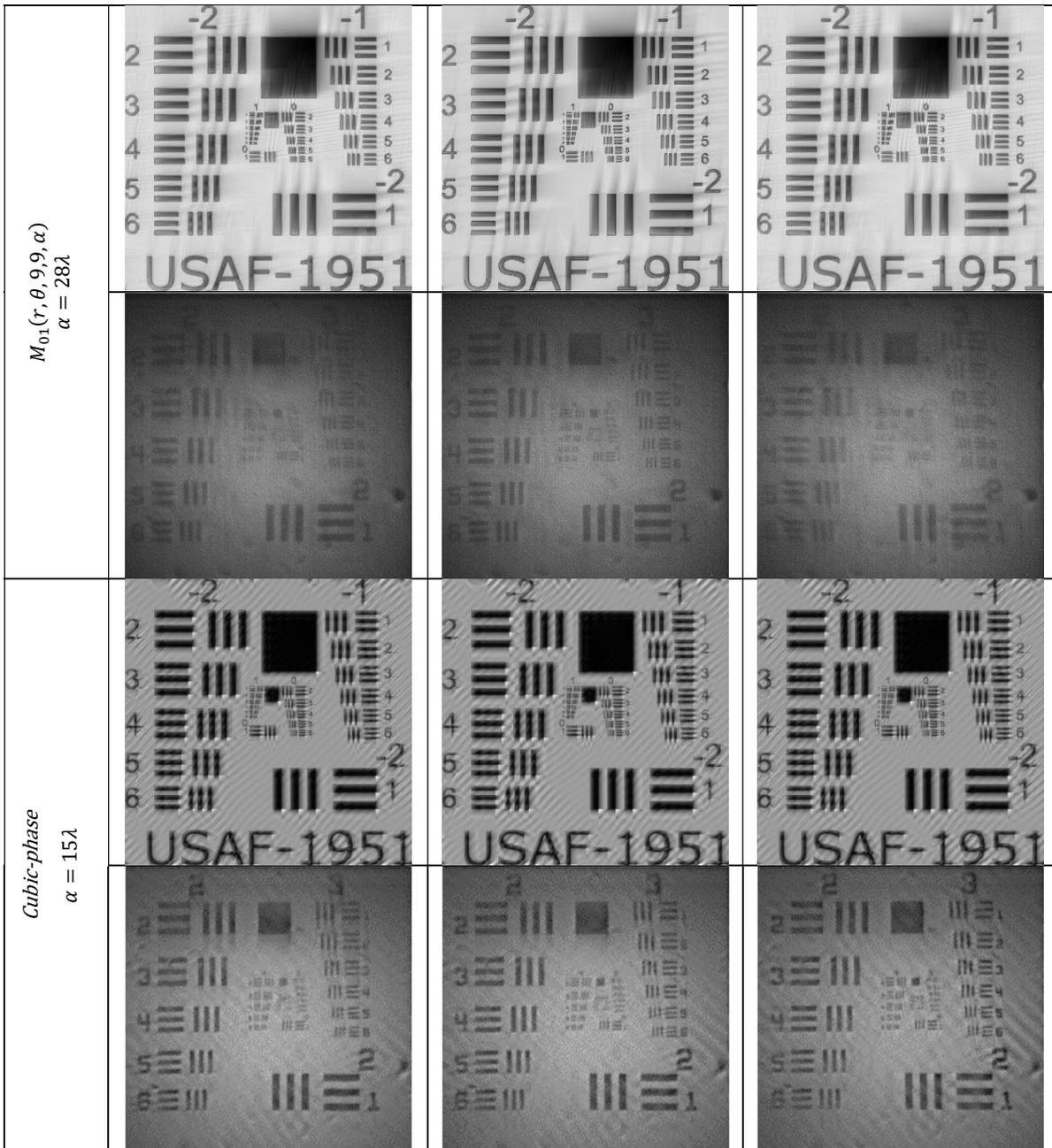
Tabla 5.3: Comparación de resultados numéricos y experimentales usando las *MF* basadas en *PJF*.

MF	-2λ	0λ	-2λ
$M_{03}(r, \theta, 8, 8, \alpha)$ $\alpha = 9\lambda$			
			
$M_{03}(r, \theta, 9, 9, \alpha)$ $\alpha = 11\lambda$			
			

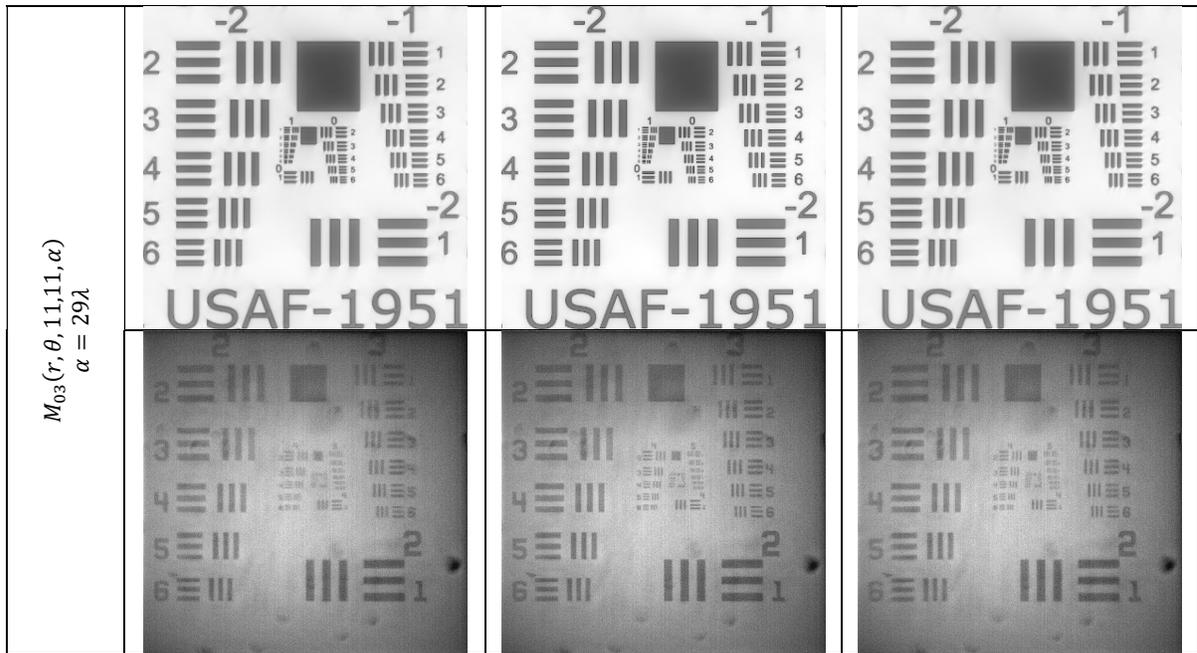
Resultados de Simulación y Comparación Experimental



Resultados de Simulación y Comparación Experimental



Resultados de Simulación y Comparación Experimental



Capítulo 6

CONCLUSIONES:

Este capítulo presenta las conclusiones del trabajo de tesis. Se llevó a cabo un análisis teórico de los polinomios de Jacobi Fourier y su empleo como máscara de fase dentro de un sistema de Codificación de Frente de Onda. De igual manera se realizaron simulaciones numéricas con el fin de mostrar el desempeño de las máscaras respecto a las máscaras de fase tradicionales en la literatura.

- Los resultados simulados numéricamente mediante el uso de máscara de fase trefoil como elemento codificador muestra un desempeño adecuado. Sin embargo, existen artefactos al momento de llevar a cabo la restauración de la imagen. Además de que el desempeño de la misma es inferior a las máscaras propuestas.
- Los resultados simulados numéricamente empleando la máscara de fase cúbica muestra una deficiencia en la recuperación de la imagen, debido a que la presencia de artefactos es evidente. Sobre todo, las líneas diagonales que se ven en dichas restauraciones.
- Se llevó a cabo la propuesta de 20 máscaras de fase basadas en polinomios circulares ortogonales de Jacobi-Fourier usando sólo un parámetro de desviación de fase para cada una de ellas. Las cuales mostraron un desempeño superior en comparación a las máscaras de fase tradicionales, ya que la

Conclusiones

cantidad de artefactos que muestran es mínima o nula en comparación a otras máscaras de fase.

- La optimización del parámetro de desviación de fase se realizó mediante el empleo de Algoritmos Genéticos, dicha optimización tiene un buen desempeño ya que los parámetros encontrados permiten llevar a cabo la codificación y mediante las gráficas de las *MTFs* es posible observar la invariancia que tienen las curvas aún con desenfoque.
- Se verificó el desempeño de algunas de las máscaras de fase experimentalmente, y se compararon con las otras dos máscaras de fase típicas. Los resultados muestran que las máscaras de fase propuestas empleando polinomios de Jacobi-Fourier tienen una eficiencia más alta, con un buen contraste y mínima cantidad de artefactos sobre todo en aquellas máscaras de fase con orden radial $n = 0$ y orden angular $m = 3$, de las familias propuestas.
- Se puede observar que las máscaras de fase propuestas guardan cierta relación con las máscaras de fase cúbica y trefoil, pues, las máscaras con orden radial $n = 0$ y orden angular $m = 3$, son muy cercanas o familiares a las trefoil en forma y *PSF*. Mientras que, las máscaras con orden radial $n = 0$ y orden angular $m = 1$ son más similares en forma y desempeño a la de fase cúbica, debido a que al momento de llevar a cabo la decodificación de la imagen, se observa la presencia de artefactos similar a la anterior.

Bibliografía

1. Ojeda-Castañeda, J., Andres, P., & Diaz, A. (1986). Annular apodizers for low sensitivity to defocus and to spherical aberration. *Optics Letters*, 11(8), 487-489.
2. Ojeda-Castañeda, J., Ramos, R., & Noyola-Isgleas, A. (1988). High focal depth by apodization and digital restoration. *Applied optics*, 27(12), 2583-2586.
3. Dowski, E. R., & Cathey, W. T. (1995). Extended depth of field through wave-front coding. *Applied optics*, 34(11), 1859-1866.
4. Ojeda-Castaneda, J., Berriel-Valdos, L. R., & Montes, E. (1985). Spatial filter for increasing the depth of focus. *Optics letters*, 10(11), 520-522.
5. Bagheri, S., Silveira, P. E., & de Farias, D. P. (2008). Analytical optimal solution of the extension of the depth of field using cubic-phase wavefront coding. Part I. Reduced-complexity approximate representation of the modulation transfer function. *JOSA A*, 25(5), 1051-1063.
6. Porter, J., Queener, H., Lin, J., Thorn, K., & Awwal, A. A. (2006). *Adaptive optics for vision science: principles, practices, design and applications* (Vol. 171). John Wiley & Sons.
7. Fernández, E. J., Iglesias, I., & Artal, P. (2001). Closed-loop adaptive optics in the human eye. *Optics letters*, 26(10), 746-748.
8. Nourrit, V., Vohnsen, B., & Artal, P. (2005). Blind deconvolution for high-resolution confocal scanning laser ophthalmoscopy Part of the II EOS Topical Meeting on Physiological Optics (Granada, Spain, September 2004). *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 7(10), 585.

Bibliografia

9. Hong, D., Park, K., Cho, H., & Kim, M. (2007). Flexible depth-of-field imaging system using a spatial light modulator. *Applied optics*, 46(36), 8591-8599.
10. Ferran, C., Bosch, S., & Carnicer, A. (2012). Design of optical systems with extended depth of field: An educational approach to wavefront coding techniques. *IEEE Transactions on Education*, 55(2), 271-278.
11. Zhao, H., & Li, Y. (2010). Optimized sinusoidal phase mask to extend the depth of field of an incoherent imaging system. *Optics letters*, 35(2), 267-269.
12. Zhao, H., & Li, Y. (2012). Analytical and experimental demonstration of depth of field extension for incoherent imaging system with a standard sinusoidal phase mask. *Chinese Optics Letters*, 10(3), 031101.
13. Yang, Q., Liu, L., & Sun, J. (2007). Optimized phase pupil masks for extended depth of field. *Optics Communications*, 272(1), 56-66.
14. Chen, S., & Fan, Z. (2014). Optimized asymmetrical tangent phase mask to obtain defocus invariant modulation transfer function in incoherent imaging systems. *Optics letters*, 39(7), 2171-2174.
15. Zhao, H., & Li, Y. (2010). Performance of an improved logarithmic phase mask with optimized parameters in a wavefront-coding system. *Applied optics*, 49(2), 229-238.
16. Zhao, H., & Li, Y. (2010). Optimized logarithmic phase masks used to generate defocus invariant modulation transfer function for wavefront coding system. *Optics letters*, 35(15), 2630-2632.
17. Zhou, F., Li, G., Zhang, H., & Wang, D. (2009). Rational phase mask to extend the depth of field in optical-digital hybrid imaging systems. *Optics letters*, 34(3), 380-382.

Bibliografía

18. Fan, Z., Minh, N. P., & Chen, S. (2015). Optimized square-root phase mask to generate defocus-invariant modulation transfer function in hybrid imaging systems. *Optical Engineering*, 54(3), 035103-035103.
19. Arines, J., Almaguer, C., Toxqui, C. & Acosta, E. (2014, August). Retinal Imaging with Wavefront Coding, 23rd ICO conference, Santiago de Compostela, ES.
20. Prasad, S., Torgersen, T., Pauca, V. P., & Plemmons, R. (2002, September). Integrated optics systems for image quality control. In Proc. 2002 AMOS Technical Conference, Maui, HI, Sep 2002.
21. Acosta, E. (2011). Adaptive phase plates for optical encoding systems invariant to second-order aberrations. *Optics Communications*, 284(16), 3862-3866.
22. Palillero-Sandoval, O., Aguilar, J. F., & Berriel-Valdos, L. R. (2014). Phase mask coded with the superposition of four Zernike polynomials for extending the depth of field in an imaging system. *Applied optics*, 53(18), 4033-4038.
23. Acosta, E., & Arines, J. (2012). Optical-digital System Invariant to eye aberrations for retinal imaging. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 53(14), 3098-3098.
24. Arnison, M. R., Cogswell, C. J., Sheppard, C. J., & Török, P. (2003). Wavefront coding fluorescence microscopy using high aperture lenses. In *Optical Imaging and Microscopy* (pp. 143-165). Springer Berlin Heidelberg.
25. Arines, J., Hernandez, R. O., Sinzinger, S., Grewe, A., & Acosta, E. (2014). Wavefront-coding technique for inexpensive and robust retinal imaging. *Optics letters*, 39(13), 3986-3988.
26. Hecht, E. (2002). *Optics*, 4th. International edition, Addison-Wesley, San Francisco.
27. Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers.

Bibliografía

28. Voelz, D. G. (2011). *Computational fourier optics: a MATLAB tutorial*. Bellingham, WA: SPIE press.
29. Dowski, E. R., & Johnson, G. E. (1999, October). Wavefront coding: A modern method of achieving high performance and/or low cost imaging systems. In *Proc. SPIE* (Vol. 3779, No. 137, pp. 137-145).
30. Cathey, W. T., & Dowski, E. R. (2002). New paradigm for imaging systems. *Applied optics*, 41(29), 6080-6092.
31. Gonzalez, R. C., & Woods, R. (2007). *Digital Image Processing*. 3rd edition. Prentice Hall., pp. 696-701.
32. Muyo, G., Singh, A., Andersson, M., Huckridge, D., Wood, A., & Harvey, A. R. (2009). Infrared imaging with a wavefront-coded singlet lens. *Optics express*, 17(23), 21118-21123.
33. Flusser, J., Zitova, B., and Suk, T. (2009) *Moments and moments invariants in pattern recognition*. John Wiley & Sons.
34. Bhatia, A. B. & Wolf, E. (1954). On the circular polynomials of Zernike and related orthogonal sets. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 50, 40–48.
35. Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., & Báez-Rojas, J. J. (2014). High-precision and fast computation of Jacobi–Fourier moments for image description. *JOSA A*, 31(1), 124-134.
36. Sheng, Y., & Shen, L. (1994). Orthogonal Fourier–Mellin moments for invariant pattern recognition. *JOSA A*, 11(6), 1748-1757.
37. Hopkins, H. H. (1955, July). The frequency response of a defocused optical system. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 231, No. 1184, pp. 91-103). The Royal Society.

Bibliografía

38. Cruz, P. P., & Herrera, A. (2011). *Inteligencia artificial con aplicaciones a la ingeniería*. Marcombo.
39. Scrymgeour, D., Boye, R., & Adelsberger, K. (2015). *Advanced Imaging Optics Utilizing Wavefront Coding* (No. SAND2015--4431). Sandia National Laboratories (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).