

U

P

T

Momentos ortogonales genéricos de orden fraccional en pixeles polares

por

Horlando Vargas Vargas

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**MAESTRO EN
COMPUTACIÓN ÓPTICA**

en la

Universidad Politécnica de Tulancingo

Octubre 2018

Tulancingo de Bravo, Hidalgo

Supervisada por:

Dr. César Joel Camacho Bello

©UPT

El autor otorga a la UPT el permiso de reproducir y
distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.



Dedicatoria

A mi esposa por su apoyo brindado durante este trabajo de tesis y a mi hijo que es mi gran motivación.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo para realizar mis estudios de maestría a través de la beca otorgada.

A mi asesor el Dr. César Joel Camacho Bello por su apoyo, asesoría y dirección durante el desarrollo de esta tesis. A la universidad Politécnica de Tulancingo por darme la oportunidad de estudiar en sus instalaciones y forjarme como profesional.

También me gustaría agradecer al cuerpo académico de la Maestría en Computación Óptica por sus valiosos conocimientos brindados durante mi formación profesional dentro de esta institución.

Y por último quiero agradecer a la Universidad de Alcalá (UAH) por haberme permitido realizar una estancia de investigación dentro de sus laboratorios y por haberme prestado el material necesitado en el transcurso de esta estancia. Pero en especial quiero agradecer al Dr. José Sáez Landete y al Dr. Philip Siegmann por darme la oportunidad de pertenecer a su grupo de trabajo, por apoyarme, asesorarme y por ese conocimiento transmitido durante las horas de trabajo a lo largo del proyecto de investigación realizado dentro de esta institución.

Prefacio

Los momentos ortogonales han surgido en la literatura como un área de investigación importante en el procesamiento de imágenes para la descripción de imágenes en aplicaciones como la recuperación de información, codificación, reconocimiento y clasificación de patrones. Sin embargo, algunos momentos están restringidos al orden entero, y se ha realizado poca investigación de momentos ortogonales de orden fraccional. Los momentos ortogonales de orden fraccionario no solo son capaces de extraer características generales de una imagen digital sino que también tienen la capacidad de reconstruir imágenes con un error mínimo. El objetivo de este trabajo tesis es proponer los momentos circulares genéricos de orden fraccional mediante los polinomios de orden fraccional de Jacobi, los cuales tienen la habilidad de formar múltiples familias de momentos de orden fraccional cambiando los parámetros de α y β . De igual forma, se propone utilizar el algoritmo de búsqueda por sección dorada para encontrar valor óptimo de γ que mejor represente una imagen digital.

Resumen

Se presenta una breve introducción sobre la teoría de los distintos tipos de momentos (geométricos, complejos y ortogonales), así como el cómputo de los momentos ortogonales definidos en su forma rectangular y circular. Además, partiendo de los polinomios genéricos de Jacobi se propone un nuevo conjunto de momentos circulares de orden fraccional en donde el cómputo se realizó mediante una configuración de píxeles polares. También, se compara el desempeño de cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional utilizando el error de reconstrucción NIRE. Por otra parte, se propone un algoritmo de búsqueda para encontrar un valor óptimo de γ con respecto al error de reconstrucción. Asimismo, se analiza el desempeño de los momentos circulares dentro de la clasificación de imágenes e interpolación de imágenes omnidireccionales. Finalmente, se presentan las conclusiones y trabajos a futuro.

Abstract

A brief introduction is presented on the theory of different types of moments (geometric, complex and orthogonal), as well as the computation of orthogonal moments defined in their rectangular and circular form. In addition, starting from the generic polynomials of Jacobi, a new set of circular moments of fractional order is proposed where the computation was carried out by means of a configuration of polar pixels. Also, the performance of each set of circular moments of fractional order is compared using the NIRE reconstruction error. On the other hand, a search algorithm is proposed to find an optimal value of γ with respect to the reconstruction error. Also, the performance of the circular moments within the classification of images and interpolation of omnidirectional images is analyzed. Finally, the conclusions and future works are presented.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 1 |
| 1.2. Planteamiento del problema | 8 |
| 1.3. Objetivos | 9 |
| 1.3.1. Objetivo general | 9 |
| 1.3.2. Objetivos particulares | 9 |
| 1.4. Estado del arte | 9 |
| 1.5. Trabajos derivados de la tesis | 11 |
| 1.6. Estructura de la tesis | 12 |
| | |
| 2. Teoría de momentos | 16 |
| 2.1. Introducción | 16 |
| 2.2. Momentos geométricos | 17 |
| 2.2.1. Momentos geométricos invariantes | 18 |
| 2.3. Momentos complejos | 21 |
| 2.4. Momentos ortogonales | 26 |
| 2.4.1. Momentos rectangulares | 26 |
| 2.4.2. Momentos radiales | 27 |
| 2.5. Implementación de los momentos ortogonales con los polinomios de Legendre desplazados | 29 |
| 2.5.1. Momentos de Legendre desplazados | 31 |
| 2.5.2. Momentos de Legendre-Fourier | 33 |
| | |
| 3. Polinomios genéricos de orden fraccional | 37 |
| 3.1. Introducción | 37 |
| 3.2. Polinomios de Jacobi | 37 |
| 3.3. Polinomios ortogonales radiales sustituidos y pesados de Jacobi | 42 |
| 3.4. Polinomios de Jacobi de orden fraccional | 50 |
| | |
| 3.5. Relación de los polinomios ortogonales de Jacobi desplazados de orden fraccional con otros polinomios ortogonales. | 60 |
| 3.5.1. Polinomios de Legendre de orden fraccional | 60 |
| 3.5.2. Polinomios de Mellin de orden fraccional | 61 |
| 3.5.3. Polinomios de Chebychev de orden fraccional | 62 |
| 3.6. Conclusiones | 63 |

| | |
|---|------------|
| 4. Momentos circulares en pixeles polares | 67 |
| 4.1. Introducción | 67 |
| 4.2. Esquema de pixeles polares | 68 |
| 4.3. Cómputo de momentos circulares en pixeles polares | 70 |
| 4.4. Momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional en pixeles polares | 71 |
| 4.4.1. Reconstrucción de imágenes | 72 |
| 4.4.2. Error de reconstrucción | 85 |
| 4.5. Selección del parámetro γ | 87 |
| 4.6. Conclusiones | 93 |
| 5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional | 95 |
| 5.1. Clasificación de imágenes mediante momentos circulares de orden fraccional | 95 |
| 5.1.1. Clasificador K-NN | 96 |
| 5.1.2. Clasificador MLP | 98 |
| 5.1.3. Árboles de clasificación | 99 |
| 5.2. Interpolación de imágenes catadiópticas | 101 |
| 6. Conclusiones y trabajo futuro | 109 |
| 6.1. Conclusiones | 109 |
| 6.2. Trabajo a futuro | 110 |

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1. | Transformaciones de la imagen original de Lena: (a) imagen rotada a 45 grados, (b) imagen trasladada, (c) imagen escalada en 0.25 en ambas dimensiones espaciales, (d) imagen reflejada. | 21 |
| 2.2. | Cambios del ángulo de rotación de la imagen de Lena para demostrar la invariancia a la rotación de los momentos complejos: a) imagen original, b) imagen rotada a 45 grados, c) imagen rotada a 90 grados, d) imagen rotada a 340 grados. | 22 |
| 2.3. | Cambios de traslación en imagen binaria de la letra E para demostrar la invariancia a la traslación de los momentos complejos: (a) $\Delta x = -210, \Delta y = 210$, (b) $\Delta x = 240, \Delta y = 240$, (c) $\Delta x = 270, \Delta y = -240$, (d) $\Delta x = -270, \Delta y = -240$ | 25 |
| 3.1. | Comparación del tiempo de cómputo de la relación de recurrencia de Camacho-Bello et al con la propuesta por Upneja y Singh de los polinomios desplazados de Jacobi con diferentes órdenes n y $\Delta r = 1/100000$ | 42 |
| 3.2. | Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=\beta=1$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Legendre), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Legendre), (c) Polinomios sustituidos radiales de Jacobi (Polinomios sustituidos radiales de Legendre). | 46 |
| 3.3. | Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=\beta=2$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Mellin), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Mellin), (c) Polinomios sustituidos radiales de Jacobi (Polinomios sustituidos radiales de Mellin). | 47 |
| 3.4. | Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=2, \beta=3/2$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Chebychev), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Chebychev), (c) Polinomios substituidos radiales de Jacobi (Polinomios substituidos radiales de Chebychev). | 48 |
| 3.5. | Gráficas de los polinomios de Jacobi substituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=1$ y con diferentes valores de γ | 54 |
| 3.6. | Gráficas de los polinomios de Jacobi substituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=2$ y con diferentes valores de γ | 55 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.7. | Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=1$ y con diferentes valores de γ . | 56 |
| 3.8. | Gráficas de los polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=2, \beta=3/2$ y con diferentes valores de γ . | 57 |
| 3.9. | Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=2$ y con diferentes valores de γ . | 58 |
| 3.10. | Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=2, \beta=3/2$ y con diferentes valores de γ . | 59 |
| 4.1. | Configuración de píxeles polares. | 68 |
| 4.2. | Imagen del logo de la UPT en coordenadas polares (a) y en su forma cartesiana (b). | 70 |
| 4.3. | Sector concéntrico Ω_{uv} , la cual representa un píxel polar para (r_{uv}, θ_{uv}) , donde $r_{uv} = (r_{uv}^{(s)} + r_{uv}^{(e)})/2$ y $\theta_{uv} = (\theta_{uv}^{(s)} + \theta_{uv}^{(e)})/2$. | 71 |
| 4.4. | Imagen de prueba en escala de grises “Cameraman” de tamaño 512×512 píxeles utilizada para el cómputo de los MJFOF. | 72 |
| 4.5. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$. | 74 |
| 4.6. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$. | 74 |
| 4.7. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$. | 75 |
| 4.8. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$. | 75 |
| 4.9. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$. | 76 |
| 4.10. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$. | 76 |
| 4.11. | Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$. | 77 |

| | |
|--|----|
| 4.12. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$ | 77 |
| 4.13. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$ | 78 |
| 4.14. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$ | 78 |
| 4.15. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$ | 79 |
| 4.16. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$ | 79 |
| 4.17. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$ | 80 |
| 4.18. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$ | 80 |
| 4.19. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$ | 81 |
| 4.20. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$ | 81 |
| 4.21. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$ | 82 |
| 4.22. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$ | 82 |

| | |
|---|----|
| 4.23. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$ | 83 |
| 4.24. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$ | 83 |
| 4.25. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$ | 84 |
| 4.26. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$ | 84 |
| 4.27. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$ | 85 |
| 4.28. Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$ | 85 |
| 4.29. Error de reconstrucción NIRE de la imagen de “Cameraman” de tamaño 128×128 píxeles con un orden máximo $L = 20$ para diferentes valores de γ . para cada conjunto de los momentos ortogonales de orden fraccional. | 86 |
| 4.30. Valor óptimo de γ para la imagen de “Cameraman” de tamaño 128×128 píxeles y orden máximo $L = 20$ para diferentes momentos de orden fraccional. | 89 |
| 4.31. Valor óptimo de γ para la imagen de “Cameraman” de tamaño 128×128 píxeles y orden máximo $L = 20$ con cambios de rotación. | 90 |
| 4.32. Valor óptimo de γ para la imagen de “Cameraman” con cambios en su escala, donde K es el factor de escala. | 90 |
| 4.33. Imágenes de prueba de tamaño 512×512 píxeles. | 91 |
| 4.34. Valores óptimos de γ para cada imagen de prueba con cambios de escala y de ángulo de rotación, para diferentes momentos ortogonales de orden fraccional. | 92 |
| 5.1. Algunas imágenes de la base de datos MNIST con un tamaño de 20×20 píxeles. | 96 |
| 5.2. Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con K-NN con un valor de $k = 5$ de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional. | 97 |
| 5.3. Ejemplo de un perceptrón Multicapa simple. | 98 |
| 5.4. MLP de Matlab para la clasificación de la base de datos MNIST. | 99 |

| | |
|---|-----|
| 5.5. Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con MLP de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional. | 100 |
| 5.6. Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con árboles de clasificación de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional. | 101 |
| 5.7. Imágenes catadióptricas; a) Ejemplo de una imagen catadióptrica [12], b) Modelo de proyección del sistema de visión catadióptrico. | 102 |
| 5.8. Modelo de interpolación de una imagen catadióptrica o normalización del iris. | 103 |
| 5.9. Imágenes catadióptricas de prueba de tamaño de 512×512 pixeles; a) Vista de la ciudad de Tokio [13], b) Iris del ojo humano [14]. | 104 |
| 5.10. Proyección cilíndrica y error de reconstrucción NIRE de la ciudad de Tokio de diferentes momentos ortogonales de orden fraccional con un orden máximo de $L=160$, utilizando el valor óptimo de γ | 105 |
| 5.11. Proyección cilíndrica y error de reconstrucción NIRE del iris del ojo humano de diferentes momentos ortogonales de orden fraccional con un orden máximo de $L=160$, utilizando el valor óptimo de γ | 106 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 2.1. Tabla de resultados adquiridos de los momentos invariantes de Hu de la imagen de Lena. | 20 |
| 2.2. Resultados obtenidos de los momentos complejos invariantes a la rotación de la imagen de Lena. | 23 |
| 2.3. Tabla de los resultados obtenidos de los momentos complejos invariantes a la traslación de la imagen binaria de la letra E. | 25 |
| 3.1. Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = \beta = 1$ | 41 |
| 3.2. Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = \beta = 2$ | 41 |
| 3.3. Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$ | 41 |
| 3.4. Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = \beta = 1$ | 43 |
| 3.5. Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = \beta = 2$ | 43 |
| 3.6. Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$ | 44 |
| 3.7. Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = \beta = 1$ | 45 |
| 3.8. Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = \beta = 2$ | 45 |
| 3.9. Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$ | 45 |
| 3.10. Polinomios de Jacobi pesados orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 1$ | 52 |
| 3.11. Polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 2$ | 52 |
| 3.12. Polinomios de Jacobi de orden fraccional cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$ | 52 |
| 3.13. Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 1$ | 53 |
| 3.14. Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 2$ | 53 |
| 3.15. Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$ | 53 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El cálculo diferencial que todos conocemos fue inventado por Newton y Leibniz en el siglo XVII [1]. El primero en mencionar el cálculo fraccional fue Leibniz en una carta a L' Hopital en 1695. En donde se discutieron el desarrollo del cálculo que Leibniz presentó, en esta carta L'Hopital le preguntó: ¿qué pasaría si el orden n fuera $\frac{1}{2}$? [2]. A lo que Leibniz respondió: “usted puede ver por eso, que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $\frac{dy}{dx}$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten solo el uso de exponentes que son enteros, no hace, todavía, el uso de exponentes fraccionarios”. Más tarde Euler (1729) contribuyó de forma indirecta en el desarrollo del cálculo fraccionario con la función Gamma,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

definida para todo $z \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(z) > 0)$ [3]. La función Gamma es una función que generaliza la definición del factorial a los números no enteros, la cual suele aparecer en otras formas,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{2z-1} e^{-t^2} dt \quad (1.2)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \quad (1.3)$$

Usando la integración por partes en (1.1), se obtiene una propiedad fundamental de la función Gamma,

1. Introducción

$$\Gamma(z) = (z - 1)\Gamma(z - 1), \quad (1.4)$$

la cual permite obtener la función Gamma de un número entero positivo como,

$$\Gamma(z) = (n - 1)!. \quad (1.5)$$

En este contexto, la Función Gamma de Ec. (1.1) constituye una generalización del concepto de factorial [4]. Por otra parte, Legendre contribuyó indirectamente con el cálculo fraccional en 1772, desarrollando la ley de los exponentes para los operadores de orden entero,

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y \quad (1.6)$$

Tiempo después, en 1819 Lacroix desarrolla una fórmula para la diferenciación fraccionaria de la derivada enésima de v^m por inducción. Él reemplazó n con la fracción $\frac{1}{2}$, junto con el hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, obteniendo,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

En 1822 Joseph Fourier, mencionó por medio de su definición de operaciones fraccionales, derivadas de orden arbitrario[5],

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos[p(x - \alpha) + \frac{\pi}{2}u] dp \quad (1.8)$$

y afirma que el número u será cualquier cantidad, positivo o negativo. Posteriormente, Liouville en 1835 da una definición de la derivada fraccional como una serie infinita de funciones exponenciales,

$$\frac{d^u}{dx^u} y = \sum_0^m A_m e^{mx} m^u, \quad (1.9)$$

donde u es cualquier número racional, complejo o irracional[3]. El cálculo fraccional, involucra conexamente el estudio de algunas funciones especiales como las de Mittag-Leffler que es una generalización de la exponencial, además suelen aparecer la función Gamma de Euler (Γ), serie hipergeométrica y también los coeficientes binomiales, resultando en una mayor complejidad de cálculo.

Por otra parte, la función de Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial, la cual está definida de la siguiente manera,

1. Introducción

$$\begin{aligned}
 E_\alpha(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} \\
 E_1(t) &= e^t \\
 E_2(t) &= \cosh(\sqrt{t})
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Además, la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $\gamma \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(\gamma) > 0)$ se define como,

$$(D_\alpha^\gamma f)(x) = D^n I_\alpha^{n-\gamma} f(x) \tag{1.11}$$

$$(D_\alpha^\gamma f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{d^n}{dx^n} \int_\alpha^x (x-t)^{n-\gamma-1} f(t) dt \tag{1.12}$$

donde $n = [\operatorname{Re}(\gamma)] + 1$.

En 1969, el físico matemático italiano Michele Caputo dió una nueva definición de la derivada fraccional como,

$$D^\alpha f(t) \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^n(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha-n+1}} d\eta \tag{1.13}$$

donde $n-1 < \alpha < n$ y $f^{(n)}$ es una derivada ordinaria. El operador D^α satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha C &= 0, & (\text{C es una constante}) \\
 0, & & \text{para } \beta \in N_0 \text{ y } \beta < [v] \\
 D^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-v)} x^{\beta-1}, & \text{para } \beta \in N_0 \text{ y } \beta \geq [v] \text{ o } \beta \notin N \text{ y } \beta > [v]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde $[v]$ y $\lfloor v \rfloor$ son las funciones de techo y de piso respectivamente, mientras $N = \{1, 2, \dots\}$ y $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. La diferencial fraccional de Caputo es una operacion lineal,

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x), \tag{1.15}$$

donde λ y μ son constantes. Asimismo, la derivada fraccional de Grunwald-Letnikov se basa en la generalización de la fórmula de la diferencial de orden n natural para el caso de α real positivo, es decir, el operador de diferencia se expresa en su forma general como:

1. Introducción

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-\alpha}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh). \quad (1.16)$$

$$D^\alpha f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x-\alpha}\right) \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)} f\left[x - m \frac{x-\alpha}{n}\right]. \quad (1.17)$$

Otro punto de partida para definir la derivada de orden fraccionario fue propuesto por Liouville (1832), quien, partiendo de la integral del orden fraccionario, obtiene,

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (1.18)$$

donde $\alpha < x$. Ahora bien, si $n-1 < \alpha < n$ se puede hacer $\alpha = n-v$ entonces se tiene,

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = J^v f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\alpha}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (1.19)$$

La integral fraccional de Riemann-Liouville de orden $v \geq 0$ está dado por[6],

$$J^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt, \quad v > 0, \quad x > 0, \quad (1.20)$$

$$J^0 f(x) = f(x)$$

Por otra parte la Transformada fraccional de Fourier es definida como una operación matemática que generaliza la transformada de Fourier, la cual puede ser denominada como: transformada de Fourier rotatoria o transformada de Fourier angular, ya que depende de un parámetro α que se interpreta como una rotación por un ángulo α en el plano tiempo-frecuencia, este parámetro α da el valor de orden fraccional. Matemáticamente, la transformada de Fourier fraccional de orden α de la función $f(t)$ se define como [7],

$$F(x) = F^\alpha [f(t)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, x) f(t) dt \quad (1.21)$$

donde α es el orden de la transformada y $K_\alpha(t, x)$ es el kernel de la transformada fraccional de Fourier y está dado como,

$$K_\alpha(t, x) = \begin{cases} \sqrt{1-i \cot \alpha} e^{i \frac{t^2+x^2}{2} \cot \alpha - ixt \csc \alpha} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-x) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+x) & \alpha = 2n\pi \pm \pi \end{cases} \quad (1.22)$$

1. Introducción

donde n es un entero dado. Además, se reordena el Kernel $K_\alpha(t, x)$ como,

$$K_\alpha(t, x) = C_\alpha k_\alpha(t, x) e^{-itx \csc \bar{\alpha}} \quad (1.23)$$

donde $\bar{\alpha} = \frac{\alpha\pi}{2}$, $k_\alpha(t, x) = e^{(\frac{i}{2})(t^2+x^2) \cot \bar{\alpha}}$ y $C_\alpha = \frac{e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\sin \bar{\alpha}) - \bar{\alpha})}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}}$. Está claro que si, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces $C_\alpha \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}}$. De igual forma, la transformada Wavelet utiliza funciones que se localizan tanto en el espacio real como en el espacio de Fourier. Generalmente, la transformada Wavelet puede expresarse mediante la siguiente integral,

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{(s,\tau)}(t) dt \quad (1.24)$$

donde $\Psi_{(s,\tau)}(t)$ es la función Wavelet madre definida como,

$$\Psi_{(s,\tau)}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (1.25)$$

donde s y τ son los parámetros que son usados para controlar la dilatación y la traslación, respectivamente. La función Wavelet satisface las siguientes condiciones[8],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{(s,\tau)}(t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{(s,\tau)}(t)|^2 dt = 1 \quad (1.26)$$

De igual manera la transformada fraccional continua de Wavelet (FrWT) de la función de 1D $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ esta descrita como,

$$W^\alpha(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\alpha(t, x) \Psi_{(s,\tau)}(x) dt dx \quad (1.27)$$

donde $\Psi_{(s,\tau)}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{x-\tau}{s}\right)$ es la Wavelet madre con los parámetros s y τ para la dilatación (escala) y traslación (posición). Además, $K_\alpha(t, x)$, es el kernel de la FrWT que está dado por,

$$K_\alpha(t, x) = C_\alpha k_\alpha(t, x) e^{-itx \csc \bar{\alpha}} \quad (1.28)$$

donde $k_\alpha(t, x) = e^{(\frac{i}{2})(t^2+x^2) \cot \bar{\alpha}}$ y $C_\alpha = \frac{e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\sin \bar{\alpha}) - \bar{\alpha})}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}}$. Con el fin de obtener la transformada fraccional discreta de Wavelet (DFrWT), la ecuación (FrWT) se debe discretizar y para este propósito la Wavelet madre $\Psi_{(s,\tau)}(x)$ es discretizada. Este tipo de discretización tiene la forma $s = s_0^m$ y $\tau = n\tau_0 s_0^m$. De tal forma, la Wavelet madre discretizada se define como,

1. Introducción

$$W_{m,n}^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi\left(\frac{x - n\tau_0 s_0^m}{s_0^m}\right) dx \quad (1.29)$$

donde $W_{m,n}^\alpha$ son los coeficientes de la transformada fraccional Wavelet discreta de orden α de una cuadrícula de escala de ubicación dada por m, n . Para la transformada de Wavelet fraccional discreta, los coeficientes $W_{m,n}^\alpha$ se conocen como coeficientes de Wavelet fraccionario. Ahora, la transformada fraccional de Wavelet discreta e inversa se pueden escribir como:

1) Transformada fraccional de Wavelet discreta directa,

$$W_{m,n}^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) 2^{\frac{-m}{2}} \Psi(2^{-m}x - n) dx \implies \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \Psi_{m,n}(x) dx \quad (1.30)$$

2) Transformada fraccional de Wavelet discreta inversa,

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{m,n}^\alpha \Psi_{m,n}(x) \implies F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F, \Psi_{m,n} \rangle \Psi_{m,n}(x). \quad (1.31)$$

Finalmente, la transformada del coseno fraccional discreta (DFrCT) se desglosa a partir de la transformada discreta de Fourier (DFT), la cual es también una forma general de la transformada de coseno discreta, que tiene una relación similar con la que existe entre (DFT) y la transformada discreta de Fourier (DFT). La transformada de coseno discreto se define como[9]:

$$v(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (1.32)$$

donde $x(n)$: es la señal de entrada, $v(k)$: es la señal de salida, además,

$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad \alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \text{ para } 1 \leq k \leq N-1 \quad (1.33)$$

Al extender dos veces el tamaño de la señal, se puede reescribir la ecuación de la transformada de coseno discreto,

$$f(x) = \begin{cases} x(n) & \text{para } 0 \leq n < N \\ x(2N - n - 1) & \text{para } N \leq n \leq 2N \end{cases} \quad (1.34)$$

definiendo:

$$C_x(k) = e^{\frac{-j2\pi k}{4N}} Y(k)$$

1. Introducción

donde $Y(k)$ es la transformada discreta de Fourier de $2N$ puntos de la señal extendida $y(n)$. Entonces, la transformada discreta del coseno de $x(n)$ son los primeros N elementos de $C_x(k)$, esta definición puede ser reescrita como F_{2N} (transformada discreta de Fourier de $2N$ puntos) y F_{2N}^{-1} (transformada discreta de Fourier inversa de $2N$ puntos) de la entrada $x(n)$ como:

$$C_x(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}\right)[F_{2N}[x(n)](k) + F_{2N}^{-1}[x(n)](k)] - j^* \sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)[F_{2N}[x(n)](k) - F_{2N}^{-1}[x(n)](k)]$$

Dada una señal $x(n)$, suponiendo que $C_x^p[x(n)]$ es la transformada fraccional discreta de coseno con orden p , definida como,

$$C_x^p(k) = e^{-\frac{j2\pi kp}{4N}} Y^p(k) \quad (1.35)$$

La definición de transformada fraccional discreta de coseno puede ser reescrita por F_{2N}^p (transformada fraccional discreta de Fourier de $2N$ puntos) y $(F_{2N}^p)^{-1}$ (transformada fraccional discreta de Fourier inversa de $2N$ puntos) de la entrada $x(n)$ como [10],

$$C_x^p(k) = \cos\left(\frac{\pi pk}{2N}\right)[F_{2N}^p[x(n)](k) + (F_{2N}^p)^{-1}[x(n)](k)] - \quad (1.36)$$

$$j^* \sin\left(\frac{\pi pk}{2N}\right)[F_{2N}^p[x(n)](k) - (F_{2N}^p)^{-1}[x(n)]] \quad (1.37)$$

En las últimas décadas, las aplicaciones del cálculo fraccional se han extendido a diversas áreas tales como: en ingeniería de control [11], procesamiento de señales, electromagnetismo, mecánica de fluidos y en la farmacocinética [12]. Por otra parte, se han desarrollado métodos analíticos y numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales (FDEs), es difícil obtener soluciones exactas para la mayoría de las ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, se han hecho intentos de proponer métodos analíticos que se aproximen a las soluciones exactas de estas ecuaciones, tales como la descomposición de Adomian y la homotopia[13]. Recientemente, los métodos numéricos también han sido propuestos para la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionales [14].

Doha et al. presentaron y desarrollaron técnicas para resolver FDE de varios términos incluyendo términos lineales y no lineales utilizando polinomios de Jacobi, donde generalizaron el método de Legendre-Tau en cuadratura y los métodos espectrales de Chebyshev [15]. Recientemente, S.Kasem et al. propusieron una nueva función ortogonal de Legendre de orden fraccionario basada en polinomios

1. Introducción

de Legendre para obtener soluciones altamente precisas de FDEs en un intervalo finito. Bhrawy y Zaky [16] definieron nuevas funciones ortogonales denominadas funciones ortogonales de Jacobi de orden fraccionario desplazado (SFJFs) basados en los polinomios de Jacobi desplazados, de igual forma proponen una técnica directa para resolver ecuaciones diferenciales fraccionales lineales usando el método de Jacobi-Tau (SFJTM).

Los momentos ortogonales juegan un papel importante en el análisis de imágenes y otras aplicaciones similares. Sin embargo, los momentos ortogonales existentes están restringidos al orden entero, y hasta la fecha se ha llevado a cabo poca investigación de momentos ortogonales de orden no entero. Recientemente Bin Xiao et al. introduce los momentos de Legendre-Fourier desplazados de orden fraccionario [17]. En este trabajo de tesis se proponen los momentos ortogonales genéricos de orden fraccional en pixeles polares, usando la teoría de cálculo fraccional.

1.2. Planteamiento del problema

En años recientes, se han enfocado en investigar transformaciones con órdenes fraccionales tales como: transformada de Fourier de orden fraccional[7], transformada de Wavelets fraccional[8], transformada de coseno discreto fraccional[9], transformada Hartley fraccional[18]. Estas transformadas de orden fraccional son ampliamente utilizadas en los radares, sistemas de comunicación, seguridad de la información y reconocimiento facial[17] y muchos otros campos.

En este trabajo proponemos los momentos circulares genéricos de orden fraccional mediante los polinomios de orden fraccional de Jacobi, los cuales serán una ventaja para el análisis del rendimiento de los momentos circulares.

Los momentos ortogonales juegan un papel importante en el análisis de imágenes y otras aplicaciones similares. Sin embargo, los momentos ortogonales existentes están restringidos al orden entero, y hasta la fecha se ha realizado poca investigación de momentos ortogonales de orden no entero. Los momentos ortogonales de orden fraccionario pueden definirse en sistemas de coordenadas cartesianas y polares, estos momentos no sólo son capaces de extraer características de la región de interés sino que también tienen potencial para la reconstrucción de imágenes con un mínimo error.

Los momentos de Jacobi-Fourier (JFM) son útiles para muchas aplicaciones de procesamiento de imágenes, reconocimiento de patrones y visión por computadora, proporcionan una amplia clase de momentos invariantes ortogonales. Los momentos de Jacobi-Fourier son de naturaleza ortogonal, lo cual es una propiedad importante en el procesamiento de imágenes. La razón de la importancia de la propiedad ortogonal en el procesamiento de imágenes y otras aplicaciones de reconocimiento de patrones

1. Introducción

es la presencia de la función inversa de los momentos ortogonales. Otra característica importante de la propiedad de ortogonalidad que proporciona baja redundancia de información y también proporciona robustez al ruido.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Generalizar y analizar teóricamente los momentos de orden fraccional mediante los polinomios genéricos de Jacobi $J_n(\alpha, \beta, r)$, buscar el orden fraccional que pueda representar mejor una imagen digital.

1.3.2. Objetivos particulares

- Hacer un estudio del marco teórico de los polinomios genéricos de orden fraccional, para implementarlos en los polinomios de Jacobi.
- Estudio de las relaciones de recurrencia de orden fraccional para los polinomios de Jacobi.
- Implementar los polinomios genéricos de orden fraccional en el cómputo de momentos circulares en píxeles polares
- Realizar la reconstrucción de imágenes a través de los momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional en píxeles polares.
- Implementar un algoritmo capaz de realizar el reconocimiento de objetos, a través del marco teórico de los momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional.

1.4. Estado del arte

En 2006, Ping et al.[19] propusieron los momentos ortogonales invariantes de Jacobi-Fourier. La integral del kernel de los momentos, el cual está compuesto por los polinomios radiales de Jacobi y la componente compleja angular de Fourier, en donde la variación de dos parámetros α y β en el polinomio de Jacobi, pueden formar varios tipos de momentos ortogonales, tales como: Momentos de Legendre-Fourier[20] ($\alpha = 1, \beta = 1$), Momentos de Chebyshev-Fourier[21] ($\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$), Momentos ortogonales Fourier-Mellin[22] ($\alpha = 2, \beta = 2$), Momentos de Zernike[20] y Momentos Pseudo-Zernike[23]. La formulación de estos momentos será una ventaja para el análisis del rendimiento de los momentos ortogonales y para buscar un momento ortogonal principal.

Sin embargo, el trabajo contiene algunas erratas que resultan principalmente de la confusión entre las dos definiciones ligeramente diferentes de los polinomios Jacobi

1. Introducción

desplazados que hay en la literatura. Ping et al.[19] define erróneamente las constantes de normalización y define incorrectamente los polinomios de Jacobi para: $\alpha = \beta = 2$, $\alpha = \beta = 3$, $\alpha = 3, \beta = 2 = 2$ y $\alpha = 4, \beta = 3$. [24]

Más tarde R. Upneja y C. Singh en el 2014 [25], propone un algoritmo rápido que reduce la complejidad para el cálculo de los polinomios radiales de los momentos de Jacobi-Fourier, este algoritmo se basa en relaciones de recurrencia. El método propuesto no solo reduce la complejidad temporal, sino que también mejora la estabilidad numérica de los momentos de mayor orden, con el método propuesto se consigue una mejor reconstrucción de la imagen. Dado que para el cálculo los momentos de Jacobi-Fourier se define en términos de coordenadas polares, los autores proponen definir la imagen sobre una rejilla cuadrada para ser mapeado en un círculo unitario externo, tomando el centro de la imagen como el origen del mapeo. Al utilizar un círculo unitario externo se asegura que no haya pérdida de píxeles durante el cómputo del momento y por lo tanto, toda la información de la imagen se puede conservar. Para el cómputo preciso de los momentos de Jacobi-Fourier, se requiere calcular la doble integral, puesto que no hay una solución analítica para este tipo de integrales. En la mayoría de los trabajos la doble integral se sustituye por una aproximación de orden cero en coordenadas cartesianas.

Otro trabajo presentado el mismo año que R. Upneja y C. Singh sobre los momentos de Jacobi-Fourier (JFMs) fue presentado por Camacho-Bello et al.[26], en donde se proponen un nuevo algoritmo para calcular los momentos de Jacobi-Fourier de una manera rápida y de alta precisión, basado en imágenes en píxeles polares y la relación de recurrencia. Esta nueva relación de recurrencia ayuda a calcular más rápido y reduce la inestabilidad numérica en polinomios radiales de orden superior. El esquema de las imágenes en píxeles polares reduce tanto el error geométrico como el error de integración. Además, reduce significativamente el error de reconstrucción de las imágenes, y la relación de recurrencia propuesta está libre de términos factorial, por esta razón los polinomios de Jacobi-Fourier son estables en ordenes superiores, superando al método convencional.

En 2017, José Sáez Landete [27] analizó el trabajo de Upneja et al.[25] donde se utiliza la configuración del disco unitario externo para obtener los momentos de Jacobi-Fourier. Sin embargo, Landete demostró que este método hace perder la ortogonalidad del kernel, ya que no considera el dominio del kernel entero. Para demostrar esta afirmación, evaluó la condición de ortogonalidad del kernel de Jacobi-Fourier considerando, el disco unitario interno y el externo sobre una imagen cuadrada de $N \times N$ píxeles. Por otra parte, se propuso una transformación de las imágenes en coordenadas cartesianas a coordenadas polares como lo presentado por Camacho-Bello [26], esto con el fin de mejorar la precisión del cálculo de los momentos de

1. Introducción

Jacobi-Fourier. Además, se han corregido y aclarado algunas erratas e inexactitudes que podrían conducir a resultados erróneos.

En el mismo año, Rahul Upneja[28] propone un nuevo método para el cálculo preciso y rápido de los momentos de Jacobi-Fourier, reduciendo el error de integración numérica para el cálculo de los momentos de Jacobi-Fourier, este error de integración se produce cuando se hace la aproximación de orden cero de la doble integración, que no es exacta. Por tal motivo, Upneja[28] propone un método que simultáneamente reduce este error y acelera el cálculo de los momentos Jacobi-Fourier, utilizando un enfoque recursivo de la integración de Gauss y la integración de Wavelet, el cual no solo reduce el error de integración numérica sino que también reduce el error geométrico en la reconstrucción de las imágenes.

En este trabajo de tesis se busca mejorar el desempeño de los momentos de Jacobi-Fourier mediante la teoría de transformaciones de órdenes fraccionarios y para diferentes configuraciones de píxeles polares. Para esto, tomamos las ideas propuesta por Bin Xiao[17], el cual proponen un marco general de los momentos ortogonales de orden fraccional en sistemas de coordenadas cartesianas y polares, mediante los polinomios de Legendre desplazados. Los momentos propuestos en este trabajo tienen propiedades de alta precisión en la reconstrucción de imágenes y robustez de alto ruido en el reconocimiento de imágenes invariantes, para la extracción de características de la región de interés.

1.5. Trabajos derivados de la tesis

■ Vargas, H. & Camacho, C.J. (2018, enero). Momentos complejos para el análisis de piezas metal-mecánicas. Poster presentado en el X congreso internacional de investigación UPT, Tulancingo, Hidalgo.

■ Vargas, H. & Camacho, C.J. “Complex moments for the analysis of metal-mechanical”. In Applications of Digital Image Processing XL. International Society for Optics and Photonics.

■ César Camacho-Bello, José Sáez-Landete, Horlando Vargas-Vargas. Some aspects of fractional-order circular moments for image analysis. Pattern Recognition, (en desarrollo).

1.6. Estructura de la tesis

A continuación se muestra el contenido de este trabajo de tesis, el cual está estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 2: Se presenta un análisis teórico de los distintos tipos de momentos, tales como: momentos geométricos, momentos complejos y momentos ortogonales, así como la implementación de los momentos ortogonales definidos en un rectángulo y un círculo.

Capítulo 3: Se propone un nuevo conjunto de momentos genéricos circulares de orden fraccional a partir de los polinomios genéricos de Jacobi. Además, se obtienen diferentes familias de momentos circulares de orden fraccional variando el valor de α y β .

Capítulo 4: Se presenta el cómputo de los momentos circulares de orden fraccional basado en una configuración de píxeles polares y a su vez se analiza el desempeño de cada familia utilizando el error de reconstrucción (NIRE). De igual forma, se propone un algoritmo de búsqueda para encontrar el valor óptimo de γ con respecto al error de reconstrucción.

Capítulo 5: Se implementan los momentos circulares de orden fraccional en las siguientes aplicaciones: clasificación de imágenes e interpolación de imágenes omnidireccionales. Esto con la finalidad de medir el desempeño de cada conjunto de momentos circulares.

Capítulo 6: Se presentan las conclusiones generales del trabajo de tesis y el trabajo a futuro.

Bibliografía

- [1] Anthony Torres Hernández, Fernando Brambila Paz. (2003). *Cálculo Fraccionario*. México: UNAM.
- [2] M. Rocha. (2003). Una breve Introducción al Cálculo Fraccional. Sevilla España: Numero 8.
- [3] GuzmanCabrera, R., Guía-Calderón, M., Rosales-García, J. J., González-Parada, A., & Álvarez-Jaime, J. A. (2015). The differential and integral fractional calculus and its applications. *Acta Universitaria*, 25(2), 20-27.
- [4] L. Vázquez, M. P. Velasco. (2011). El cálculo fraccionario como instrumento de modelización. *UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID*, 5, 6-7.
- [5] Sauchelli, V. H., & Laboret, S. (2007). Cálculo Fraccional Aplicado a Control Automático. *Mecánica Computacional*, 26, 3308-3327.
- [6] Bhrawy, A. H., & Zaky, M. A. (2016). Shifted fractional-order Jacobi orthogonal functions: application to a system of fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2), 832-845.
- [7] A.Fernández, J.Manjarrés. (2010). Restauración de señales: Filtrado repetitivo en dominios fraccionarios de Fourier consecutivos. *Universidad del Norte*, 0, 13-16.
- [8] Bhatnagar, G., Wu, Q. J., & Raman, B. (2013). Discrete fractional wavelet transform and its application to multiple encryption. *Information Sciences*, 223, 297-316.
- [9] Gerek, O. N., & Erden, M. F. (2000, February). The discrete fractional cosine transform. In *Proceedings of the IEEE Balkan Conference on Signal Processing, Communications, Circuits and Systems, Istanbul, Turkey*.
- [10] Zhang, L., Wu, J., & Zhou, N. (2009, August). Image encryption with discrete fractional cosine transform and chaos. In *Information Assurance and Security, 2009. IAS'09. Fifth International Conference on (Vol. 2, pp. 61-64)*. IEEE.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Agrawal, O. P. (2004). A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4), 323-337.
- [12] Kulish, V. V., & Lage, J. L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3), 803-806.
- [13] Magin, R. L. (2006). *Fractional calculus in bioengineering* (pp. 269-355). Redding: Begell House.
- [14] Hosseinnia, S. H., Ranjbar, A., & Momani, S. (2008). Using an enhanced homotopy perturbation method in fractional differential equations via deforming the linear part. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(12), 3138-3149.
- [15] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Baleanu, D., & Ezz-Eldien, S. S. (2013). On shifted Jacobi spectral approximations for solving fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(15), 8042-8056.
- [16] Bhrawy, A. H., Alghamdi, M. M., & Taha, T. M. (2012). A new modified generalized Laguerre operational matrix of fractional integration for solving fractional differential equations on the half line. *Advances in Difference Equations*, 2012(1),179.
- [17] Xiao, B., Li, L., Li, Y., Li, W., & Wang, G. (2017). Image analysis by fractional-order orthogonal moments. *Information Sciences*, 382, 135-149.
- [18] Jimenez, C., Torres, C., & Mattos, L. (2011). Fractional Hartley transform applied to optical image encryption. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 274, No. 1, p. 012041). IOP Publishing.
- [19] Ping, Z., Wu, R., & Sheng, Y. (2002). Image description with Chebyshev–Fourier moments. *JOSA A*, 19(9), 1748-1754.
- [20] Teague, M. R. (1980). Image analysis via the general theory of moments. *JOSA*,70(8), 920-930.
- [21] Ping, Z., Wu, R., & Sheng, Y. (2002). Image description with Chebyshev–Fourier moments. *JOSA A*, 19(9), 1748-1754.
- [22] Sheng, Y., & Shen, L. (1994). Orthogonal Fourier–Mellin moments for invariant pattern recognition. *JOSA A*, 11(6), 1748-1757.
- [23] Teh, C. H., & Chin, R. T. (1988, June). On image analysis by the methods of moments. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR'88.*, Computer Society Conference on (pp. 556-561). IEEE.

BIBLIOGRAFÍA

- [24] Hoang, T. V., & Tabbone, S. (2013). Errata and comments on “Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description”. *Pattern Recognition*, 46(11), 3148-3155.
- [25] Upneja, R., & Singh, C. (2015). Fast computation of Jacobi-Fourier moments for invariant image recognition. *Pattern Recognition*, 48(5), 1836-1843.
- [26] Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., & Báez-Rojas, J. J. (2014). High-precision and fast computation of Jacobi–Fourier moments for image description. *JOSA A*, 31(1), 124-134.
- [27] Sáez-Landete, J. (2017). Comments on “fast computation of jacobi-Fourier moments for invariant image recognition”. *Pattern Recognition*, 67, 16-22.
- [28] Upneja, R. (2016). Accurate and fast Jacobi-Fourier moments for invariant image recognition. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19), 7925-7940.

Capítulo 2

Teoría de momentos

2.1. Introducción

Las imágenes digitales comunes contienen una enorme cantidad de información. Es por eso que existe la necesidad de implementar métodos de análisis de imágenes automáticos y robustos[1]. Uno de los métodos utilizados en la actualidad para la extracción de información de una imagen es a través de los momentos, los cuales son cantidades escalares reales o complejas utilizadas para describir imágenes y capturar sus características más importantes. Los momentos han sido ampliamente utilizados durante cientos de años en estadística para describir la forma de una función de densidad de probabilidad y en la mecánica de cuerpos rígidos para medir la distribución de la masa de un cuerpo[2]. Actualmente existen varias aplicaciones dentro del análisis de imágenes, tales como reconocimiento de patrones, clasificación, codificación de imágenes y reconstrucción, entre otras. En el campo matemático los momentos son “proyecciones” de una función, sobre una base polinomial de manera similar que la transformada de Fourier. En general, los momentos $M_{pq}^{(f)}$ de una imagen $f(x, y)$, donde p y q son enteros no negativos, $k = p + q$, es el orden de los momentos, y están definidos como,

$$M_{pq}^{(f)} = \int \int_D P_{pq}(x, y) f(x, y) dx dy \quad (2.1)$$

donde la secuencia $P_{00}(x, y), P_{10}(x, y), \dots, P_{kj}(x, y)$ son funciones polinomiales definidas sobre un dominio D . Dependiendo de la base polinomial utilizada pueden definirse los momentos geométricos, momentos complejos y momentos ortogonales. También, existen trabajos que remplazan por completo la base polinomial por alguna otra base, como en el caso de los momentos wavelet[3] y momentos escalonados[4], donde

2. Teoría de momentos

las funciones wavelets se usan en una combinación con funciones armónicas en lugar de los polinomios. Estas modificaciones ampliaron la noción de momentos, pero no se ha modificado la teoría base de los momentos. Los momentos principales que hay en la literatura para el tratamiento de imágenes son los momentos geométricos, complejos y ortogonales, que más adelante se definirán en el transcurso de este capítulo.

2.2. Momentos geométricos

La opción más común mediante la cual se puede representar a los momentos geométricos es a través de una base de potencia estándar $P_{pq}(x, y) = x^p y^q$, de esta manera los momentos geométricos se definen como,

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad (2.2)$$

En el caso de una imagen digital los momentos geométrico se definen como,

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y). \quad (2.3)$$

Los momentos de orden m_{00} en imágenes binarias representan el área geométrica de la imagen. Entonces m_{00} se define como,

$$m_{00} = \sum_0^x \sum_0^y f(x, y). \quad (2.4)$$

Los momentos de orden m_{10} y m_{01} , son utilizados para encontrar el centroide de la imagen, definidos de la siguiente manera,

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (2.5)$$

Por otra parte, los momentos m_{20} , m_{02} y m_{11} se conocen como momentos de inercia describen la distribución de intensidad de la imagen con respecto a los ejes coordenados. A partir de los momentos de segundo orden se pueden calcular el radio de giro de una imagen, donde describe la forma en la cual la intensidad de la imagen se distribuye alrededor de su eje central y se define como,

$$r_x = \sqrt{\frac{m_{20}}{m_{00}}} \quad \text{y} \quad r_y = \sqrt{\frac{m_{02}}{m_{00}}} \quad (2.6)$$

Además, si $f(x, y)$ se considera como una densidad probabilística, es decir, sus valores se normalizan de tal manera que $m_{00} = 1$, se pudieran considerar como m_{10} y m_{01} como los valores medios. En el caso que fueran cero, m_{20} y m_{02} serían las

2. Teoría de momentos

proyecciones horizontal y vertical, y m_{11} sería la covarianza entre ellos. De esta manera, los momentos de segundo orden definen la orientación de la imagen. Asimismo, los momentos de tercer orden m_{30} y m_{03} describen el sesgo proyectivo de una imagen, el cual es una medida estadística del grado de distribución de la desviación de simetría alrededor del eje central,

$$s_x = \frac{m_{30}}{\sqrt{m_{20}^3}} \quad \text{y} \quad s_y = \frac{m_{03}}{\sqrt{m_{02}^3}} \quad (2.7)$$

Por último, los momentos de cuarto orden m_{40} y m_{04} describen la curtosis de la imagen, la cual es una medida de apuntamiento,

$$k_x = \frac{m_{40}}{m_{04}} \quad \text{y} \quad k_y = \frac{m_{04}}{m_{02}^2} \quad (2.8)$$

A través de los momentos geométricos se derivan los momentos invariantes a la traslación, a la escala y rotación.

2.2.1. Momentos geométricos invariantes

La traslación, rotación y la escala son transformaciones de coordenadas espaciales de cuatro parámetros, que se puede describir en forma de matriz como,

$$X' = sR_\alpha X + t \quad (2.9)$$

donde t es el vector de traslación, s es un factor de escala, y R_α es la matriz de rotación dado por el ángulo α ,

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Para darle la propiedad de invariante a traslaciones (sin rotaciones y cambios de escala) se debe desplazar el centroide del objeto al origen del sistema de coordenadas como,

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy \quad (2.11)$$

En el caso de una imagen digital los momentos geométricos invariantes a la traslación, se dan de la siguiente forma,

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y). \quad (2.12)$$

Tenga en cuenta que siempre se mantiene $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$ y $\mu_{00} = m_{00}$. La invariancia a la traslación de los momentos centrales es directa. La invariancia de escala se obtiene

2. Teoría de momentos

mediante una normalización adecuada de cada elemento. Para que un momento se pueda utilizar como un factor de normalización, es necesario que sea distinto de cero para todas las imágenes. Los momentos de orden inferior son más estables al ruido y su cómputo es más rápido, por lo tanto, el momento geométrico m_{00} es el apropiado para esta normalización. La normalización está definida como, $v_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\omega}$

$$v_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\omega} \quad (2.13)$$

donde $\omega = \frac{p+q}{2} + 1$ para $p + q \geq 2$. Finalmente, si $f(x', y')$ es la imagen $f(x, y)$ después de haber sido escalado en cada eje por s , de modo que $x' = sx$, $y' = sy$ y $dx'dy' = s^2dxdy$, los momentos centrales en las nuevas coordenadas, toman la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mu'_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}')^p (y - \bar{y}')^q f(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^p (x - \bar{x})^p s^q (y - \bar{y})^q f(x, y) s^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

cuando $p = 0$ y $q = 0$, se tiene que,

$$\mu'_{00} = s^2 \mu_{00} \quad (2.15)$$

Por lo tanto,

$$v'_{pq} = \frac{\mu'_{pq}}{(\mu'_{00})^\omega} = \frac{s^{p+q+2} \mu_{pq}}{(s^2 \mu_{00})^\omega} = v_{pq} \quad (2.16)$$

de ésta manera se demuestra la invariancia a la escala de los momentos normalizados.

Para la invariancia a la rotación, Hu introduce en 1962 [5] los momentos invariantes a la rotación, los cuales emplean la teoría de los invariantes algebraicos y deriva sus 7 famosos invariantes a la rotación en el plano alrededor del origen, los cuales están dados por,

2. Teoría de momentos

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= v_{20} + v_{02} \\
 \phi_2 &= (v_{20} - v_{02})^2 + 4(v_{11})^2 \\
 \phi_3 &= (v_{30} - 3v_{12})^2 + (3v_{21} - v_{03})^2 \\
 \phi_4 &= (v_{30} + v_{12})^2 + (v_{21} + v_{03})^2 \\
 \phi_5 &= (v_{30} - 3v_{12})(v_{30} + v_{12})((v_{30} + v_{12})^2 - 3(v_{21} + v_{03})^2) \\
 &\quad + (3v_{21} - v_{03})^2(3v_{21} + v_{03})(3(v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2) \\
 \phi_6 &= (v_{20} - v_{02})((v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2) + \\
 &\quad 4v_{11}(v_{30} + v_{12})(v_{21} + v_{03}) \\
 \phi_7 &= (3v_{21} - v_{03})(v_{30} + v_{12})((v_{30} + v_{12})^2 - 3(v_{21} + v_{03})^2) \\
 &\quad - (v_{30} - 3v_{12})(v_{21} + v_{03})(3(v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si reemplazamos los momentos geométricos por momentos centrales o normalizados en estas relaciones, obtenemos invariantes no solo de rotación sino también de traslación o escala, que al mismo tiempo aseguran la invariancia a la rotación alrededor de un punto arbitrario.

Para implementar a los momentos invariantes de Hu se utilizó la imagen de Lena, la cual está modificada con: traslación de la imagen, escala, rotación y reflexión, como se muestra en la Fig. 2.1. En la Tabla 2.1 se muestran los resultados en donde se demuestran que los momentos de Hu son invariantes, ya que la diferencia de los resultados es mínima.

| Momentos invariantes de HU | | | | |
|----------------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|---------------------|
| Momento | Imagen original | Imagen con traslación | Imagen escalada | Imagen rotada a 45° |
| ϕ_1 | 2.7819 | 2.7815 | 2.7819 | 2.7803 |
| ϕ_2 | 7.8439 | 7.8421 | 7.8439 | 7.7922 |
| ϕ_3 | 11.3759 | 11.3372 | 11.3759 | 11.1813 |
| ϕ_4 | 10.3359 | 10.3368 | 10.3359 | 10.3603 |
| ϕ_5 | 21.4269 | 21.4053 | 21.4259 | 21.4259 |
| ϕ_6 | -14.3467 | -14.3457 | -14.3467 | -14.3331 |
| ϕ_7 | 21.2817 | 21.2653 | 21.2817 | 21.1957 |

Tabla 2.1: Tabla de resultados adquiridos de los momentos invariantes de Hu de la imagen de Lena.

2. Teoría de momentos

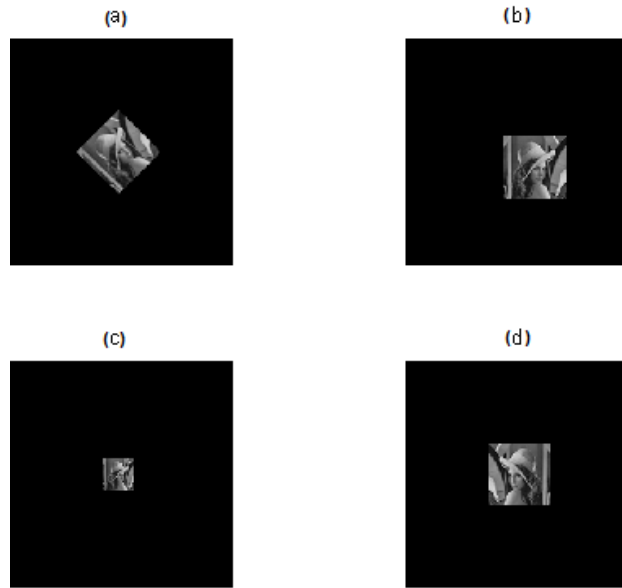


Figura 2.1: Transformaciones de la imagen original de Lena: (a) imagen rotada a 45 grados, (b) imagen trasladada, (c) imagen escalada en 0.25 en ambas dimensiones espaciales, (d) imagen reflejada.

2.3. Momentos complejos

Los momentos complejos C_{pq} de una función imagen están definidos de la siguiente manera,

$$C_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - jy)^{\frac{p+q}{2}} (x + jy)^{\frac{p-q}{2}} f(x, y) dx dy \quad (2.18)$$

Los momentos geométricos y los momentos complejos llevan la misma cantidad de información. También, los momentos complejos pueden ser expresados en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \\ y &= r \sin \theta, & \theta &= \arctan(y/x). \end{aligned}$$

A partir de la Ec.(2.18) los momentos complejos toman la forma,

$$C_{pq} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{p+1} \exp^{-jq\theta} f(r, \theta) dr d\theta, \quad (2.19)$$

2. Teoría de momentos

donde $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ y q toma cualquier valor entero positivo o negativo. A partir de la Ec. (2.19) se puede construir el invariante a la rotación de los momentos complejos, esto se hace calculando el valor absoluto de los momentos complejos en su forma radial,

$$\tilde{C}_{pq} = |C_{pq}|, \quad (2.20)$$

Para implementar los momentos complejos de la Ec.(2.20) se roto la imagen de Lena a $45^\circ, 90^\circ, 340^\circ$ como se muestra la Fig. 2.2. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.2, donde se puede apreciar que los momentos complejos son invariantes a la rotación.



Figura 2.2: Cambios del ángulo de rotación de la imagen de Lena para demostrar la invariancia a la rotación de los momentos complejos: a) imagen original, b) imagen rotada a 45 grados, c) imagen rotada a 90 grados, d) imagen rotada a 340 grados.

2. Teoría de momentos

| Momentos Complejos invariantes a la rotación. | | | | |
|---|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| Momento | Imagen original | Imagen rotada a 45° | Imagen rotada a 90° | Imagen rotada a 340° |
| \tilde{C}_{00} | 1.4855 | 1.4854 | 1.4855 | 1.4854 |
| \tilde{C}_{11} | 0.1090 | 0.1090 | 0.10909 | 0.1090 |
| \tilde{C}_{22} | 0.0685 | 0.0686 | 0.0685 | 0.0686 |
| \tilde{C}_{20} | 0.9039 | 0.9038 | 0.9039 | 0.9038 |
| \tilde{C}_{33} | 0.0434 | 0.0434 | 0.04341 | 0.04340 |
| \tilde{C}_{31} | 0.07529 | 0.07528 | 0.07529 | 0.07528 |

Tabla 2.2: Resultados obtenidos de los momentos complejos invariantes a la rotación de la imagen de Lena.

Los momentos centrales radiales de orden p con repetición q , \hat{C}_{pq} se define como,

$$\hat{C}_{pq} = \int \int_x y [(x - \bar{x}) - j(y - \bar{y})]^{(p+q)/2} [(x - \bar{x}) + j(y - \bar{y})]^{(p-q)/2} f(x, y) dx dy \quad (2.21)$$

donde $p - q$ es par y los centroides son calculados con la Ec.(2.5). Para no depender de los centroides de una imagen $(\bar{x}$ y $\bar{y})$, la Ec.(2.21) puede ser reescrita como,

$$\hat{C}_{pq} = \int \int_x y (K - A)^u (K^* - A^*)^v f(x, y) dx dy \quad (2.22)$$

donde $K = x - jy$, $A = \bar{x} - j\bar{y} = D_{11}/D_{00}$, $u = (p + q)/2$ y $v = (p - q)/2$. El kernel puede ser representado de la siguiente manera,

$$(K - A)^u = \sum_{m=0}^u \binom{u}{m} (K)^{u-m} (-A^*)^m \quad (2.23)$$

y,

$$(K^* - A^*)^v = \sum_{n=0}^v \binom{v}{n} (K^*)^{v-n} (-A^*)^n \quad (2.24)$$

por lo tanto, la Ec.(2.22) puede ser expresada en términos de,

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pq} &= \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^v \binom{u}{m} \binom{v}{n} (-A^*)^m (-A^*)^n \\ &\int \int_x y (K)^{u-m} (K^*)^{v-n} f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.25)$$

2. Teoría de momentos

Tomando la ecuación anterior, los momentos centrales radiales de orden p con repetición q se puede obtener como una serie de momentos radiales,

$$\widehat{C}_{pq} = \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^v \binom{u}{m} \binom{v}{n} (-A^*)^m (-A^*)^n C_{p'q'} \quad (2.26)$$

donde $p' = (u - m) + (v - n)$ y $q' = (u - m) - (v - n)$. A partir de la Ec.(2.26) se pueden definir los primeros 3 órdenes invariantes a la traslación [6],

orden 0 :

$$\widehat{C}_{00} = C_{00},$$

orden 1 :

$$\widehat{C}_{11} = C_{11} - AC_{00},$$

orden 2 :

$$\widehat{C}_{22} = C_{22} - 2AC_{11} + A^2C_{00},$$

$$\widehat{C}_{20} = C_{20} - A^*C_{11} - AC_{11}^* + AA^*C_{00},$$

orden 3 :

$$\widehat{C}_{33} = C_{33} - 3AC_{22} + 3A^2C_{11} - A^3C_{00},$$

$$\widehat{C}_{31} = C_{31} - A^*C_{22} - 2AC_{20} + 2AA^*C_{11} + A^2C_{11}^* - A^2A^*C_{00}.$$

(2.27)

Para poder aplicar la invariancia a la traslación de los momentos complejos en su forma radial, se utilizan las imágenes mostradas en la Fig. 2.3, donde se puede apreciar que la letra “E” se encuentra a diferentes posiciones. Los resultados de los primeros tres órdenes de los momentos invariantes a la traslación de la Fig. 2.3 se muestran en la Tabla 2.3 como se puede apreciar los valores son muy similares.

2. Teoría de momentos

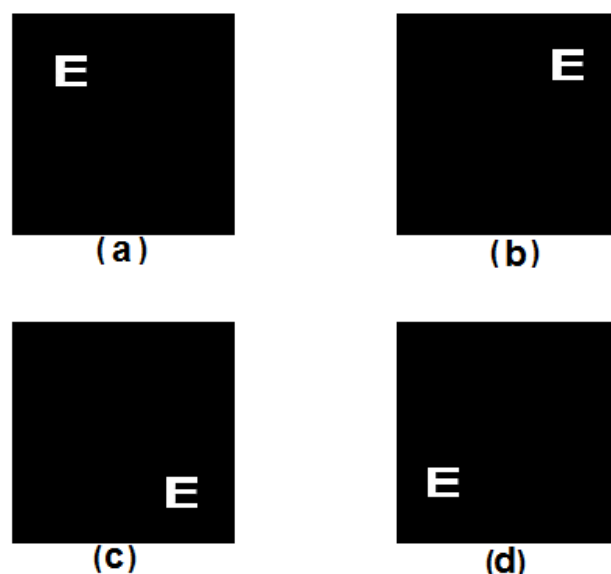


Figura 2.3: Cambios de traslación en imagen binaria de la letra E para demostrar la invariancia a la traslación de los momentos complejos: (a) $\Delta x = -210, \Delta y = 210$, (b) $\Delta x = 240, \Delta y = 240$, (c) $\Delta x = 270, \Delta y = -240$, (d) $\Delta x = -270, \Delta y = -240$.

| Momentos Complejos invariantes a la traslación. | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|
| Momento | Imagen (a) | Imagen (b) | Imagen (c) | Imagen (d) |
| \widehat{C}_{00} | 1.31255 | 1.3106 | 1.3113 | 1.3107 |
| \widehat{C}_{11} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| \widehat{C}_{22} | 0.01138 | 0.01449 | 0.01329 | 0.01432 |
| \widehat{C}_{20} | 0.7895 | 0.78641 | 0.78759 | 0.7865 |
| \widehat{C}_{33} | 0.00823 | 0.0114 | 0.0101 | 0.0112 |
| \widehat{C}_{31} | 0.01079 | 0.01090 | 0.01091 | 0.01095 |

Tabla 2.3: Tabla de los resultados obtenidos de los momentos complejos invariantes a la traslación de la imagen binaria de la letra E.

2.4. Momentos ortogonales

Los momentos son usados como descriptores en muchas aplicaciones de visión por computadora. Teague en 1980[7], introdujo los momentos con una función de base ortogonal. Éstos tiene la capacidad de caracterizar información con mínima redundancia a diferencia de los momentos que no tienen una base ortogonal y se generan utilizando polinomios ortogonales continuos y discretos. Los elementos de los momentos ortogonales con base ortogonal $P_{n,m}(x, y)$, satisfacen la siguiente condición de ortogonalidad,

$$\iint_{\Omega} P_{n,m}(x, y)P_{p,q}(x, y) = \delta_{n,p}\delta_{m,q}, \quad (2.28)$$

donde $\delta_{n,p}$ es el símbolo de Kronecker,

$$\delta_{n,p} = \begin{cases} 0, n \neq p \\ 1, n = p \end{cases}$$

Los momentos ortogonales se definen de la siguiente manera,

$$Q_{n,m} = \iint_{\Omega} P_{n,m}(x, y)f(x, y)dxdy \quad (2.29)$$

donde Ω es el área de ortogonalidad. El dominio puede estar definido en un rectángulo o en un círculo. La mayoría de los polinomios ortogonales pueden ser calculados con mayor estabilidad numérica mediante relaciones de recurrencia, a diferencia de los momentos geométricos, que utiliza potencias, las cuales aumentan su inestabilidad mientras los órdenes aumentan.

2.4.1. Momentos rectangulares

Los momentos ortogonales definidos en un rectángulo para una función $f(x, y)$ de tamaño $N \times M$ expresados por,

$$q_{n,m} = \iint_{\Omega} P_{n,m}(x, y)f(x, y)dxdy \quad (2.30)$$

donde $P_{n,m}(x, y)$ es el kernel de transformación, la cual consta de dos polinomios ortogonales $A_n(x)$ y $A_m(y)$, definidos como,

$$P_{n,m}(x, y) = A_n(x)A_m(y) \quad (2.31)$$

Las funciones $A_n(x)$ y $A_m(y)$ corresponden a una misma familia de polinomios ortogonales, pero de igual forma se pueden combinar diferentes familias de polinomios

2. Teoría de momentos

ortogonales. El kernel $P_{n,m}(x, y)$ puede estar compuesto por polinomios ortogonales continuos o discretos. Donde los polinomios discretos, tienen un mejor desempeño debido a que la imagen está definida en un espacio discreto, por lo que no requieren aproximaciones como es el caso de los polinomios continuos[8].

La reconstrucción de una imagen mediante estos momentos está dada por,

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L q_{n,m} A_n(x) A_m(y) \quad (2.32)$$

donde la función $\tilde{f}(x, y)$ es la imagen reconstruida de $f(x, y)$, L es el máximo orden los momentos rectangulares utilizados en la reconstrucción.

Los momentos ortogonales definidos en un rectángulo se pueden dividir en dos tipos, en momentos ortogonales continuos y en discretos, dependiendo de la función del Kernel $P_{n,m}(x, y)$ es ortogonal en dominios continuos o discreto. Por ejemplo los momentos de Legendre[9] y los momentos de Gaussian-Hermite[10] que son momentos ortogonales continuos. Los momentos ortogonales discretos incluyen principalmente a los momentos de Tchebichef[11], momentos de Krawtchouk[12], momentos de Hahn[13] y los momentos de Racah[14].

2.4.2. Momentos radiales

La expresión general para los momentos radiales de orden n y repetición m para una función imagen $f(r, \theta)$ en coordenadas polares está dada por,

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) P_{n,m}(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.33)$$

donde $P_{n,m}(r, \theta)$ es la función kernel, que consta de dos funciones: una de ellas es una familia de polinomios ortogonales $A_n(r)$ en la coordenada radial y la otra es una función exponencial compleja $\exp(jm\theta)$ en la coordenada angular, la función $P_{n,m}(r, \theta)$ está definida como,

$$P_{n,m}(r, \theta) = A_n(r) \exp(-jm\theta), \quad (2.34)$$

Además, la función kernel es ortogonal dentro, del círculo de radio unitario, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donde la condición de ortogonalidad es expresada por la siguiente función,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 P_{n,m}(r, \theta) P_{k,l}(r, \theta) r dr d\theta = \delta_{n,m} \delta_{k,l} \quad (2.35)$$

2. Teoría de momentos

Por otra parte, una imagen digital puede ser reconstruida por un número infinito de momentos radiales. La distribución discreta reconstruida de la imagen está dada por,

$$\tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L \phi_{n,m} P_{n,m}(r, \theta) \quad (2.36)$$

donde $\tilde{f}(r, \theta)$ es la imagen reconstruida de $f(r, \theta)$, y L es el máximo orden de momentos radiales utilizados en la reconstrucción de la imagen.

Para imágenes digitales, la Ec.(2,33) no puede ser aplicada directamente. Sea $f(r_{i,j}, \theta_{i,j})$ una imagen digital de tamaño $M \times N$. Sus momentos discretos $\phi_{n,m}$ están dados por,

$$\tilde{\phi}_{n,m} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \tilde{P}_{n,m}(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \quad (2.37)$$

donde las coordenadas polares discretas están expresadas por,

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \sqrt{x_i^2 + y_j^2} \quad r_{i,j} \leq 1 \\ \theta_{i,j} &= \arctan\left(\frac{y_j}{x_i}\right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

y las coordenadas son transformadas de la siguiente forma,

$$x_i = \frac{2i + 1 - N}{N}, \quad y_j = \frac{2j + 1 - M}{M} \quad (2.39)$$

donde $i = 0, \dots, M - 1$ y $j = 0, \dots, N - 1$. Cuando las integrales de Ec.(2,33) se sustituyen por sumatorias y la imagen se normaliza dentro del círculo unitario, es conocido como aproximación de orden cero o método directo.

Las características más importantes de los momentos radiales son la invariancia a la rotación, a la reflexión, y a la escala. Si consideramos una imagen $f(r, \theta - \gamma)$ que es rotada γ grados, esto da como resultado a los momentos $\phi_{n,m}^\gamma$, los cuales es relacionada con $\phi_{n,m}$ de la siguiente manera,

$$\phi_{n,m}^{\theta-\gamma} = \phi_{n,m} \exp(-jm\gamma) \quad (2.40)$$

Si se obtiene el módulo de los momentos radiales,

$$\left| \phi_{n,m}^{\theta-\gamma} \right| = \left| \phi_{n,m} \right|,$$

se comprueba la invariancia a la rotación. De la misma manera, si consideramos el caso general de la reflexión a través de una línea que pasa por el origen, que gira dentro de un ángulo positivo γ con respecto al eje y . La imagen puede ser representada como

2. Teoría de momentos

$f(r, 2\gamma - \theta)$, el hecho de que la transformación depende de 2γ , se da a que la línea de reflexión no tiene dirección única: sin cambios para 180° de rotación. La relación de los momentos radiales afectada por la reflexión está definida por,

$$\phi_{n,m}^{2\gamma-\theta} = \phi_{n,m} \exp(-j2m\gamma) \quad (2.41)$$

y por lo tanto, el módulo,

$$\left| \phi_{n,m}^{2\gamma-\theta} \right| = \left| \phi_{n,m} \right|,$$

es invariante a la reflexión. Los momentos radiales son invariantes a la escala por naturaleza, debido a que el radio unitario donde se define a la imagen tiene que ser remapeado dependiendo de las dimensiones de la imagen. En otras palabras, sin importar el tamaño de la imagen, siempre va estar definida dentro del radio unitario. Sin embargo, esto se cumple siempre y cuando no se utilicen aproximaciones en el cálculo de los momentos radiales. Además, los momentos radiales no tienen información redundante como los momentos geométricos y los momentos complejos.

Dentro de los momentos ortogonales radiales se encuentran principalmente: los momentos de Zernike[15], momentos pseudo-Zernike[16], momentos ortogonales de Fourier-Mellin[17], momentos Chebyshev-Fourier[18], momentos de Jacobi-Fourier[19], momentos de Bessel-Fourier[20], los momentos de Fourier armónico[21], los momentos de exponenciales de Fourier[22], momentos de Legendre desplazados[23].

2.5. Implementación de los momentos ortogonales con los polinomios de Legendre desplazados

Para llevar a cabo la implementación de los momentos ortogonales cartesianos y radiales, en reconstrucción de imágenes digitales se utilizan los momentos de Legendre desplazados en su forma cartesiana y los momentos de Legendre-Fourier en su forma radial, donde se utilizó a la imagen Lena de 100×100 como imagen de prueba Fig. 2,4.

2. Teoría de momentos



Figura 2.4: Imagen de prueba.

Para el cómputo de los momentos se utilizó la relación recursiva de los polinomios de Legendre desplazados, la cual está definida de la siguiente manera,

$$a_n L_n(r) = (2r - 1)L_{n-1}(r) - a_{n-1}L_{n-2}(r) \quad (2.42)$$

donde $r \in [0, 1]$, y el coeficiente a_n es calculado como,

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}} \quad (2.43)$$

Para el cálculo inicial, el orden cero y el primer orden normalizado está dado por,

$$L_0(r) = 1, \quad (2.44)$$

$$L_1(r) = \sqrt{3}(2r - 1) \quad (2.45)$$

La función radial $L_n(r)$ satisface la propiedad de ortogonalidad dada por,

$$\int_0^1 L_n(r)L_m(r)dr = \delta_{n,m} \quad (2.46)$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta Kronecker, tal que:

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (2.47)$$

Para medir el desempeño de los momentos ortogonales se utiliza el error de reconstrucción normalizado de la imagen conocido como *NIRE* por sus siglas en inglés,

2. Teoría de momentos

el cual es calculado mediante el error cuadrático medio normalizado de la imagen original $f(i, j)$ y la imagen reconstruida $\tilde{f}(i, j)$, la cual su definición discreta está dada de la siguiente manera,

$$NIRE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [f(i, j) - \tilde{f}(i, j)]^2}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f^2(i, j)} \quad (2.48)$$

2.5.1. Momentos de Legendre desplazados

Los momentos de Legendre desplazados para una imagen $f(x, y)$ están definidos de la siguiente manera,

$$L_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) P_{n,m}(x, y) dx dy \quad (2.49)$$

donde la función del kernel de los momentos de Legendre está dado por,

$$P_{n,m}(x, y) = L_n(x) L_m(y) \quad (2.50)$$

donde,

$$\begin{aligned} x &= \frac{i}{N}, & i &= 0, 1, 2, \dots, N \\ y &= \frac{j}{M}, & j &= 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Para la reconstrucción de una imagen digital $\tilde{f}(x, y)$ a través de los momentos de Legendre desplazados, se utiliza la siguiente expresión,

$$\tilde{f}(i, j) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L P_{n,m}(x, y) L_{n,m} \quad (2.51)$$

En la Fig 2,5 se muestra la reconstrucción de la imagen y el error de reconstrucción de la imagen de prueba a través de los momentos de Legendre desplazados.

2. Teoría de momentos

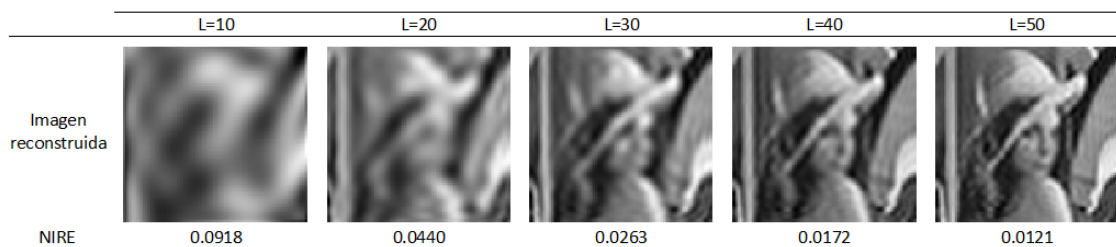


Figura 2.5: Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Lena” de tamaño 100×100 píxeles con los momentos de Legendre. El orden máximo de momentos aumenta de 10 a 50.

En la Fig,2,6 se muestra la gráfica del error NIRE de la imagen reconstruida. Como se puede apreciar en la gráfica, el error de reconstrucción disminuye al aumentar el orden de los momentos.

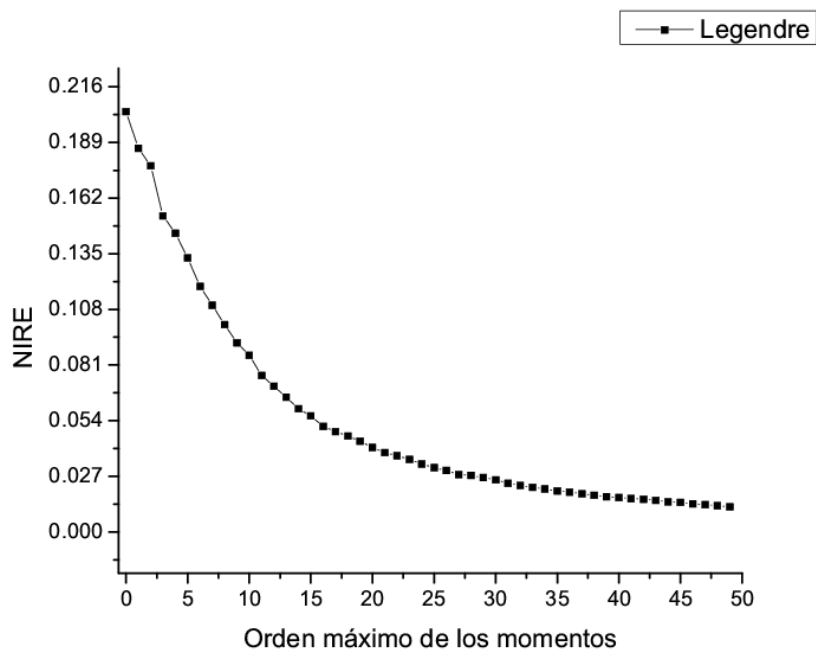


Figura 2.6: Error de reconstrucción NIRE de la imagen en escala de grises “Lena” con los momentos de Legendre.

2. Teoría de momentos

2.5.2. Momentos de Legendre-Fourier

La expresión para los momentos de Legendre-Fourier de orden n y repetición m , para una función imagen $f(r, \theta)$ en coordenadas polares está dada por,

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) P_{n,m}(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.52)$$

donde $P_{n,m}(r, \theta)$ es la función del kernel, que consta de dos funciones: el polinomio ortogonal de Legendre desplazado $L_n(r)$ y el factor exponencial de Fourier $\exp(-jm\theta)$,

$$P_{n,m}(r, \theta) = L_n(r) \exp(-jm\theta) \quad (2.53)$$

Por otra parte, de acuerdo con la teoría ortogonal, la función imagen $f(r, \theta)$ puede ser reconstruida por un número infinito de órdenes de los momentos de Legendre-Fourier. La distribución discreta de la imagen está dada por,

$$\tilde{f}(r, \theta) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{n,m} L_n(r) \exp(jm\theta) \quad (2.54)$$

donde $\tilde{f}(r, \theta)$ es la función reconstruida de la función $f(r, \theta)$ y L es el orden máximo usado en la reconstrucción de la imagen.

Para la implementación de los momentos de Legendre-Fourier en la reconstrucción de la imagen de la Fig. 2.4 se realiza mediante la Ec. 2.54, teniendo como resultados los que se muestran en la Fig.2.7.

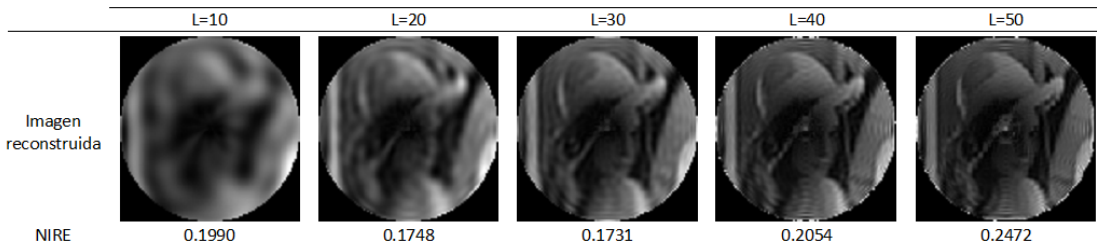


Figura 2.7: Imagen reconstruida de “Lena” con los momentos de Legendre-Fourier para distintos ordenes L .

El comportamiento del error de reconstrucción (NIRE) a través del incremento del orden de los momentos de Legendre-Fourier se presenta en la Fig. 2,8.

2. Teoría de momentos

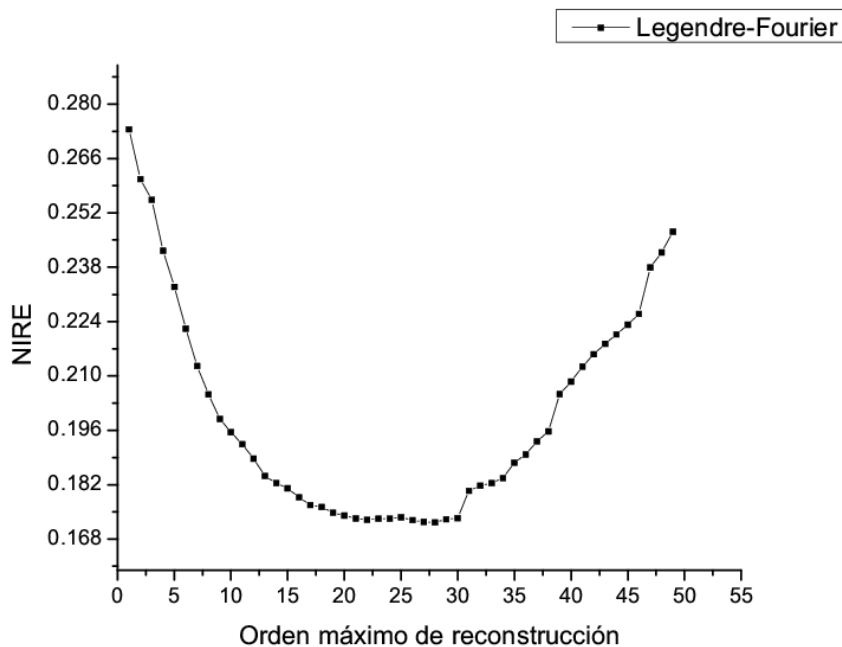


Figura 2.8: Error de reconstrucción NIRE de la imagen en escala de grises “Lena” con los momentos de Legendre-Fourier.

En base a los resultados obtenidos del error de reconstrucción de la Fig.2.6 se puede apreciar que el error de reconstrucción aumenta cuando el orden $L=30$ ocasionando que la imagen reconstruida se oscurezca perdiendo el contraste. Además, no se llega a reconstruir el contorno del radio unitario. Comparando los resultados obtenidos de la Fig.2.6 con los resultados de la Fig.2.8 de la reconstrucción de la imagen de Lena, los momentos de Legendre tienen mejor desempeño debido a que son ortogonales en coordenadas cartesianas y se evita el error de mapeo (generado por transformación de mapeo) durante el cálculo de los momentos. Los resultados obtenidos se pueden comparar con los resultados reportados por B. Xiao et al. [23], los cuales tienen un comportamiento similar con los resultados presentados en este trabajo de tesis en donde el error de reconstrucción aumenta a partir de $L=25$.

Bibliografía

- [1] Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2016). 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley & Sons.
- [2] White, D. J., Svelling, C., & Strachan, N. J. C. (2006). Automated measurement of species and length of fish by computer vision. *Fisheries Research*, 80(2-3), 203-210.
- [3] Zhang, F., Liu, S. Q., Wang, D. B., & Guan, W. (2009). Aircraft recognition in infrared image using wavelet moment invariants. *Image and Vision Computing*, 27(4), 313-318.
- [4] Dominguez, S. (2013). Image analysis by moment invariants using a set of step-like basis functions. *Pattern Recognition Letters*, 34(16), 2065-2070.
- [5] Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE transactions on information theory*, 8(2), 179-187.
- [6] Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2003). Translation invariants of Zernike moments. *Pattern recognition*, 36(8), 1765-1773.
- [7] Teague, M. R. (1980). Image analysis via the general theory of moments. *JOSA*, 70(8), 920-930.
- [8] Mukundan, R., Ong, S. H., & Lee, P. A. (2001). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing*, 10(9), 1357-1364.
- [9] Teague, M. R. (1980). Image analysis via the general theory of moments. *JOSA*, 70(8), 920-930.
- [10] Yang, B., Flusser, J., & Suk, T. (2015). 3D rotation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*, 54, 18-26.
- [11] Mukundan, R., Ong, S. H., & Lee, P. A. (2001). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing*, 10(9), 1357-1364.

BIBLIOGRAFÍA

- [12] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2003). Image analysis by Krawtchouk moments. *IEEE Transactions on image processing*, 12(11), 1367-1377.
- [13] Yap, P. T., Paramesran, R., & Ong, S. H. (2007). Image analysis using Hahn moments. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 29(11).
- [14] Zhu, H., Shu, H., Liang, J., Luo, L., & Coatrieux, J. L. (2007). Image analysis by discrete orthogonal Racah moments. *Signal Processing*, 87(4), 687-708
- [15] Singh, C., Walia, E., & Upneja, R. (2013). Accurate calculation of Zernike moments. *Information Sciences*, 233, 255-275.
- [16] Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2003). The scale invariants of pseudo-Zernike moments. *Pattern Analysis & Applications*, 6(3), 176-184.
- [17] Sheng, Y., & Shen, L. (1994). Orthogonal Fourier–Mellin moments for invariant pattern recognition. *JOSA A*, 11(6), 1748-1757.
- [18] Ping, Z., Wu, R., & Sheng, Y. (2002). Image description with Chebyshev–Fourier moments. *JOSA A*, 19(9), 1748-1754.
- [19] Zhu, H., Yang, Y., Gui, Z., Zhu, Y., & Chen, Z. (2016). Image analysis by generalized Chebyshev–Fourier and generalized pseudo-Jacobi–Fourier moments. *Pattern Recognition*, 51, 1-11.
- [20] Xiao, B., Ma, J. F., & Wang, X. (2010). Image analysis by Bessel–Fourier moments. *Pattern Recognition*, 43(8), 2620-2629.
- [21] Ren, H., Ping, Z., Bo, W., Wu, W., & Sheng, Y. (2003). Multidistortion-invariant image recognition with radial harmonic Fourier moments. *JOSA A*, 20(4), 631-637.
- [22] Xiao, B., Li, W. S., & Wang, G. Y. (2015). Errata and comments on “Orthogonal moments based on exponent functions: Exponent-Fourier moments”. *Pattern Recognition*, 48(4), 1571-1573.
- [23] Xiao, B., Wang, G. Y., & Li, W. S. (2014). Radial shifted Legendre moments for image analysis and invariant image recognition. *Image and Vision Computing*, 32(12), 994-1006.

Capítulo 3

Polinomios genéricos de orden fraccional

3.1. Introducción

En 1954 Bhatia y Wolf [1] mencionan que existe un número infinito de polinomios ortogonales radiales que se pueden obtener a partir de los polinomios genéricos de Jacobi. La variación de los parámetros α y β de los polinomios de Jacobi puede producir diferentes conjuntos de momentos ortogonales [2][3], tales como: momentos ortogonales de Mellin-Fourier ($\alpha = \beta = 2$)[4], momentos de Chebychev-Fourier ($\alpha = 2, \beta = 3/2$) [5], momentos pseudo-Jacobi-Fourier ($\alpha = 4, \beta = 3$) y los momentos de Legendre-Fourier ($\alpha = \beta = 1$). En el 2005, Ping et al. [5] nombra a los momentos de Jacobi-Fourier como momentos radiales genéricos y sugiere que la formulación de momentos radiales a través de los polinomios de Jacobi será un beneficio en su rendimiento y la búsqueda de un momento radial determinante, es decir, que tenga un buen desempeño para cualquier tipo de imágenes. En este capítulo de tesis, se propone un nuevo conjunto de momentos genéricos circulares de orden fraccional a partir de los polinomios genéricos de Jacobi y además se obtienen diferentes familias de momentos circulares conocidos de orden fraccional variando los valores de α y β .

3.2. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi satisfacen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{\alpha, \beta}(x) + [-(2 + \alpha + \beta)x + \alpha - \beta] \frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) + n[n + 1 + \alpha + \beta] P_n^{\alpha, \beta}(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde $n \in \mathbb{N}$. La solución de la ecuación diferencial satisface la siguiente condición,

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} \quad (3.2)$$

donde $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ son los denominados polinomios de Jacobi. Con esta condición, la relación entre los polinomios de Jacobi y la función hipergeométrica está asociada como,

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2}). \quad (3.3)$$

Dependiendo de los valores de α y β , los polinomios de Jacobi pueden generar diferentes familias de polinomios conocidos, tales como: Polinomios de Chebyshev de primera especie ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$), Polinomios de Chebyshev de segunda especie ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$), Polinomios de Chebyshev de tercera especie ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$), Polinomios de Chebyshev de cuarta especie ($\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$), Polinomios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$) y los Polinomios ultraesféricos o Polinomios de Gegenbauer ($\alpha = \beta$).

Los polinomios clásicos de Jacobi se han utilizado en análisis matemático y aplicaciones prácticas [6, 7, 8, 9]. En particular, los polinomios de Legendre y Chebyshev han desempeñado un papel importante en métodos espectrales para ecuaciones diferenciales parciales [10, 11, 12]. Existe un gran interés en el uso de aproximaciones espectrales con polinomios de Jacobi, especialmente para problemas con coeficientes degenerados o singulares. Por ejemplo, Bernardi y Maday [13] consideraron aproximaciones espectrales utilizando los polinomios ultraesféricos en espacios de Sobolev ponderados. Guo [14, 15, 16] desarrolló aproximaciones de Jacobi en ciertos espacios de Hilbert con sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales singulares y algunos problemas en intervalos infinitos. Recientemente, los polinomios de Jacobi han sido modificados para ser utilizados en el análisis de imágenes mediante la teoría de los momentos.

Recientemente, los polinomios desplazados de Jacobi son utilizados como kernels de los momentos circulares para el análisis de imágenes, los cuales están definidos como,

$$J_n(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{\omega(\alpha, \beta, r)}{b_n(\alpha, \beta)}} G_n(\alpha, \beta, r), \quad (3.4)$$

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

donde $G_n(\alpha, \beta, r)$ son los polinomios de Jacobi, $b_n(\alpha, \beta)$ es la constante de normalización y $\omega(\alpha, \beta, r)$ es la función peso. Las expresiones anteriores se calculan de la siguiente manera,

$$G_n(\alpha, \beta, x) = \frac{n!(\beta - 1)!}{(\alpha + n - 1)!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \times \frac{(\alpha + n + s - 1)}{(n - s)!s!\Gamma(\beta + s - 1)!} x^s \quad (3.5)$$

$$b_n(\alpha, \beta) = \frac{n![(\beta - 1)!]^2(\alpha - \beta + n + 1)!}{(\beta + n - 1)!(\alpha + n - 1)!(\alpha + 2n)} \quad (3.6)$$

$$\omega(a, \beta, r) = (1 - r)^{\alpha - \beta} r^{\beta - 1} \quad a - \beta > -1 \text{ y } \beta > 0 \quad (3.7)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, $\alpha - \beta > -1$, y $\beta > 0$. En la literatura existen, dos definiciones diferentes de los polinomios de Jacobi $G_n(\alpha, \beta, r)$ y de la constante de normalización $b_n(\alpha, \beta)$; la primera está dada por Abramowitz y Stegun [17] y la segunda está dada por Bhatia y Wolf [18], las cuales generan cierta confusión. Sin embargo, ambas definiciones presentan las mismas propiedades y el mismo rendimiento descriptivo [19]. En este trabajo de tesis usamos la definición de Bhatia y Wolf que es usada en trabajos anteriores [20, 21]. Por otra parte, los polinomios desplazados de Jacobi son ortogonales en el intervalo $[0, 1]$,

$$\int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r) J_m(\alpha, \beta, r) dr = \delta_{nm} \quad (3.8)$$

donde δ_{nk} es la delta de Kronecker. Por otra parte, el cálculo directo de los polinomios de Jacobi, especialmente el cálculo de los factoriales en las Ec.(3.5) y Ec.(3.6) aumentan el tiempo de cómputo y solamente es preciso para factoriales menores que 21 [22]. Para resolver este problema, Upneja y Singh [20] proponen una relación de recurrencia libre de factoriales y de la función gamma. Sin embargo, contienen una errata, que es corregida por Sáez Landete[23]. La relación de recurrencia propuesta por Upneja y Singh se define de la siguiente manera,

$$J_n(\alpha, \beta, r) = \sqrt{(\alpha + 2n)\omega(\alpha, \beta, r)} A_n P_n(\alpha, \beta, r) \quad (3.9)$$

donde $P_n(\alpha, \beta, r)$ se calcula mediante la siguiente relación de recurrencia,

$$P_n(\alpha, \beta, r) = (L_1 r + L_2) P_{n-1}(\alpha, \beta, r) + L_3 P_{n-2}(\alpha, \beta, r) \quad (3.10)$$

donde,

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$L_1 = -\frac{(2n + \alpha - 1)(2n + \alpha - 2)}{n(\beta + n - 1)}, \quad (3.11)$$

$$L_2 = (\alpha + 2n - 2) + \frac{(n - 1)(\beta + n - 2)}{(\beta + 2n - 3)}L_1, \quad (3.12)$$

$$L_3 = \frac{(\alpha + 2n - 4)(\alpha + 2n - 3)}{2} + \frac{(\beta + 2n - 3)(n - 2)}{2}L_1 - (\alpha + 2n - 4)L_2. \quad (3.13)$$

Los polinomios de orden cero y orden uno están dados por,

$$P_0(\alpha, \beta, r) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}, \quad (3.14)$$

$$P_1(\alpha, \beta, r) = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\Gamma(\beta)} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\beta}r\right). \quad (3.15)$$

Finalmente, el coeficiente $A_n(\alpha, \beta)$ es calculado mediante la siguiente relación,

$$A_n(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{n(\beta + n - 1)}{(\alpha + n - 1)(\alpha - \beta + n)}} A_{n-1}(\alpha, \beta) \quad (3.16)$$

donde la condición inicial de $A_n(\alpha, \beta)$ es dada por,

$$A_0(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - \beta + 1)}} \quad (3.17)$$

Por otra parte, Camacho-Bello et al.[22] proponen una relación de recurrencia de los polinomios de Jacobi más simplificada que la propuesta de Upneja y Singh[20]. La relación de recurrencia está dada por,

$$D_n J_n(\alpha, \beta, r) = (2r - 1 - C_n)J_{n-1}(\alpha, \beta, r) - D_{n-1}J_{n-2}(\alpha, \beta, r) \quad (3.18)$$

donde,

$$C_n = \frac{(\alpha - 1)(2\beta - \alpha - 1)}{(2n + \alpha - 1)(2n + \alpha - 3)} \quad (3.19)$$

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$D_n = \sqrt{\frac{4n(n + \alpha - \beta)(n + \beta - 1)(n + \alpha - 1)}{(2n + \alpha - 1)^2(2n + \alpha)(2n + \alpha - 2)}} \quad (3.20)$$

donde los valores iniciales de $J_n(\alpha, \beta, r)$ están dados por,

$$J_0(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{\omega(\alpha, \beta, r)}{b_0(\alpha, \beta)}} \quad (3.21)$$

$$J_1(\alpha, \beta, r) = J_0(\alpha, \beta, r) \sqrt{\frac{(\alpha + 2)\beta}{\alpha - \beta + 1} \left(\frac{\alpha + 1}{\beta} r - 1 \right)} \quad (3.22)$$

Los primeros 3 polinomios de Jacobi para diferentes valores de α y β se muestran en las Tablas 3.1-3.3.

| | |
|-------------------------|---|
| $J_0(\alpha, \beta, r)$ | 1 |
| $J_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{3}(2r - 1)$ |
| $J_2(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{45}(2r - 1)^2 - \sqrt{5})$ |

Tabla 3.1: Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = \beta = 1$.

| | |
|-------------------------|---|
| $J_0(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{2r}$ |
| $J_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{r}(6r - 4)$ |
| $J_2(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{r}{6}}((2r - 16/15)(30r - 20) - 10/3)$ |

Tabla 3.2: Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = \beta = 2$.

| | |
|-------------------------|--|
| $J_0(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}$ |
| $J_1(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}(4r - 2)$ |
| $J_2(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}((4r - 2)^2 - 1)$ |

Tabla 3.3: Polinomios de Jacobi cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$.

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

En la Fig. 3.1 se muestra la comparación del tiempo de cómputo de la relación de recurrencia de Camacho-Bello et al.[22] y la propuesta por Upneja y Singh[20] para los polinomios de Jacobi.

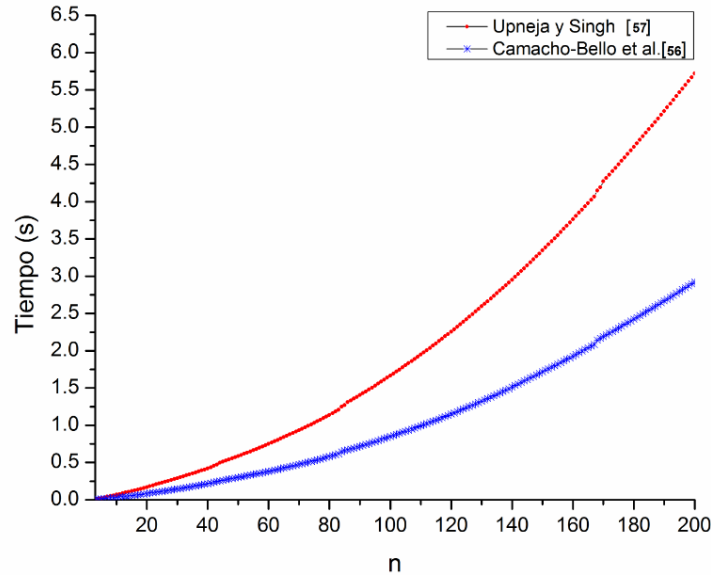


Figura 3.1: Comparación del tiempo de cómputo de la relación de recurrencia de Camacho-Bello et al con la propuesta por Upneja y Singh de los polinomios desplazados de Jacobi con diferentes órdenes n y $\Delta r = 1/100000$.

3.3. Polinomios ortogonales radiales sustituidos y pesados de Jacobi

A partir de los polinomios ortogonales clásicos, se pueden generar dos tipos de polinomios ortogonales radiales: los polinomios ortogonales radiales pesados y los polinomios ortogonales radiales sustituidos. Bin Xiao et al.[24], demuestran que los polinomios sustituidos utilizados como kernel de los momentos ortogonales circulares tienen un mejor rendimiento que la definición basada en polinomios pesados para los momentos de Legendre-Fourier. La diferencia de los polinomios ortogonales radiales pesados y los polinomios ortogonales radiales sustituidos depende de la forma de cómo se define la parte radial de los momentos, es decir, los polinomios ortogonales junto con el Jacobiano que es introducido por el cambio de variable de coordenadas cartesianas a coordenadas polares para cumplir la condición de ortogonalidad. En trabajos previos [19, 22, 23, 21, 20, 25], utilizan los polinomios ortogonales radiales pesados, definidos de la siguiente manera,

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$\widehat{J}(\alpha, \beta, r) = \frac{J_n(\alpha, \beta, r)}{\sqrt{r}}, \quad r \neq 0 \quad (3.23)$$

Tal que, la condición de ortogonalidad de la Ec. (3.8) se reescribe como,

$$\int_0^1 \widehat{J}_n(\alpha, \beta, r) \widehat{J}_m(\alpha, \beta, r) r dr = \int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r) J_m(\alpha, \beta, r) dr = \delta_{nm} \quad (3.24)$$

Lema 2: La relación de recurrencia de los polinomios radiales pesados de Jacobi está definida por,

$$\widehat{J}_n(\alpha, \beta, r) = (2r - 1 - C_n) \widehat{J}_{n-1}(\alpha, \beta, r) - D_{n-1} \widehat{J}_{n-2}(\alpha, \beta, r) \quad (3.25)$$

donde D_n y C_n se calculan mediante las Ec. (3.19) y Ec. (3.20). y los valores iniciales están dados por,

$$\widehat{J}_0(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{\omega(\alpha, \beta, r)}{b_0(\alpha, \beta) r}} \quad (3.26)$$

$$\widehat{J}_1(\alpha, \beta, r) = \widehat{J}_0(\alpha, \beta, r) \sqrt{\frac{(\alpha + 2)\beta}{\alpha - \beta + 1} \left(\frac{\alpha + 1}{\beta} r - 1 \right)} \quad (3.27)$$

Los primeros 3 polinomios de Jacobi pesados para diferentes valores de α y β se muestran en las Tablas 3.4-3.6.

| | |
|-----------------------------------|---|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{1}{r}}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{3}{r}}(2r - 1)$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{1}{2\sqrt{r}}(\sqrt{45}(2r - 1)^2 - \sqrt{5})$ |

Tabla 3.4: Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = \beta = 1$.

| | |
|-----------------------------------|---|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{2}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $(6r - 1)$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{1}{6}}((2r - 16/15)(30r - 20) - 10/3)$ |

Tabla 3.5: Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = \beta = 2$.

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

| | |
|-----------------------------------|--|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi r}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi r}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}(4r - 2)$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{4}{\sqrt{3\pi r}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}((4r - 2)^2 - 1)$ |

Tabla 3.6: Polinomios de Jacobi pesados cuando $\alpha = 2$, $\beta = 3/2$.

Por otra parte, con la ayuda de los polinomios de Jacobi, se puede obtener los polinomios radiales substituidos de Jacobi mediante la siguiente relación,

$$\widetilde{J}_n(\alpha, \beta, r) = \sqrt{2}J_n(\alpha, \beta, r^2) \quad (3.28)$$

Teorema 1: *Los polinomios radiales substituidos de Jacobi son ortogonales en el intervalo $[0,1]$,*

$$\int_0^1 \widetilde{J}_n(\alpha, \beta, r)\widetilde{J}_m(\alpha, \beta, r)rdr = \delta_{nm} \quad (3.29)$$

Prueba: Sustituyendo la Ec.(3.28) en la Ec. (3.29), y con la ayuda de la Ec. (3.8), se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \widetilde{J}_n(\alpha, \beta, r)\widetilde{J}_m(\alpha, \beta, r)rdr &= \int_0^1 \sqrt{2}J_n(\alpha, \beta, r^2)\sqrt{2}J_m(\alpha, \beta, r^2)rdr \\ &= \int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r^2)J_m(\alpha, \beta, r^2)2rdr \\ &= \int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r^2)J_m(\alpha, \beta, r^2)dr^2 \\ &= \int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r)J_m(\alpha, \beta, r)dr \\ &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

Lema 2: *La relación de recurrencia de los polinomios radiales substituidos de Jacobi está dado por,*

$$D_n \widetilde{J}_n(\alpha, \beta, r) = (2r^2 - 1 - C_n)\widetilde{J}_{n-1}(\alpha, \beta, r) - D_{n-1}\widetilde{J}_{n-2}(\alpha, \beta, r) \quad (3.30)$$

donde D_n y C_n se calculan mediante las Ec. (3.19) y Ec. (3.20). Los valores iniciales están dados por,

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$\tilde{J}_0(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{2\omega(\alpha, \beta, r^2)}{b_0(\alpha, \beta)}} \quad (3.31)$$

$$\tilde{J}_1(\alpha, \beta, r) = \tilde{J}_0(\alpha, \beta, r) \sqrt{\frac{(\alpha + 2)\beta}{\alpha - \beta + 1} \left(\frac{\alpha + 1}{\beta} r^2 - 1 \right)} \quad (3.32)$$

Los primeros 3 polinomios de Jacobi sustituidos para diferentes valores de α y β se muestran en las Tablas 3.7-3.9.

| | |
|---------------------------------|--|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{2}$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{6}(2r^2 - 1)$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{90}(2r - 1)^2 - \sqrt{10})$ |

Tabla 3.7: Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = \beta = 1$.

| | |
|---------------------------------|--|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $2r$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{2}(6r^2 - 4)$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}((2r^3 - 16r/15)(30r^3 - 20r) - 10r/3)$ |

Tabla 3.8: Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = \beta = 2$.

| | |
|---------------------------------|---|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, r)$ | $4\sqrt{\frac{2}{3\pi}}(r^2 - r^4)^{\frac{1}{4}}$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}(r^2 - r^4)^{\frac{1}{4}}(16r^2 - 8)$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, r)$ | $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}(r - r^2)^{\frac{1}{4}}(4(4r - 2)^2 - 4)$ |

Tabla 3.9: Polinomios de Jacobi sustituidos cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$.

Prueba: Al multiplicar $\sqrt{2}$ por Ec. (3.18) y reemplazando $r \rightarrow r^2$, y utilizando la Ec. (3.28), se tiene que,

$$D_n \sqrt{2} J_n(\alpha, \beta, r^2) = (2r^2 - 1 - C_n) \sqrt{2} J_{n-1}(\alpha, \beta, r^2) - D_{n-1} \sqrt{2} J_{n-2}(\alpha, \beta, r^2)$$

$$D_n \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r) = (2r^2 - 1 - C_n) \tilde{J}_{n-1}(\alpha, \beta, r) - D_{n-1} \tilde{J}_{n-2}(\alpha, \beta, r)$$

En las Fig. (3.2), Fig. (3.3) y Fig. (3.4) se muestran las diferentes definiciones de los polinomios de Jacobi.

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

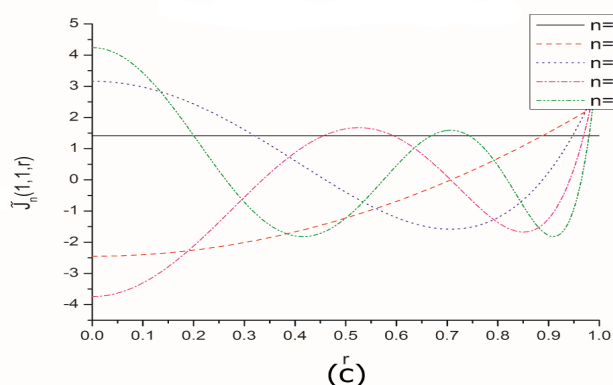
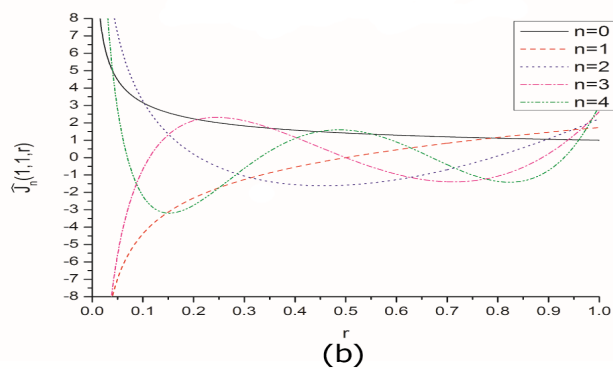
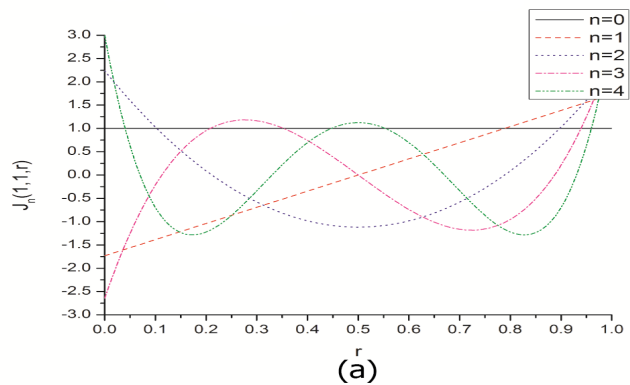


Figura 3.2: Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=\beta=1$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Legendre), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Legendre), (c) Polinomios sustituidos radiales de Jacobi (Polinomios sustituidos radiales de Legendre).

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

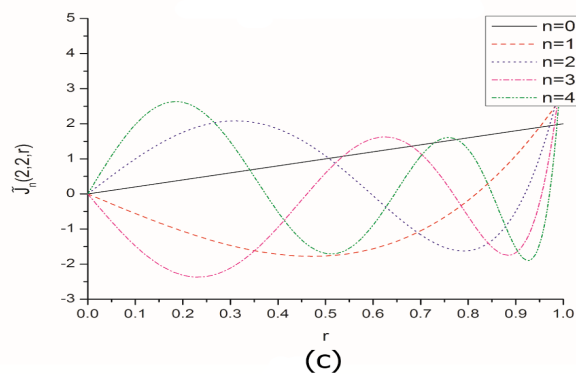
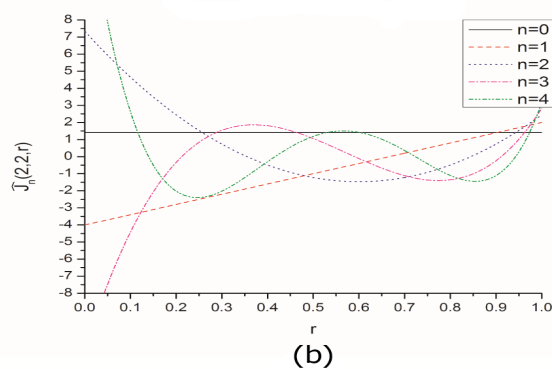
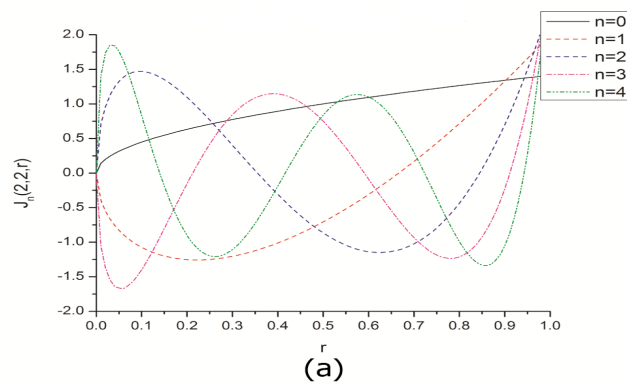


Figura 3.3: Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=\beta=2$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Mellin), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Mellin), (c) Polinomios sustituidos radiales de Jacobi (Polinomios sustituidos radiales de Mellin).

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

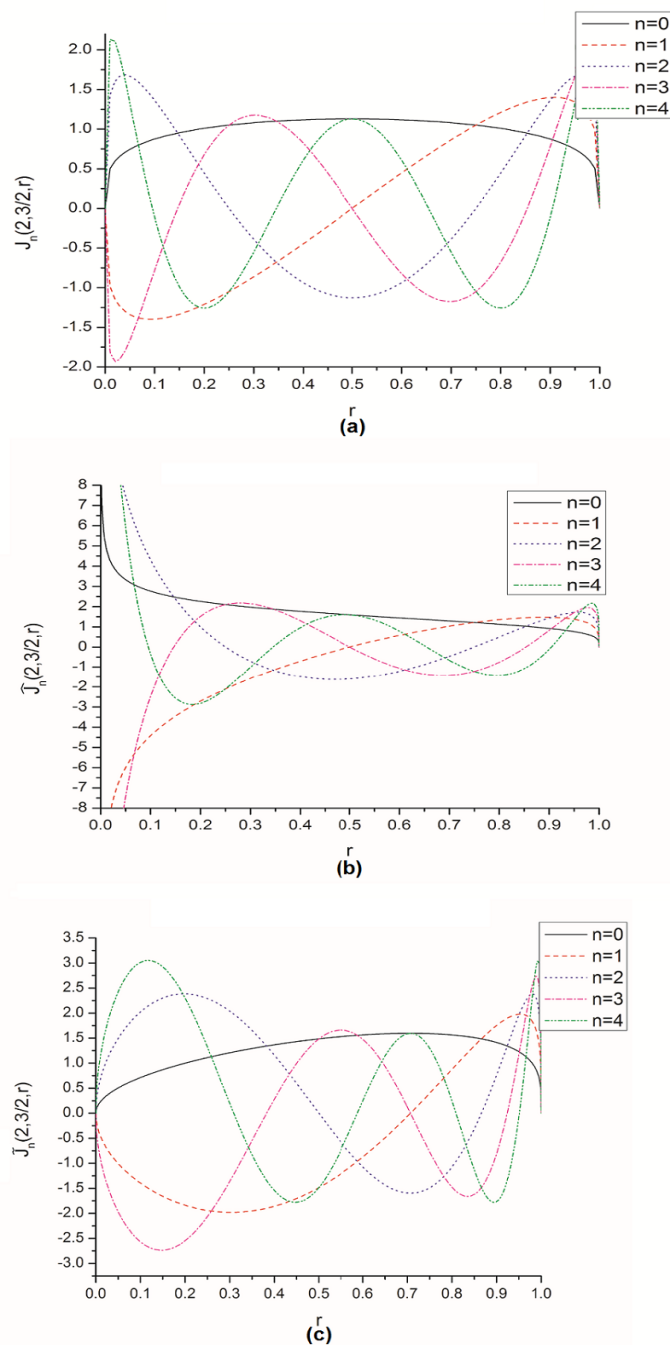


Figura 3.4: Gráficas de las diferentes formas de los polinomios de Jacobi con $\alpha=2, \beta=3/2$: (a) Polinomios clásicos de Jacobi (Polinomios de Chebychev), (b) Polinomios pesados radiales de Jacobi (Polinomios pesados radiales de Chebychev), (c) Polinomios substituidos radiales de Jacobi (Polinomios substituidos radiales de Chebychev).

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

En las Figs.3.2-3.4 se pueden visualizar las diferentes definiciones de los polinomios de Jacobi con diferentes valores de α y β . En donde se puede apreciar que en las gráficas de los polinomios genéricos de Jacobi (Fig.3.2a, Fig.3.3a, y la Fig.3.4a) los ceros del polinomio están distribuidos a lo largo del eje radial. Por otra parte cuando r tiende a cero los polinomios de Jacobi pesados tienden a infinito. Finalmente, los resultados de la Fig.3.2a son similares a los de la Fig.3.2c, con la diferencia de que, estos se desplazan hacia la derecha, asimismo la Fig.3.3a comparada con la Fig.3.3c y las Fig.3.4a con la Fig.3.4c presentan el mismo comportamiento.

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

3.4. Polinomios de Jacobi de orden fraccional

A.H.Bhrawy y M.A.Zaky [26] proponen los polinomios ortogonales desplazados de Jacobi de orden fraccional basados en los polinomios desplazados de Jacobi, a partir de una nueva fórmula que expresa explícitamente cualquier derivada de orden fraccional, en términos de los polinomios ortogonales desplazados de Jacobi de orden fraccional, que permite resolver de forma directa las ecuaciones diferenciales fraccionales lineales y no lineales de tipo Caputo utilizando, el método de Jacobi Tau desplazado de orden fraccional y método de colocación de Jacobi de orden fraccional desplazado. Además, utilizaron métodos espectrales basados en los polinomios de Jacobi de orden fraccional para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de orden fraccional. También, son utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccional, tales como; la ecuación diferencial fraccional de Riccati y la ecuación no homogénea de Bagley-Torvik.

Recientemente los polinomios ortogonales de orden fraccional han sido utilizados para el análisis de imágenes. Bin Xiao [24] propone los momentos desplazados de Legendre de orden fraccional y los momentos de Legendre-Fourier para la extracción de características de una región de interés y para el reconocimiento de rostros. Por otra parte, J. Yang et al. [27] proponen los momentos de Zernike de orden fraccional invariantes a la rotación y robustos al ruido. Al mismo tiempo H. Zhang et al. [28] definen a los momentos Mellin-Fourier de orden fraccional para el reconocimiento de patrones y a su vez proponen una relación de recurrencia para reducir el tiempo de cómputo y mejorar la estabilidad numérica de los momentos de Mellin-Fourier de orden fraccional. Los momentos definidos por H. Zhang et al. tienen una mejor capacidad descriptiva y son más robustos al ruido, especialmente en imágenes de menor tamaño.

En este trabajo de tesis se proponen utilizar como kernels los polinomios desplazados de Jacobi sustituidos y pesados que están definidos de la siguiente manera,

$$\tilde{P}_{\tilde{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) = \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \tilde{J}_{\tilde{n}}(\alpha, \beta, r^{\gamma}) \quad (3.33)$$

$$\hat{P}_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) = \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \hat{J}_{\hat{n}}(\alpha, \beta, r^{\gamma}) \quad (3.34)$$

donde $\gamma > 0$, \tilde{n} y \hat{n} es el orden fraccional de los polinomios dado por $\gamma(n+1) - 1$. En el Teorema 1 se muestra la condición de ortogonalidad de los polinomios desplazados de Jacobi sustituidos y pesados.

Teorema 1: *Los polinomios radiales sustituidos y pesados de Jacobi de orden fraccional son ortogonales en el intervalo $[0,1]$, y cumplen las siguientes condiciones de ortogonalidad.*

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$\int_0^1 \tilde{P}_{\tilde{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) \tilde{P}_{\tilde{m}}(\alpha, \beta, \gamma, r) r dr = \delta_{\tilde{n}\tilde{m}} \quad (3.35)$$

$$\int_0^1 \hat{P}_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) \hat{P}_{\hat{m}}(\alpha, \beta, \gamma, r) r dr = \delta_{\hat{n}\hat{m}} \quad (3.36)$$

Prueba: Para los polinomios desplazados de orden fraccional de Jacobi sustituidos se demuestra sustituyendo la Ec.(3.33) en la Ec.(3.35), y simplificando de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{P}_{\tilde{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) \tilde{P}_{\tilde{m}}(\alpha, \beta, \gamma, r) r dr &= \int_0^1 \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \tilde{J}_m(\alpha, \beta, r^\gamma) r dr \\ &= \int_0^1 \gamma r^{2\gamma-1} \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) \tilde{J}_m(\alpha, \beta, r^\gamma) dr \\ &= \int_0^1 \gamma r^{\gamma-1} \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) \tilde{J}_m(\alpha, \beta, r^\gamma) r^\gamma dr \\ &= \int_0^1 \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) \tilde{J}_m(\alpha, \beta, r^\gamma) r^\gamma dr \\ &= \int_0^1 \tilde{J}_n(\alpha, \beta, r) \tilde{J}_m(\alpha, \beta, r) r dr \\ &= \delta_{\tilde{n}\tilde{m}} \end{aligned}$$

Para demostrar la condición de ortogonalidad de los polinomios desplazados de Jacobi pesados se realiza el procedimiento anterior.

Lema 1. La relación de recurrencia de los polinomios desplazados de Jacobi pesados de orden fraccional (PJPOF) está dada por,

$$D_n \hat{P}_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r) = (2r^\gamma - 1 - C_n) \hat{P}_{\hat{n}-1}(\alpha, \beta, \gamma, r) - D_{n-1} \hat{P}_{\hat{n}-2}(\alpha, \beta, \gamma, r) \quad (3.37)$$

donde los valores iniciales de $\hat{P}_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma, r^\gamma)$ están dados por,

$$\hat{P}_0(\alpha, \beta, \gamma, r) = \sqrt{\frac{\omega(\alpha, \beta, r^\gamma)}{b_0(\alpha, \beta) r^\gamma}} \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \quad (3.38)$$

$$\hat{P}_1(\alpha, \beta, \gamma, r) = \hat{P}_0(\alpha, \beta, \gamma, r) \sqrt{\frac{(\alpha+2)\beta}{\alpha-\beta+1}} \left(\frac{\alpha+1}{\beta} r^\gamma - 1 \right) \quad (3.39)$$

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

Los primeros 3 polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional para diferentes valores de α y β se muestran en las Tablas 3.10-3.12.

| | |
|---|---|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\gamma} r^{\frac{\gamma-2}{2}}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{3\gamma} r^{\frac{\gamma-2}{2}} (2r^\gamma - 1)$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\frac{r^{\frac{\gamma-2}{2}}}{2} (\sqrt{45\gamma} (2r^\gamma - 1)^2 - \sqrt{5\gamma})$ |

Tabla 3.10: Polinomios de Jacobi pesados orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 1$.

| | |
|---|--|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{2\gamma} r^{\gamma-1}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\gamma} (6r^{2\gamma-1} - 4r^{\gamma-1})$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{\gamma}{6}} r^{\gamma-1} ((2r^\gamma - 16/15)(30r^\gamma - 20) - 10/3)$ |

Tabla 3.11: Polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 2$.

| | |
|---|--|
| $\widehat{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{8\gamma}{\pi}} (r^\gamma - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}} r^{\frac{\gamma}{2}-1}$ |
| $\widehat{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{8\gamma}{\pi}} (r^\gamma - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}} r^{\frac{\gamma}{2}-1} (4r^\gamma - 2)$ |
| $\widehat{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{8\gamma}{\pi}} r^{\frac{\gamma}{2}-1} (r^\gamma - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}} ((4r^\gamma - 2)^2 - 1)$ |

Tabla 3.12: Polinomios de Jacobi de orden fraccional cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$.

Prueba: Multiplicando $\sqrt{\gamma} r^{\gamma-1}$ por Ec. (3.25) y reemplazando $r \rightarrow r^\gamma$, y utilizando la Ec. (3.34), se obtiene,

$$\begin{aligned} D_n \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \widehat{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) &= (2r^\gamma - 1 - C_n) \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \widehat{J}_{n-1}(\alpha, \beta, r^\gamma) - D_{n-1} \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \widehat{J}_{n-2}(\alpha, \beta, r^\gamma) \\ D_n \widehat{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) &= (2r^\gamma - 1 - C_n) \widehat{P}_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, r) - D_{n-1} \widehat{P}_{n-2}(\alpha, \beta, \gamma, r) \end{aligned}$$

Lema2: La relación de recurrencia de los polinomios desplazados de Jacobi sustituidos de orden fraccional (PJSOF) está definida por,

$$D_n \widetilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) = (2r^{2\gamma} - 1 - C_n) \widetilde{P}_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, r) - D_{n-1} \widetilde{P}_{n-2}(\alpha, \beta, \gamma, r) \quad (3.40)$$

donde los valores iniciales de $\widetilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r^\gamma)$ se definen por,

$$\widetilde{P}_0(\alpha, \beta, \gamma, r) = \sqrt{\frac{2\omega(\alpha, \beta, r^{2\gamma})}{b_0(\alpha, \beta)}} \sqrt{\gamma} r^{\gamma-1} \quad (3.41)$$

$$\widetilde{P}_1(\alpha, \beta, \gamma, r) = \widetilde{P}_0(\alpha, \beta, \gamma, r) \sqrt{\frac{(\alpha+2)\beta}{\alpha-\beta+1}} \left(\frac{\alpha+1}{\beta} r^{2\gamma} - 1 \right) \quad (3.42)$$

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

Los primeros 3 polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional para diferentes valores de α y β , se muestran en las siguientes Tablas 3.13-3.15.

| | |
|---|--|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{2\gamma}r^{\gamma-1}$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{6\gamma}(2r^{2\gamma} - 1)r^{\gamma-1}$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{90\gamma}(2r^{2\gamma} - 1)^2 - \sqrt{10\gamma})$ |

Tabla 3.13: Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 1$.

| | |
|---|---|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $2\sqrt{\gamma}r^{2\gamma-1}$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{2\gamma}(6r^{2\gamma} - 4)r^{2\gamma-1}$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{7}{3}}r^{2\gamma-1}((2r^{2\gamma^3} - 16/15)(18r^{2\gamma} - 12) - 2)$ |

Tabla 3.14: Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 2$.

| | |
|---|--|
| $\tilde{J}_0(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $4\sqrt{\frac{\gamma r^\gamma}{\pi}}(1 - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}}r^{\gamma-1}$ |
| $\tilde{J}_1(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{\gamma r^\gamma}{\pi}}(1 - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}}r^{\gamma-1}(16r^{2\gamma} - 8)$ |
| $\tilde{J}_2(\alpha, \beta, \gamma, r)$ | $\sqrt{\frac{\gamma r^\gamma}{\pi}}(r - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}}(4(4r^{2\gamma} - 2)^2 - 4r^{\gamma-1})$ |

Tabla 3.15: Polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional cuando $\alpha = 2, \beta = 3/2$.

Prueba: Al multiplicar $\sqrt{\gamma}r^{\gamma-1}$ por Ec. (3.30) y reemplazando $r^2 \rightarrow r^{2\gamma}$, y utilizando la Ec. (3.33), se tiene que,

$$\begin{aligned}
 D_n\sqrt{\gamma}r^{\gamma-1}\tilde{J}_n(\alpha, \beta, r^\gamma) &= (2r^{2\gamma} - 1 - C_n)\sqrt{\gamma}r^{\gamma-1}\tilde{J}_{n-1}(\alpha, \beta, r^\gamma) - D_{n-1}\sqrt{\gamma}r^{\gamma-1}\tilde{J}_{n-2}(\alpha, \beta, r^\gamma) \\
 D_n\tilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) &= (2r^{2\gamma} - 1 - C_n)\tilde{P}_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, r) - D_{n-1}\tilde{P}_{n-2}(\alpha, \beta, \gamma, r)
 \end{aligned}$$

En las Figs. (3.5-3.10) se muestran las diferentes definiciones de los polinomios de Jacobi de orden fraccional.

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

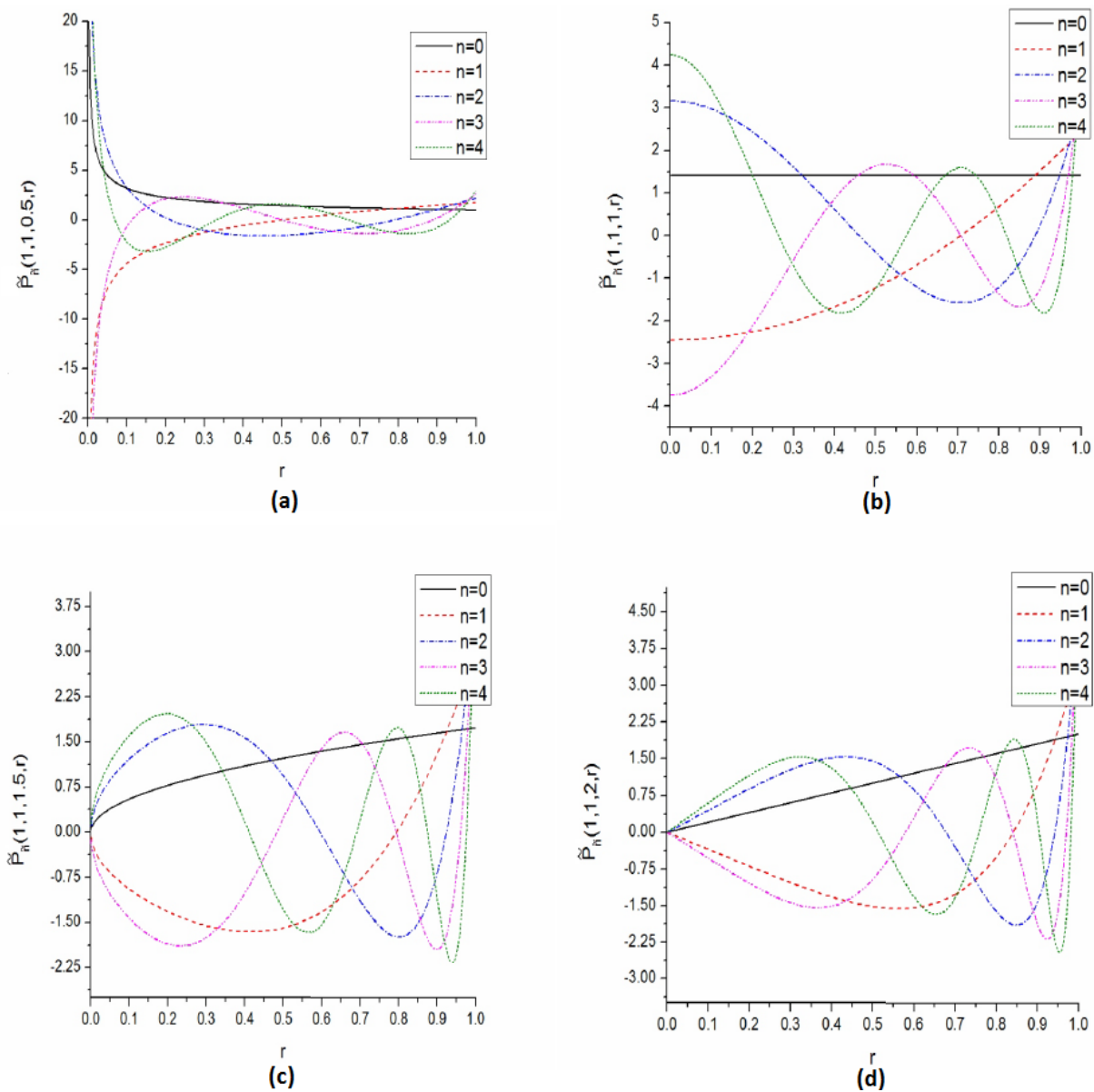


Figura 3.5: Gráficas de los polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=1$ y con diferentes valores de γ .

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

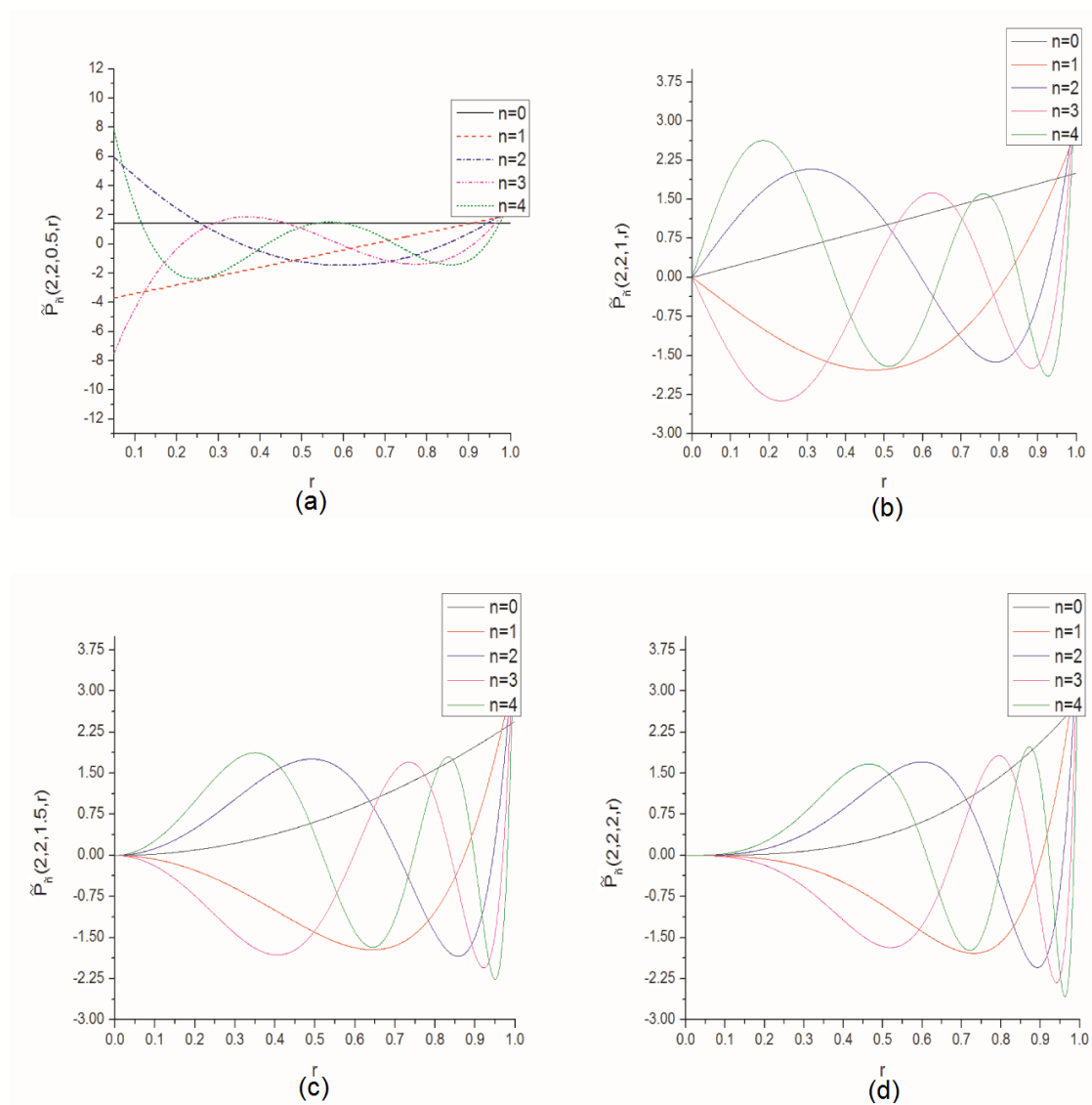


Figura 3.6: Gráficas de los polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=2$ y con diferentes valores de γ .

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

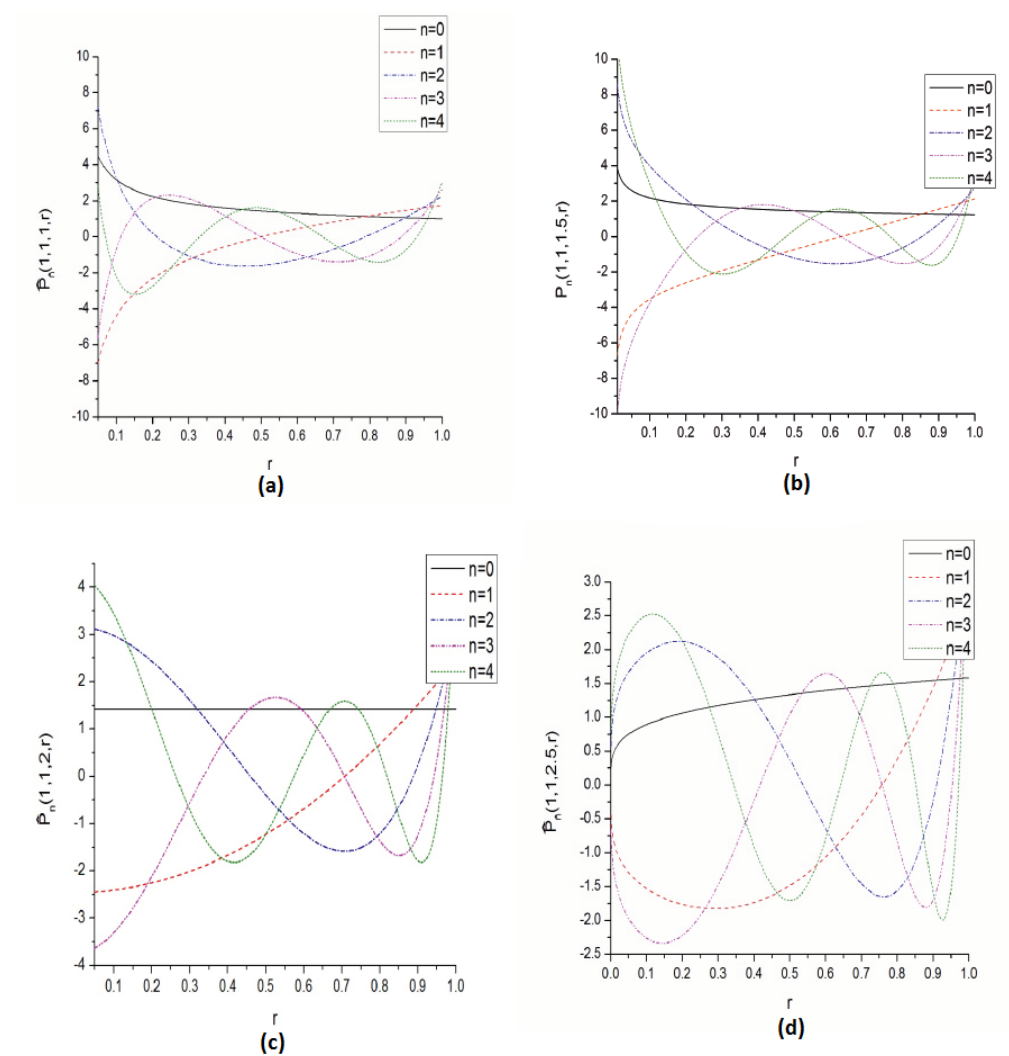


Figura 3.7: Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=1$ y con diferentes valores de γ .

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

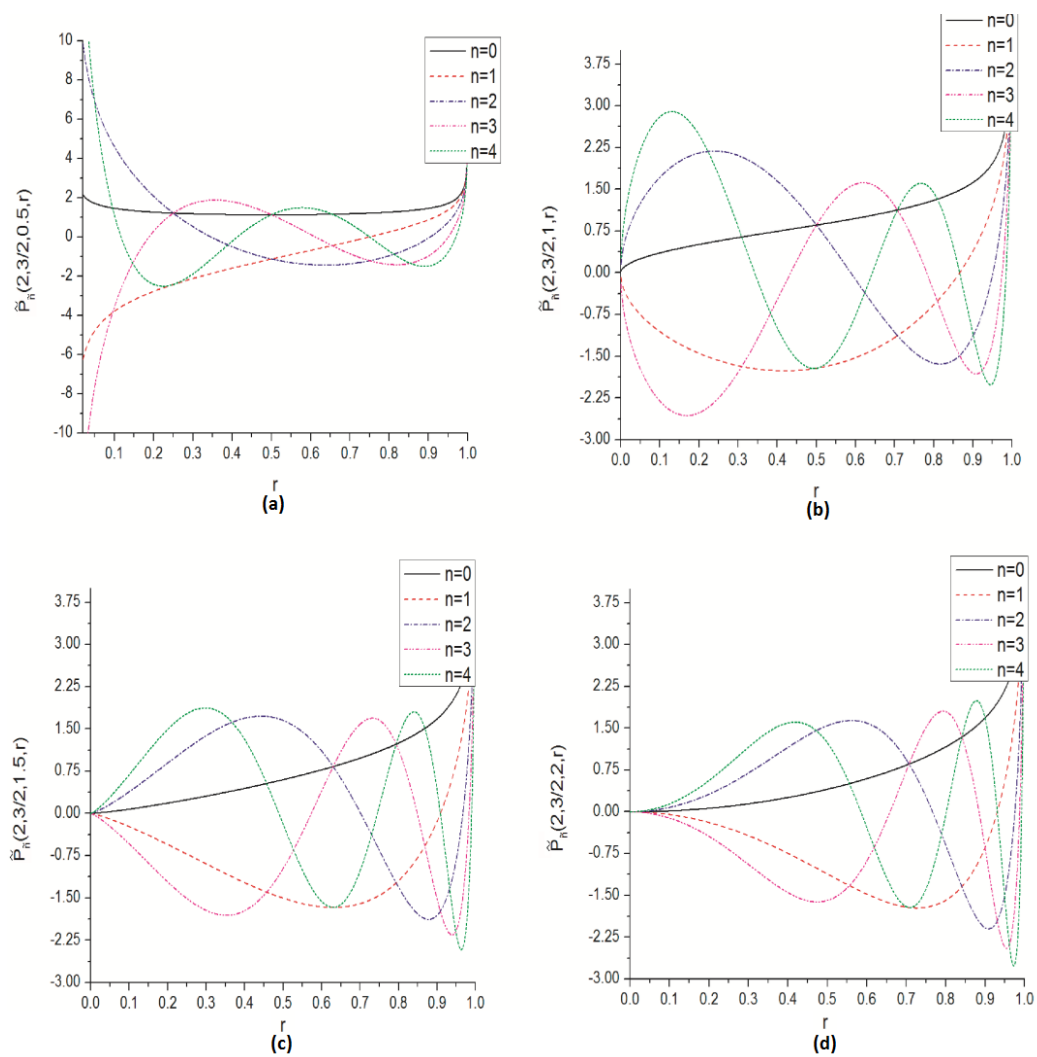


Figura 3.8: Gráficas de los polinomios de Jacobi sustituidos de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=2$, $\beta=3/2$ y con diferentes valores de γ .

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

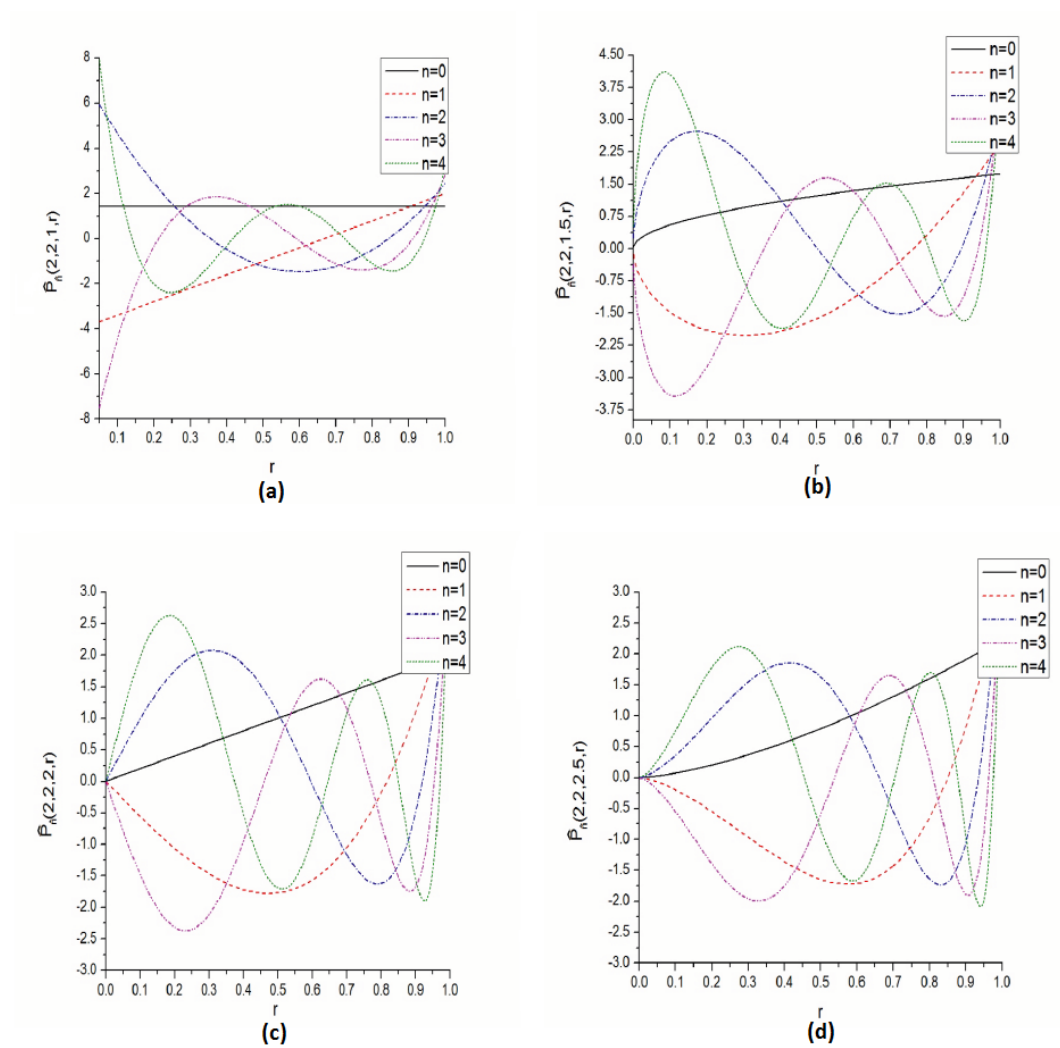


Figura 3.9: Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=\beta=2$ y con diferentes valores de γ .

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

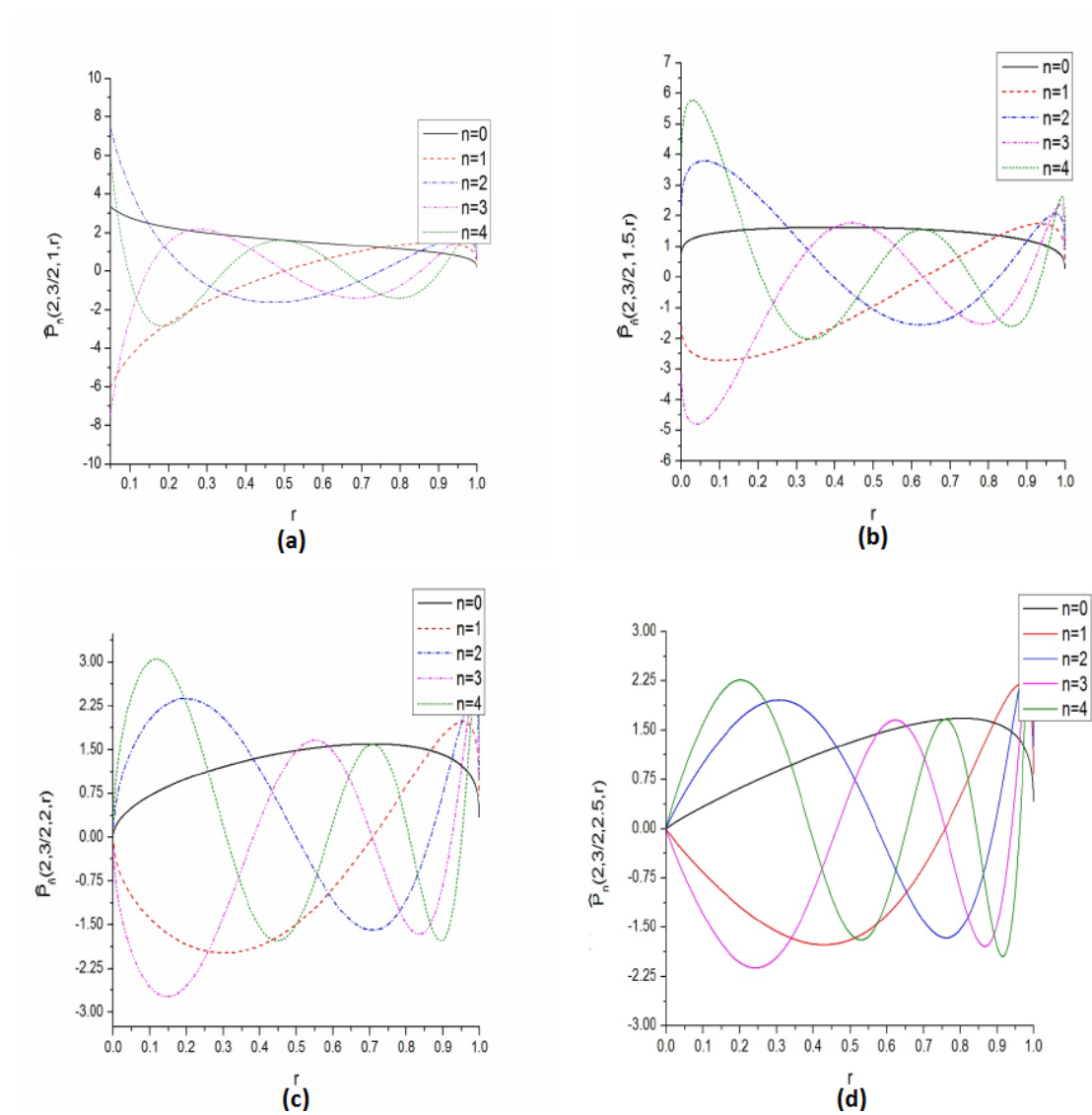


Figura 3.10: Gráficas de los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional de los primeros cuatro ordenes: con $\alpha=2$, $\beta=3/2$ y con diferentes valores de γ .

3.5. Relación de los polinomios ortogonales de Jacobi desplazados de orden fraccional con otros polinomios ortogonales.

Ping et al.[25] fue el primero en utilizar los polinomios ortogonales de Jacobi desplazados como kernel de los momentos radiales, los cuales tiene la habilidad de generar diferentes familias de polinomios ortogonales variando los parámetros α y β . En esta sección se presenta la relación que tienen los polinomios desplazados de Jacobi de orden fraccional con otras familias de polinomios ortogonales. Por ejemplo, cuando $\alpha = \beta = 1$ se obtienen los polinomios de Legendre de orden fraccional, para $\alpha = 2$ y $\beta = 3/2$ se obtienen los polinomios de Chebychev de orden fraccional y cuando $\alpha = \beta = 2$ se obtiene los polinomios de Mellin de orden fraccional.

3.5.1. Polinomios de Legendre de orden fraccional

La representación radial de los polinomios de Legendre de orden fraccional está dividida en dos conjuntos de polinomios de orden fraccional:

Bin Xiao [24] propone la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre pesados de orden fraccional (PLPOF), los cuales pueden ser obtenidos a partir de los PJPOF cuando $\alpha = \beta = 1$, la relación de recurrencia está dada por,

$$\widehat{P}_n(1, 1, \gamma, r) = \widehat{L}_n(\gamma, r) = ((2r^\gamma - 1)\widehat{L}_{n-1}(\gamma, r) - D_{n-1}\widehat{L}_{n-2}(\gamma, r))/D_n \quad (3.43)$$

donde,

$$D_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}} \quad (3.44)$$

Los valores iniciales están dados por,

$$\widehat{L}_0(\gamma, r) = \sqrt{\gamma} r^{\frac{\gamma-2}{2}} \quad (3.45)$$

$$\widehat{L}_1(\gamma, r) = \widehat{L}_0(\gamma, r)\sqrt{3}(2r^\gamma - 1) \quad (3.46)$$

Por otra parte, la relación de recurrencia que define a los polinomios de Legendre sustituidos de orden fraccional (PLSOF) está dada por,

$$\widetilde{P}_n(1, 1, \gamma, r) = \widetilde{L}_n(\gamma, r) = ((2r^{2\gamma} - 1)\widetilde{L}_{n-1}(\gamma, r) - D_{n-1}\widetilde{L}_{n-2}(\gamma, r))/D_n \quad (3.47)$$

donde los valores iniciales de $\widetilde{L}_n(\gamma, r)$ se definen por,

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

$$\tilde{L}_0(\gamma, r) = \sqrt{2\gamma}r^{\gamma-1} \quad (3.48)$$

$$\tilde{L}_1(\gamma, r) = \sqrt{3}(2r^{2\gamma} - 1)\tilde{L}_0(\gamma, r) \quad (3.49)$$

3.5.2. Polinomios de Mellin de orden fraccional

H. Zhang et al. [28] propone una relación de recurrencia para los polinomios de Mellin de orden fraccional (PMPOF), los cuales pueden ser obtenidos mediante la relación de recurrencia de los PJPOF cuando $\alpha = \beta = 2$. La relación de recurrencia para los PMPOF está definida por,

$$\widehat{P}_{\tilde{n}}(2, 2, \gamma, r) = \widehat{M}_{\tilde{n}}(\gamma, r) = ((2r^\gamma - 1 - C_n)\widehat{P}_{\tilde{n}-1}(\gamma, r) - D_{n-1}\widehat{P}_{\tilde{n}-2}(\gamma, r))/D_n \quad (3.50)$$

donde,

$$C_n = \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad (3.51)$$

$$D_n = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}. \quad (3.52)$$

Los valores iniciales están dados por,

$$\widehat{M}_0(\gamma, r) = \sqrt{2\gamma}r^{\gamma-1}, \quad (3.53)$$

$$\widehat{M}_1(\gamma, r) = \widehat{M}_0(\gamma, r)\sqrt{2}(3r^\gamma - 2). \quad (3.54)$$

Asimismo, los polinomios de Mellin sustituidos de orden fraccional (PMSOF) se definen mediante la siguiente relación de recurrencia,

$$\widetilde{P}_{\tilde{n}}(2, 2, \gamma, r) = \widetilde{M}_{\tilde{n}}(\gamma, r) = ((2r^{2\gamma} - 1 - C_n)\widetilde{M}_{\tilde{n}-1}(\gamma, r) - D_{n-1}\widetilde{M}_{\tilde{n}-2}(\gamma, r))/D_n \quad (3.55)$$

donde los valores iniciales están dados por,

$$\widetilde{M}_0(\gamma, r) = 2\sqrt{\gamma}r^{2\gamma-1}, \quad (3.56)$$

$$\widetilde{M}_1(\gamma, r) = \widetilde{M}_0(\gamma, r)\sqrt{2}(3r^{2\gamma} - 2). \quad (3.57)$$

3. Polinomios genéricos de orden fraccional

3.5.3. Polinomios de Chebychev de orden fraccional

En este trabajo de tesis se proponen los momentos de Chebychev de orden fraccional a partir del kernel radial de los momentos de Chebychev-Fourier propuestos por Ping et al. [5], los cuales están relacionados con los polinomios de Jacobi de orden fraccional cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 3/2$. La representación radial de los polinomios de Chebychev de orden fraccional se encuentran divididos en dos conjuntos de polinomios de orden fraccional:

La relación de recurrencia de los polinomios Chebychev pesados de orden fraccional (PCHPOF), se obtienen a través de los PJPOF cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 3/2$, la relación de recurrencia para los PCHPOF está dada por,

$$\widehat{P}_n(2, 3/2, \gamma, r) = \widehat{C}_n(\gamma, r) = 2(2r^\gamma - 1)\widehat{C}_{n-1}(\gamma, r) - \widehat{C}_{n-2}(\gamma, r) \quad (3.58)$$

Los valores iniciales de $\widehat{C}_n(\gamma, r)$ están dados por,

$$\widehat{C}_0(\gamma, r) = \sqrt{\frac{8\gamma}{\pi r^\gamma}}((1 - r^\gamma)r^\gamma)^{\frac{1}{4}}r^{\gamma-1}, \quad (3.59)$$

$$\widehat{C}_1(\gamma, r) = \widehat{C}_0(\gamma, r)(4r^\gamma - 2). \quad (3.60)$$

De la misma forma, los polinomios de Chebychev sustituidos de orden fraccional (PCHSOF) se definen mediante la siguiente relación de recurrencia,

$$\widetilde{P}_n(2, 3/2, \gamma, r) = \widetilde{C}_n(\gamma, r) = 2(2r^{2\gamma} - 1)\widetilde{C}_{n-1}(\gamma, r) - \widetilde{C}_{n-2}(\gamma, r) \quad (3.61)$$

teniendo como valores iniciales,

$$\widetilde{C}_0(\gamma, r) = 4\sqrt{\frac{\gamma r^\gamma}{\pi}}(1 - r^{2\gamma})^{\frac{1}{4}}r^{\gamma-1}, \quad (3.62)$$

$$\widetilde{C}_1(\gamma, r) = \widetilde{C}_0(\gamma, r)(4r^{2\gamma} - 2). \quad (3.63)$$

3.6. Conclusiones

A través de los polinomios de Jacobi de orden fraccional se pueden generar diferentes familias de polinomios radiales de orden fraccional variando el valor de α y β . Lo que permitió plantear las relaciones de recurrencia para los polinomios de Legendre de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 1$, los polinomios de Chebychev de orden fraccional para $\alpha = 2$ y $\beta = 3/2$ y la relación de recurrencia para los polinomios de Mellin de orden fraccional cuando $\alpha = \beta = 2$, en las Figs. (3.5-3.10) se puede observar el comportamiento de las funciones de cada familia de polinomios con diferentes valores de γ . Los polinomios definidos en este capítulo son utilizados como kernel de los momentos ortogonales de orden fraccional.

Bibliografía

- [1] Bhatia, A. B., & Wolf, E. (1954, January). On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 50, No. 1, pp. 40-48). Cambridge University Press.
- [2] Hoang, T. V., & Tabbone, S. (2013). Errata and comments on “Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description”. *Pattern Recognition*, 46(11), 3148-3155.
- [3] Ping, Z., Ren, H., Zou, J., Sheng, Y., & Bo, W. (2007). Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description. *Pattern Recognition*, 40(4), 1245-1254.
- [4] Sheng, Y., & Shen, L. (1994). Orthogonal Fourier–Mellin moments for invariant pattern recognition. *JOSA A*, 11(6), 1748-1757.
- [5] Ping, Z., Wu, R., & Sheng, Y. (2002). Image description with Chebyshev–Fourier moments. *JOSA A*, 19(9), 1748-1754.
- [6] Szeg, G. (1939). *Orthogonal polynomials* (Vol. 23). American Mathematical Soc.
- [7] Askey, R. (1975). *Orthogonal polynomials and special functions* (Vol. 21). Siam.
- [8] Timan, A. F. (2014). *Theory of approximation of functions of a real variable* (Vol. 34). Elsevier.
- [9] Rainville, E. D. (1971). *Special functions*.
- [10] Gottlieb, D., & Orszag, S. A. (1977). *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications* (Vol. 26). Siam.
- [11] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (2006). *Spectral methods*. Springer-Verlag, Berlin.
- [12] Funaro, D. (2008). *Polynomial approximation of differential equations* (Vol. 8). Springer Science & Business Media.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] Glowinski, R. (1990). Handbook of Numerical Analysis (Vol. 9). Gulf Professional Publishing.
- [14] Guo, B. Y. (2000). Jacobi approximations in certain Hilbert spaces and their applications to singular differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 243(2), 373-408.
- [15] Ben-Yu, G. (1998). Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 226(1), 180-206.
- [16] Guo, B. Y. (2000). Jacobi spectral approximations to differential equations on the half line. *Journal of Computational Mathematics*, 95-112.
- [17] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1965). Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55). Courier Corporation.
- [18] Bhatia, A. B., & Wolf, E. (1954, January). On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 50, No. 1, pp. 40-48). Cambridge University Press.
- [19] Hoang, T. V., & Tabbone, S. (2013). Errata and comments on “Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description”. *Pattern Recognition*, 46(11), 3148-3155.
- [20] Upneja, R., & Singh, C. (2015). Fast computation of Jacobi-Fourier moments for invariant image recognition. *Pattern Recognition*, 48(5), 1836-1843.
- [21] Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., & Papakostas, G. A. (2014). Generic orthogonal moments and applications. *Moments and Moment Invariants*, 175-204.
- [22] Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., & Báez-Rojas, J. J. (2014). High-precision and fast computation of Jacobi–Fourier moments for image description. *JOSA A*, 31(1), 124-134.
- [23] Sáez-Landete, J. (2017). Comments on “fast computation of jacobi-Fourier moments for invariant image recognition”. *Pattern Recognition*, 67, 16-22.
- [24] Xiao, B., Wang, G. Y., & Li, W. S. (2014). Radial shifted Legendre moments for image analysis and invariant image recognition. *Image and Vision Computing*, 32(12), 994-1006.

BIBLIOGRAFÍA

- [25] Ping, Z., Ren, H., Zou, J., Sheng, Y., & Bo, W. (2007). Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description. *Pattern Recognition*, 40(4), 1245-1254.
- [26] Bhrawy, A. H., & Zaky, M. A. (2016). Shifted fractional-order Jacobi orthogonal functions: application to a system of fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2), 832-845.
- [27] J. Yang, D. Jin, Z. Lu. (March 2017). Fractional Order Zernike Moment. *Aided Design and Computer Graphics* , 29, 3.
- [28] Zhang, H., Li, Z., & Liu, Y. (2016, November). Fractional Orthogonal Fourier-Mellin Moments for Pattern Recognition. In *Chinese Conference on Pattern Recognition* (pp. 766-778). Springer, Singapore.

Capítulo 4

Momentos circulares en pixeles polares

4.1. Introducción

En la literatura existen varios trabajos que muestran diferentes métodos para el cómputo de los momentos radiales. Xin Y. et al.[1], proponen un método para el cálculo de los momentos radiales, con una alta precisión numérica. Este método se basa en un arreglo de pixeles polares, en el cual se mapea la imagen original a un esquema de pixeles polares mediante la interpolación bicúbica de tercer orden propuesta por Keys[2], la cual reduce el error geométrico y el error de integración numérica que se encuentran presentes en los métodos convencionales basados en coordenadas cartesianas. El error en el cálculo de los momentos radiales a través de la Ec. (2.33) se debe al uso de coordenadas cartesianas, ya que las imágenes digitales son representadas en pixeles cuadrados. Es intuitivo que el error geométrico puede ser evitado mediante el uso de pixeles polares, cuyas áreas se suman a la del disco unitario. Además, podemos utilizar un método analítico para la integración del cómputo de los momentos radiales en vez de aproximaciones numéricas.

En esta sección se presenta el esquema de pixeles polares propuesto por Xin Y. et al.[1] para el cálculo de los momentos radiales en coordenadas polares. El algoritmo reduce significativamente el error de integración numérica y el error geométrico. Esta propuesta es utilizada en este trabajo de tesis para el cómputo de los momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional.

4.2. Esquema de pixeles polares

La propuesta de Xin Y. et al.[1] plantea que el esquema de pixeles polares se debe de considerar lo siguiente:

- 1) El tamaño de pixeles polares no debe ser mayor que el de los pixeles cartesianos, de modo que la resolución de la imagen digital debe ser mantenida.
- 2) Los pixeles polares deben ser lo más cuadrados que sea posible, es decir, la longitud de los bordes de un sector deben estar lo suficientemente cerca para que la distorsión de la imagen pueden mantenerse a un nivel bajo.
- 3) El esquema de pixeles polares debe ser tan regular como sea posible, para facilitar su almacenamiento y cálculo.

Siguiendo lo anterior, se propone un esquema de pixeles polares como se ilustra en la Fig (4.1). en donde el disco unitario del esquema de pixeles polares se divide uniformemente en U secciones a lo largo de la dirección radial, con una distancia radial de $r_u = \frac{u}{U}$ donde $u = 1 \dots U$. La cantidad de pixeles polares en el anillo es $S_u = (2u - 1)V$ que comienzan desde el origen, con ángulos de $\theta_{uv} = \frac{(v-1)2\pi}{S_u}$ donde $v = 1 \dots S_u$ y V es el número de sectores que están en el primer anillo.

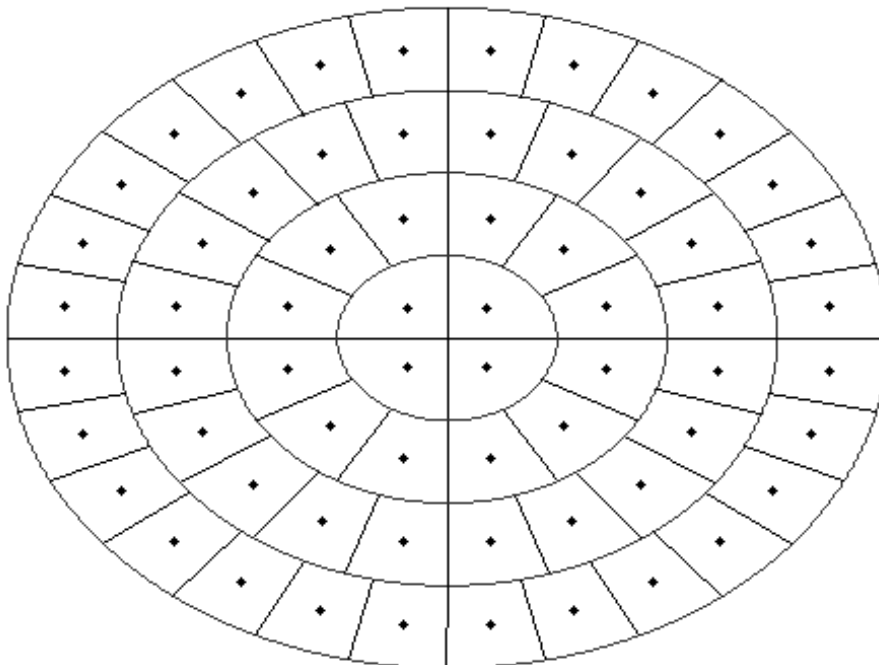


Figura 4.1: Configuración de pixeles polares.

4. Momentos circulares en píxeles polares

El disco unitario está dividido en VU^2 , cada uno tiene un área de $\frac{\pi}{VU^2}$. Los valores de U y V se deben de configurar de la mejor manera, ya que cuando el valor de VU^2 es pequeño se obtiene una ventaja en el cálculo y en la aplicación, pero puede representar desigualdad de la información. Además, un valor grande de VU^2 es adecuado para la representación de la imagen, sin embargo implica una pesada carga de trabajo. En la práctica, Xin Y. et al.[1] recomienda un valor de $V = 4$ y $N/2 \leq U \leq N$ para una imagen de $N \times N$. Por otra parte, una imagen digital se define por un conjunto de píxeles cartesianos, por lo que se puede observar que las ubicaciones de los píxeles cartesianos no coinciden con los píxeles polares. Por lo tanto, se deriva una contraparte polar de una imagen cartesiana antes de calcular los momentos radiales. Para solucionar este problema se utiliza la interpolación bicúbica de tercer orden introducido por Keys[2]. La interpolación bicúbica es una técnica para el remuestreo de datos discretos, donde su kernel de interpolación está dada por,

$$u(x) = \begin{cases} |x|^3 - \frac{5}{2}|x|^2 + 1 & 0 < |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{5}{2}|x|^2 - 4|x| + 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & 2 < |x| \end{cases} \quad (4.1)$$

La función de interpolación bicúbica de dos dimensiones, está dada por,

$$\hat{f}(r_{uv}, \theta_{uv}) = \sum_{i=k-1}^{k+2} \sum_{j=k-1}^{l+2} f(i, j) u(k-i) u(l-i) \quad (4.2)$$

donde $\hat{f}(r_{uv}, \theta_{uv})$ es una aproximación de la función $f(r_{i,j}, \theta_{i,j})$ y u es el kernel de interpolación bicúbica, $k = (N/2)r_{uv} \cos \theta_{uv} + (N/2) + 1$, y $l = (N/2)r_{uv} \sin \theta_{uv} + (N/2) + 1$. En la Fig (4.2). se muestra la imagen del logo de la UPT y su representación en píxeles polares.

4. Momentos circulares en pixeles polares



Figura 4.2: Imagen del logo de la UPT en coordenadas polares (a) y en su forma cartesiana (b).

4.3. Cómputo de momentos circulares en pixeles polares

Una vez planteado el esquema de pixeles polares para una imagen digital, se vuelve a escribir la definición de los momentos radiales en su forma equivalente, basada en el esquema de pixeles polares,

$$\phi_{n,m} = \sum_{u=1}^U \sum_{v=1}^{(2n-1)V} \hat{f}(r_{uv}, \theta_{uv}) \omega_{nm}(r_{uv}, \theta_{uv}) \quad (4.3)$$

donde $\hat{f}(r_{uv}, \theta_{uv})$ es definido sobre un conjunto de sectores concéntricos Ω_{uv} , y el factor $\omega_{nm}(r_{uv}, \theta_{uv})$ que está dado por,

$$\begin{aligned} \omega_{nm}(r_{uv}, \theta_{uv}) &= \int \int_{\Omega_{uv}} A_n(r) \exp(jm\theta) r dr d\theta \\ &= \int_{r_{uv}^{(s)}}^{r_{uv}^{(e)}} A_n(r) r dr \int_{\theta_{uv}^{(s)}}^{\theta_{uv}^{(e)}} \exp(jm\theta) d\theta \\ &= I_1 \times I_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $A_n(r)$ es el polinomio radial ortogonal base, $r_{uv}^{(s)}$ y $r_{uv}^{(e)}$ denotan los radios inicial y final del sector Ω_{uv} , mientras que $\theta_{uv}^{(s)}$ y $\theta_{uv}^{(e)}$ denotan los ángulo iniciales y final del sector Ω_{uv} , como se muestra en la Fig. (4.3).

4. Momentos circulares en pixeles polares

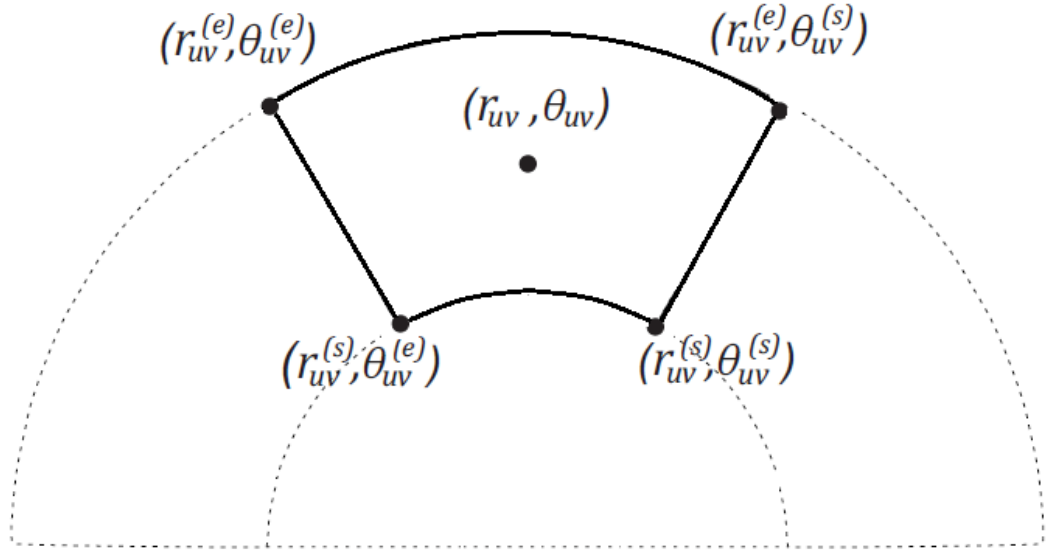


Figura 4.3: Sector concéntrico Ω_{uv} , la cual representa un píxel polar para (r_{uv}, θ_{uv}) , donde $r_{uv} = (r_{uv}^{(s)} + r_{uv}^{(e)})/2$ y $\theta_{uv} = (\theta_{uv}^{(s)} + \theta_{uv}^{(e)})/2$.

Con el método propuesto por Xin et al.[1] se incrementa la exactitud del cómputo de los momentos radiales, sin embargo el cálculo de la integral mediante los coeficientes de los polinomios ortogonales genera inestabilidad numérica para altos órdenes. Por tal motivo se proponen diferentes métodos para el cálculo de la integral I_1 [3, 4, 5]. En este trabajo de tesis, se utiliza la regla del trapecoide que es una de las más utilizadas, la cual está definida de la siguiente manera,

$$I_1 = h \left[\frac{f(r_{uv}^{(s)}) + f(r_{uv}^{(e)})}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(r_{uv}^{(s)} + kh) \right] \quad (4.5)$$

donde $h = \frac{(r_{uv}^{(s)}) + (r_{uv}^{(e)})}{n}$ y n es el número de divisiones por sección. La integral de la exponencial compleja está dada por,

$$I_2 = \begin{cases} \frac{j}{m} [\exp(-jm\theta_{uv}^{(e)}) - \exp(-jm\theta_{uv}^{(s)})], & m \neq 0 \\ \theta_{uv}^{(e)} - \theta_{uv}^{(s)}, & m = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

4.4. Momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional en pixeles polares

La expresión general para los Momentos de Jacobi-Fourier de orden fraccional (MJFOF) de orden n y repetición m para una función imagen $f(r, \theta)$ en coordenadas polares está dada por,

4. Momentos circulares en pixeles polares

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) B_n(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.7)$$

donde $B_n(r, \theta)$ es la función kernel separable, la cual consiste en el producto de dos funciones: $\widehat{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r)$ (PJPOF) ó $\widetilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r)$ (PJSOF) expresada como,

$$B_n(r, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \widehat{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) \\ \widetilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

4.4.1. Reconstrucción de imágenes

La reconstrucción de una imagen puede ayudar a determinar qué tan bien una imagen puede ser caracterizada por sus momentos. De acuerdo con la literatura una imagen digital $f(x, y)$ puede ser reconstruida por un número infinito de momentos ortogonales [4]. La distribución discreta de una imagen reconstruida está dada por,

$$\widetilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L \phi_{n,m} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) \\ \widetilde{P}_n(\alpha, \beta, \gamma, r) \end{array} \right\} \exp(-jm\theta) \quad (4.9)$$

donde $\widetilde{f}(r, \theta)$ es la imagen reconstruida de $f(r, \theta)$ y L es el orden máximo de los MJFOF, que se utilizan para la reconstrucción de la imagen de prueba Fig 4.4.



Figura 4.4: Imagen de prueba en escala de grises “Cameraman” de tamaño 512×512 pixeles utilizada para el cómputo de los MJFOF.

4. Momentos circulares en pixeles polares

Los MJFOF son una expresión genérica para generar diferentes conjuntos de momentos ortogonales, en este trabajo de tesis se hacen una comparación de la reconstrucción de la imagen de prueba con diferentes conjuntos de momentos ortogonales como son; los momentos de Legendre-Fourier de orden fraccional, los momentos de Mellin-Fourier de orden fraccional y los momentos de Chebychev-Fourier, utilizando como kernel los polinomios sustituidos y pesados de orden fraccional como kernel planteados en el epígrafe 3.5. En las Figs.4.5-4.28 se muestran los resultados obtenidos con diferentes valores de γ de la reconstrucción de la imagen de prueba con los momentos ortogonales de orden fraccional utilizando un esquema de pixeles polares planteado en la sección anterior.

4. Momentos circulares en píxeles polares

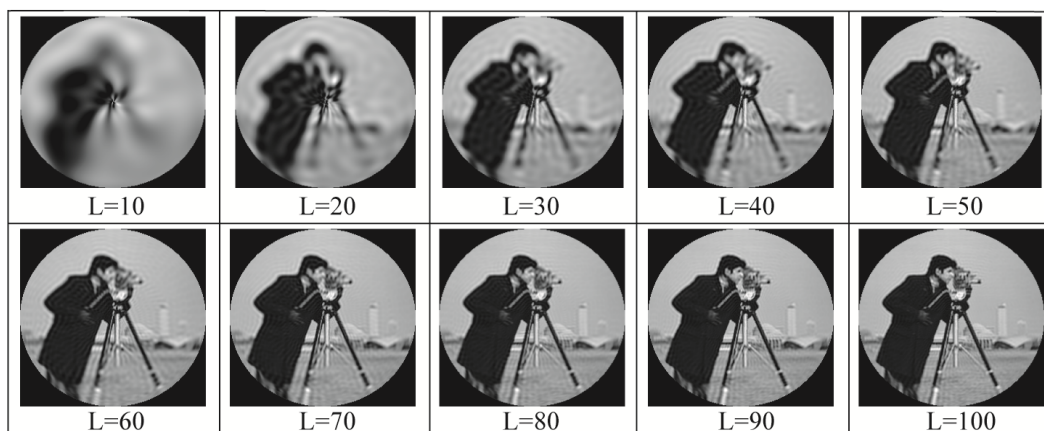


Figura 4.5: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

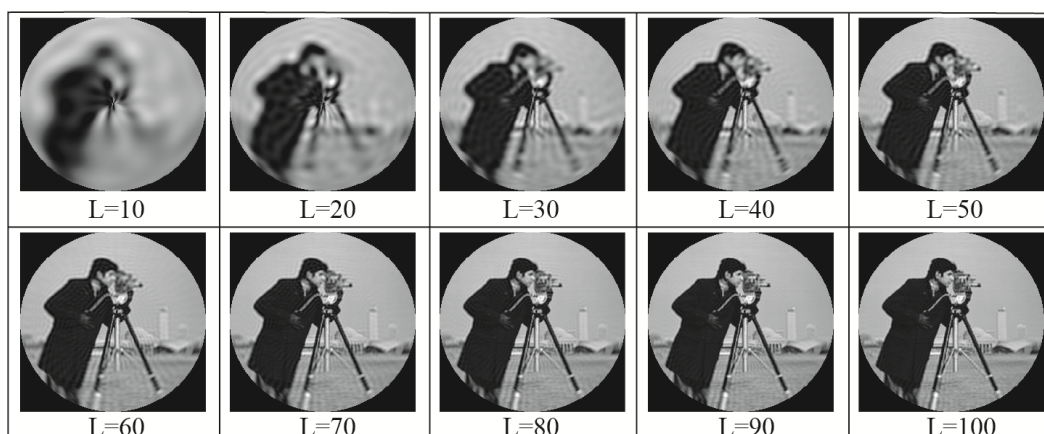


Figura 4.6: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

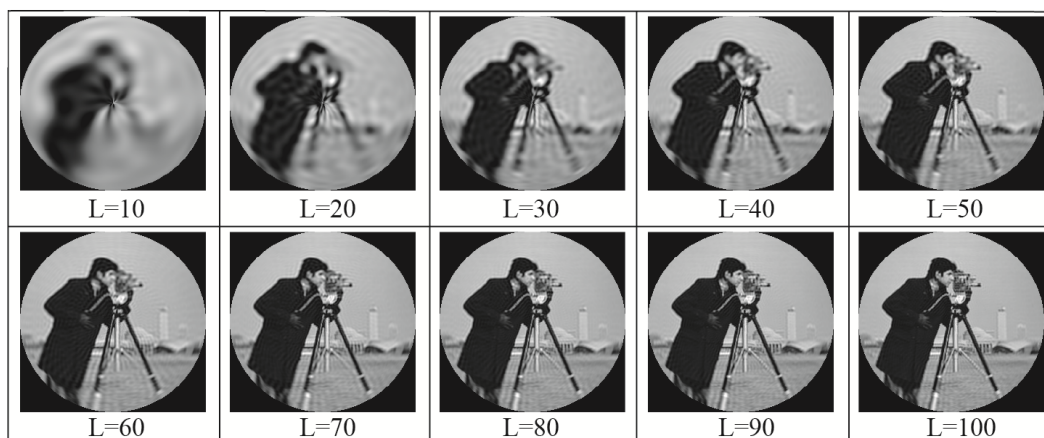


Figura 4.7: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

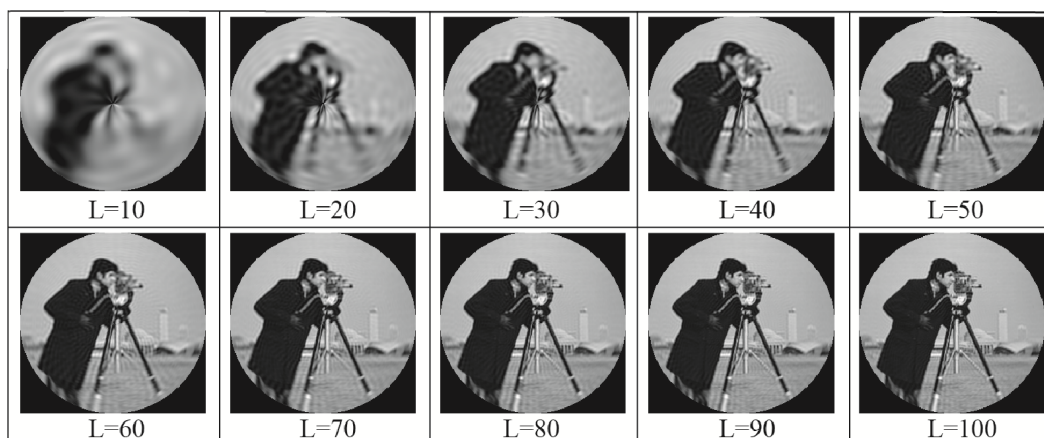


Figura 4.8: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

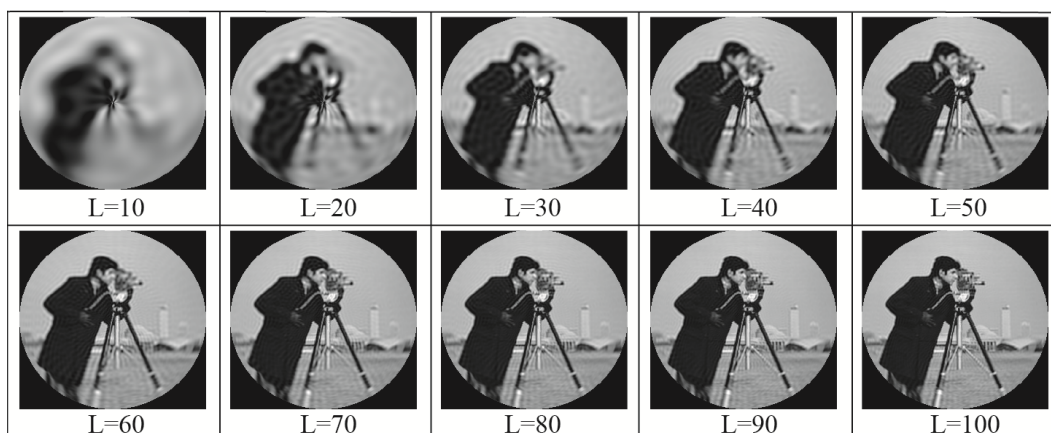


Figura 4.9: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

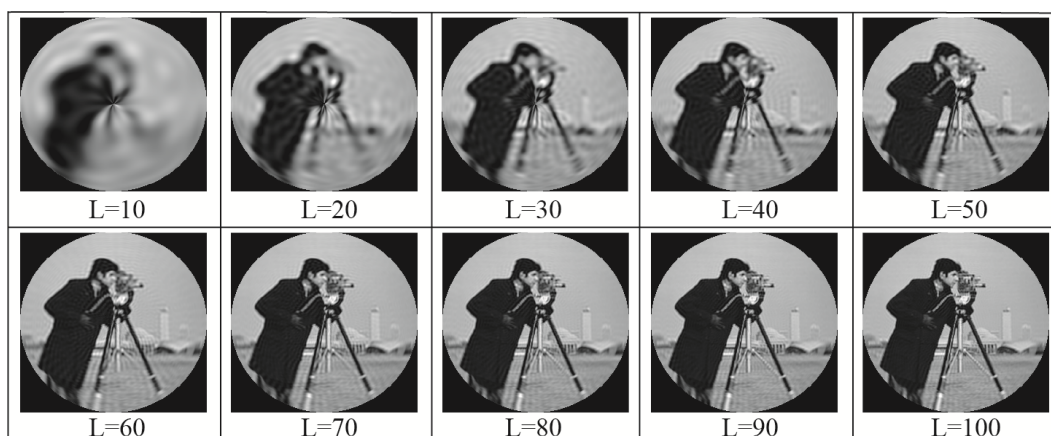


Figura 4.10: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

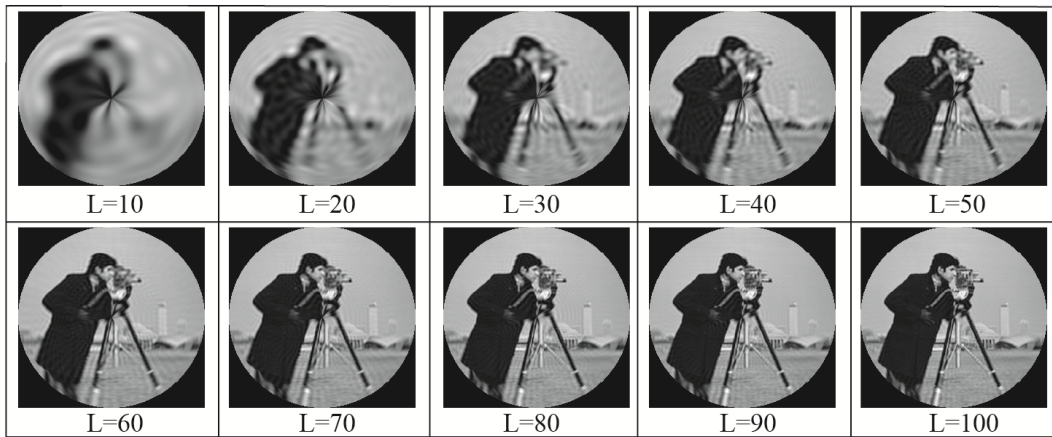


Figura 4.11: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

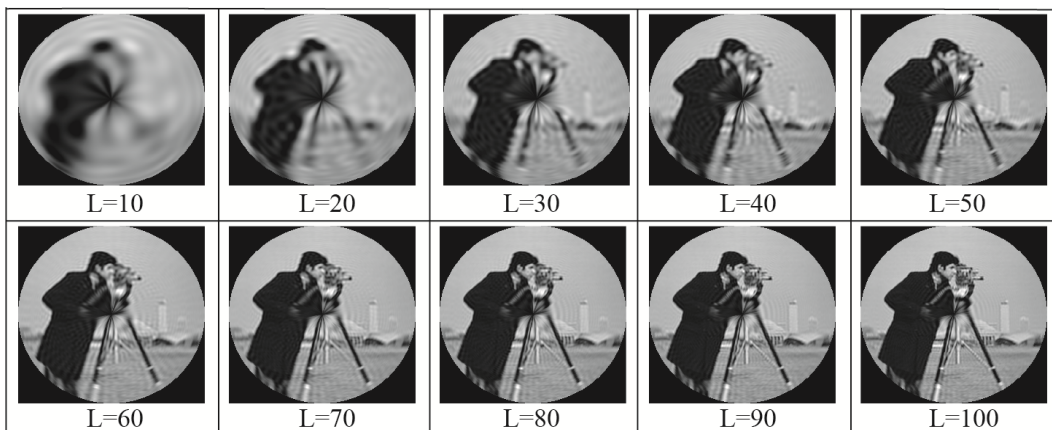


Figura 4.12: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

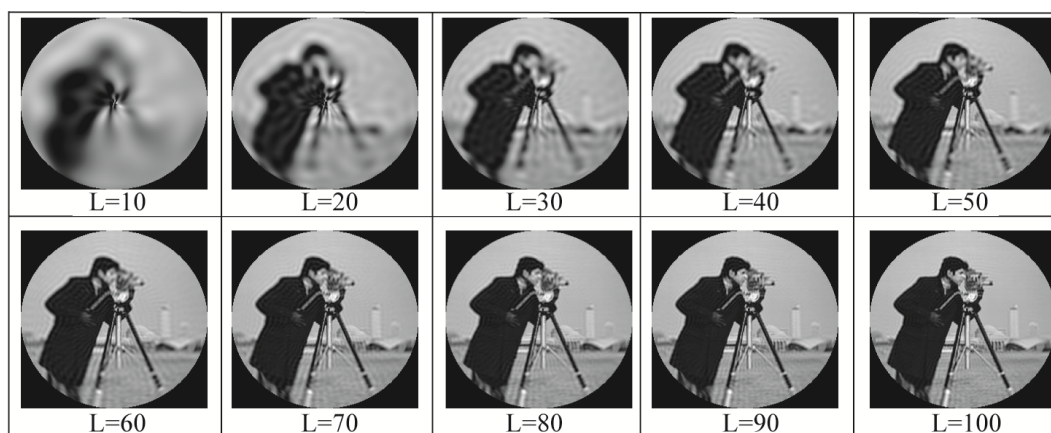


Figura 4.13: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

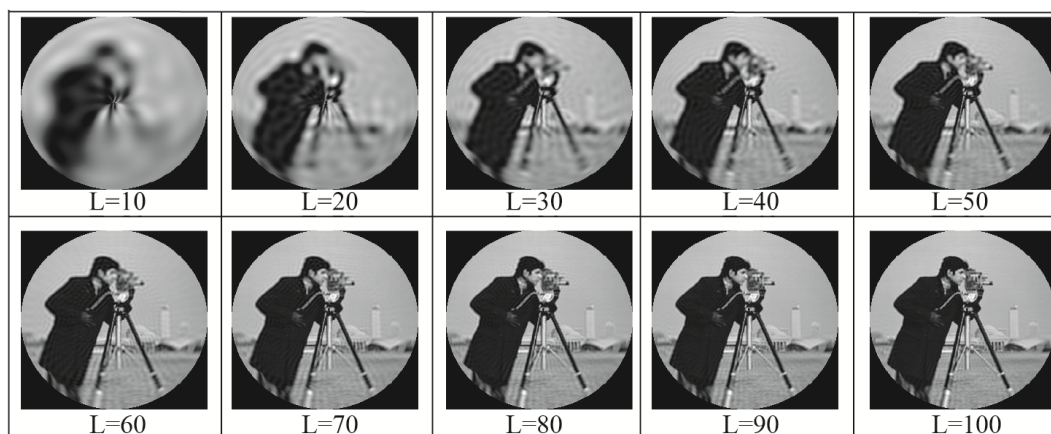


Figura 4.14: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

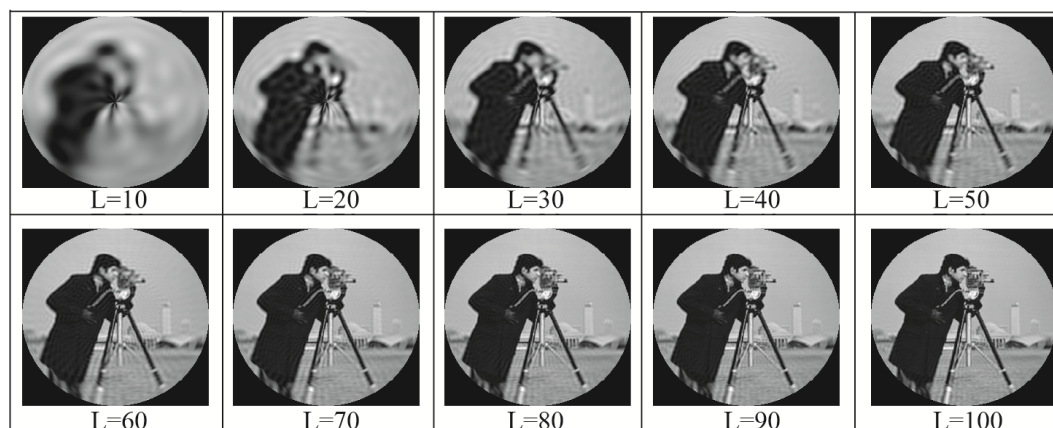


Figura 4.15: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

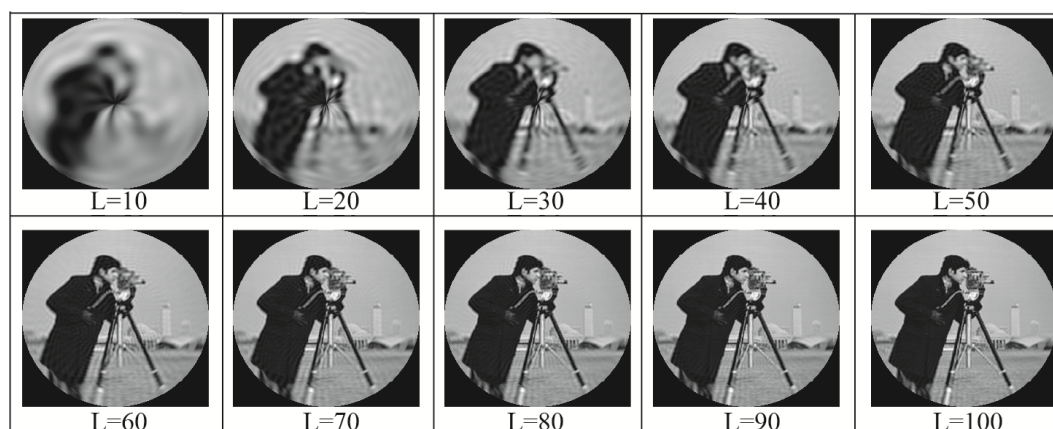


Figura 4.16: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

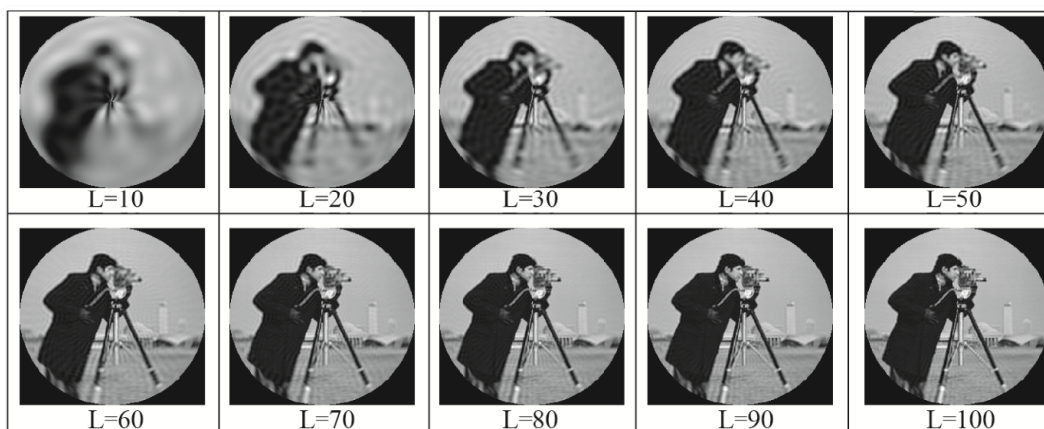


Figura 4.17: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

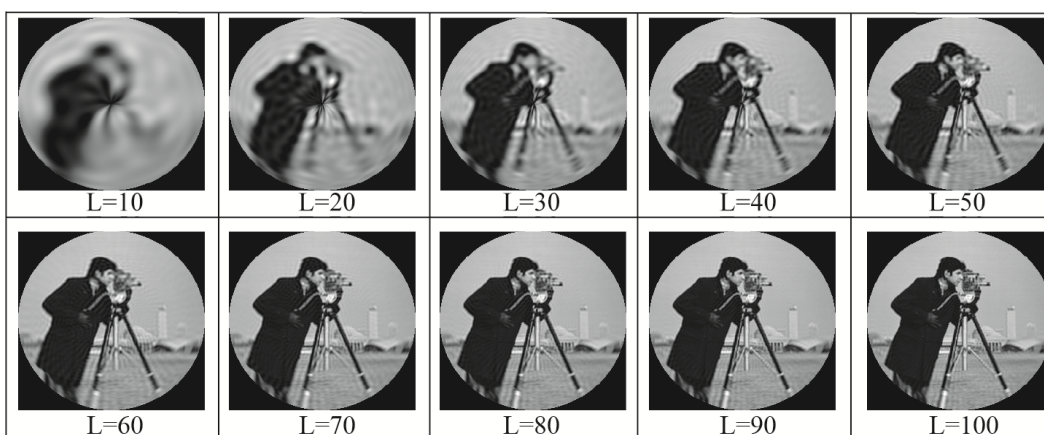


Figura 4.18: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

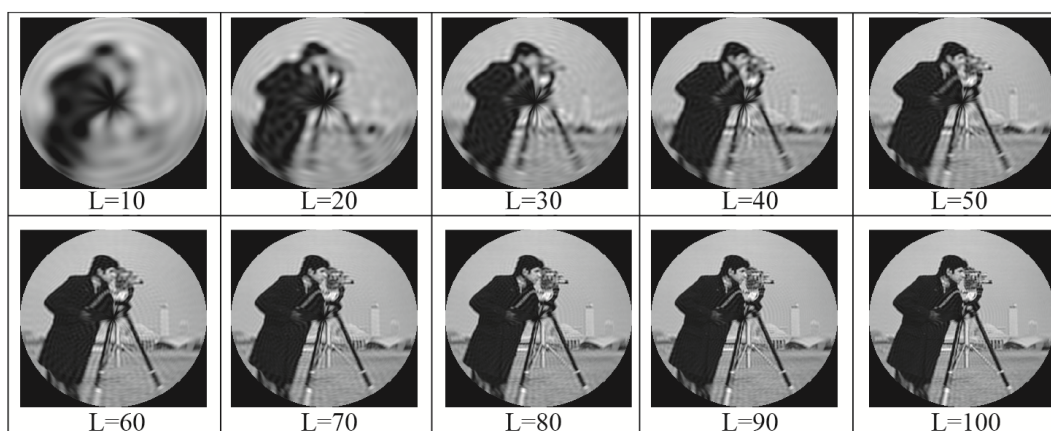


Figura 4.19: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

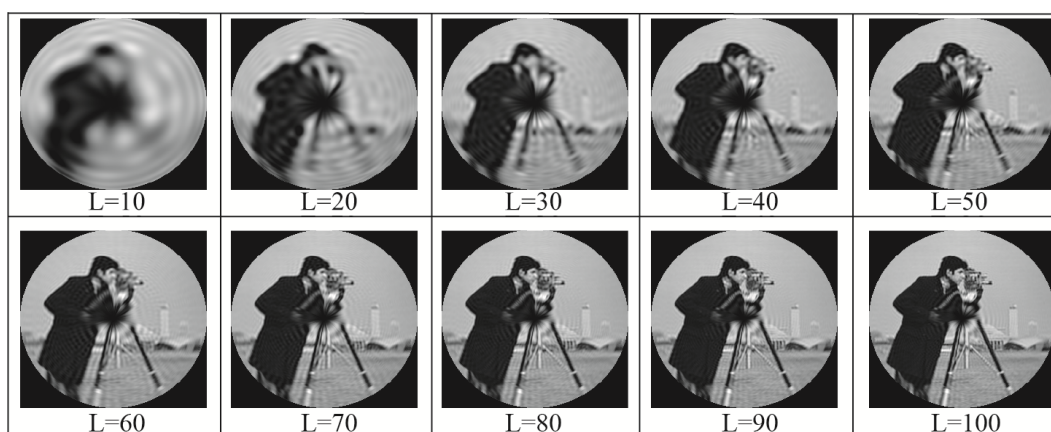


Figura 4.20: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

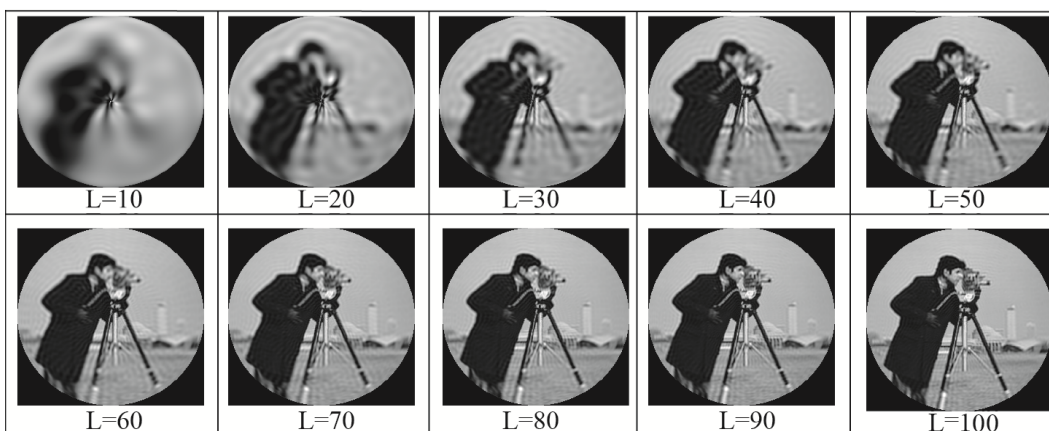


Figura 4.21: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

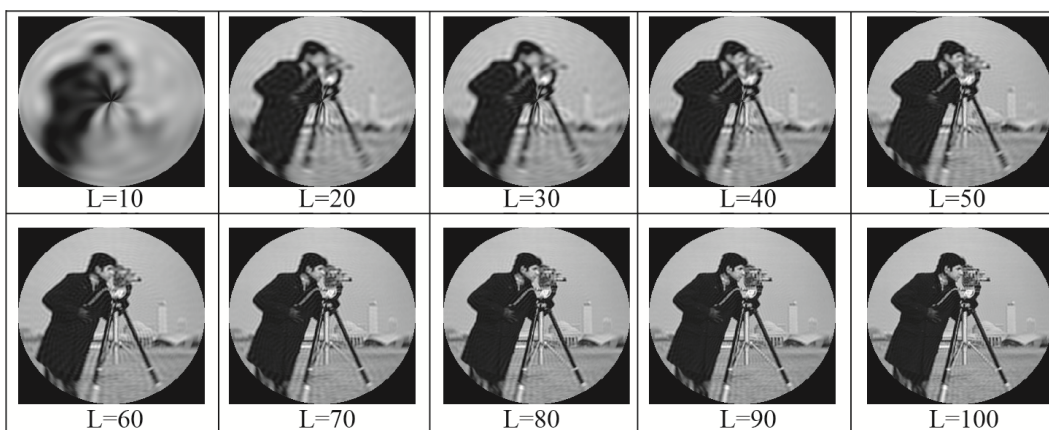


Figura 4.22: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

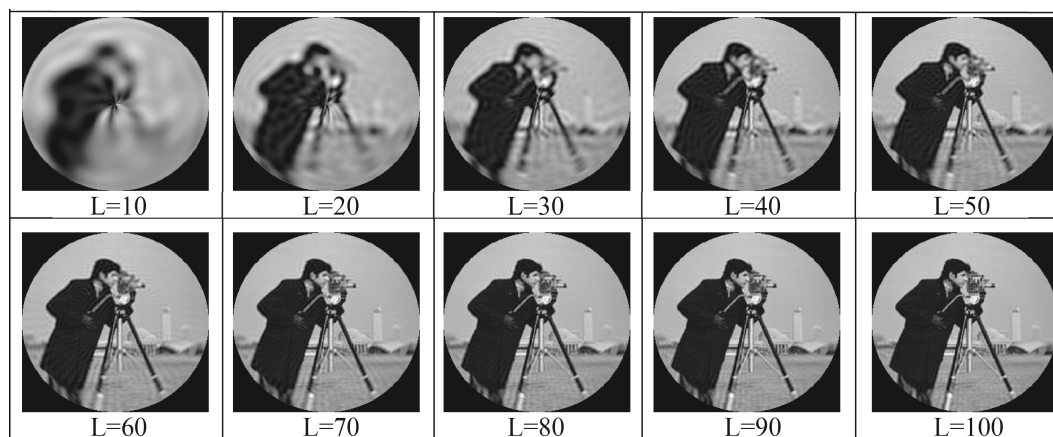


Figura 4.23: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

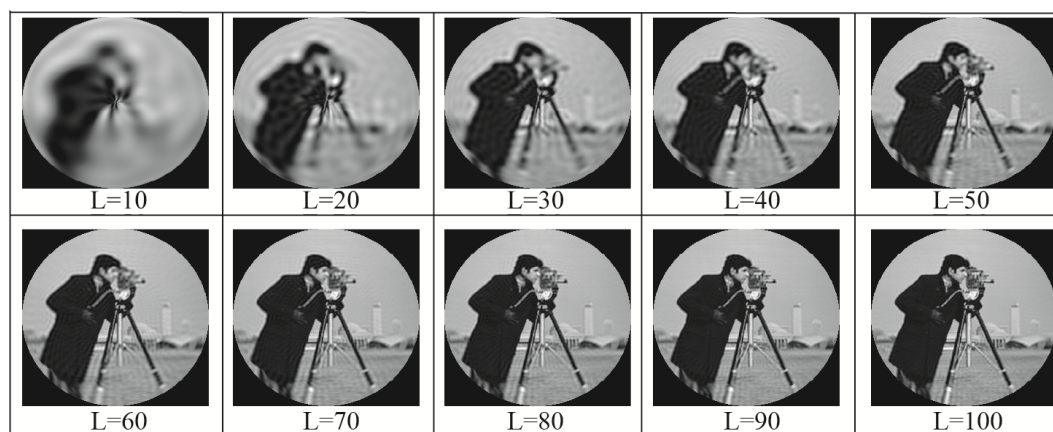


Figura 4.24: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

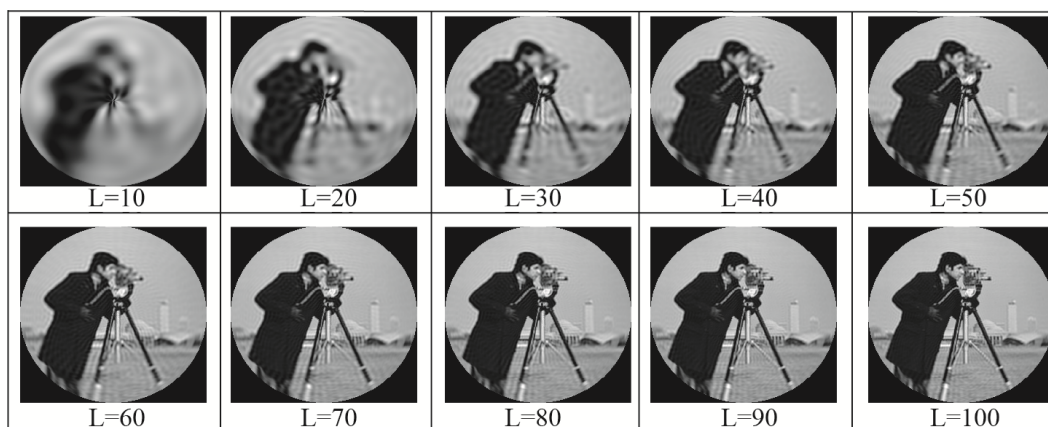


Figura 4.25: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 0,5$.

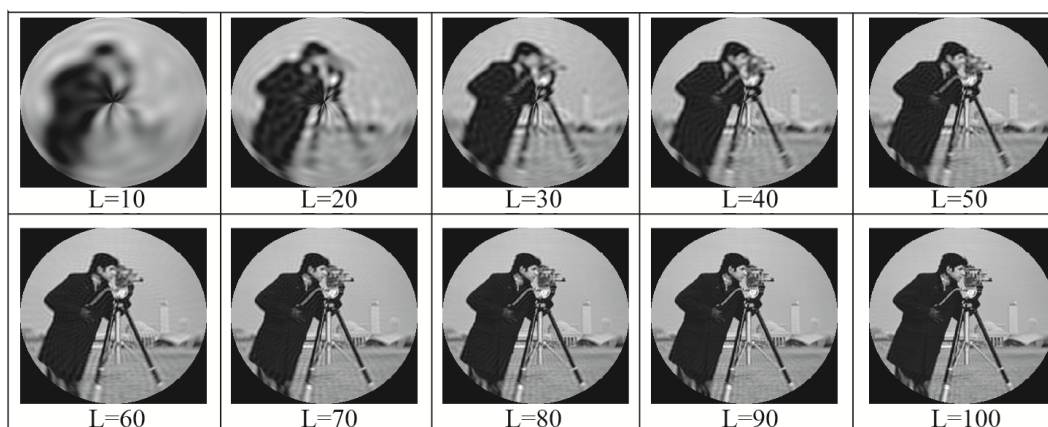


Figura 4.26: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1$.

4. Momentos circulares en píxeles polares

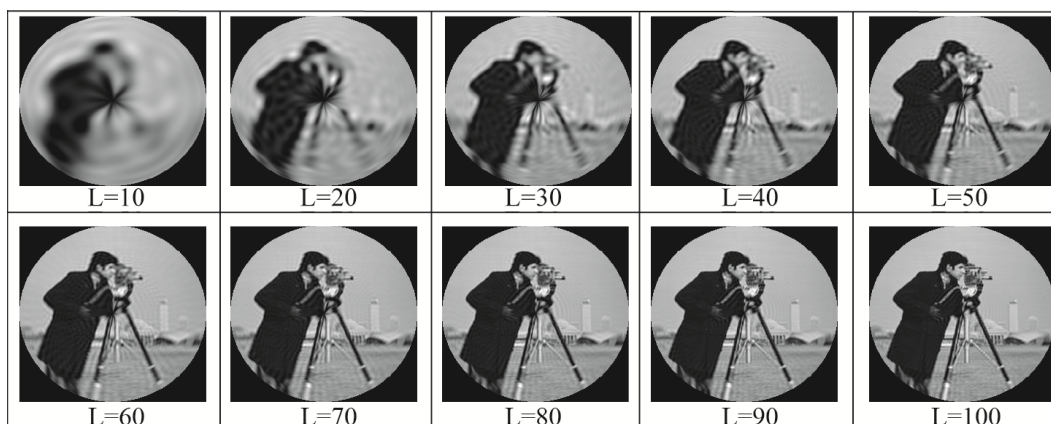


Figura 4.27: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 1,5$.

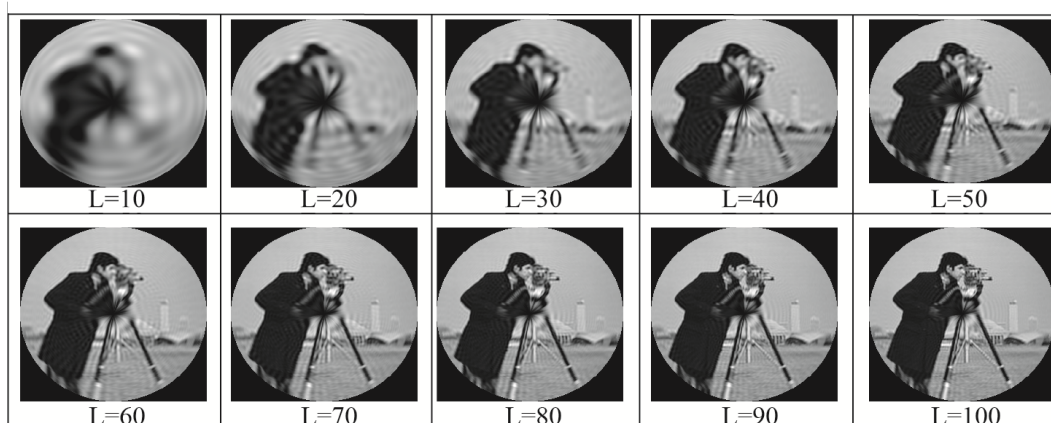


Figura 4.28: Resultados obtenidos de la reconstrucción de la imagen “Cameraman” usando los momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional, utilizando un esquema de píxeles polares para distintos ordenes L y con un valor de $\gamma = 2$.

4.4.2. Error de reconstrucción

Para medir el desempeño de los MJFOF se utiliza el error de reconstrucción normalizado conocido como *NIRE* por sus siglas en inglés en coordenadas polares, el cual es calculado mediante el error cuadrático medio normalizado de la imagen original $f(r, \theta)$ y la imagen reconstruida $\tilde{f}(r, \theta)$. La definición discreta está dada por,

4. Momentos circulares en pixeles polares

$$NIRE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [f(r, \theta) - \tilde{f}(r, \theta)]^2}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f^2(r, \theta)} \quad (4.10)$$

Los resultados $NIRE$ para los diferentes conjuntos de momentos ortogonales de orden fraccional con diferentes valores de γ se muestran en la Fig. 4.29,

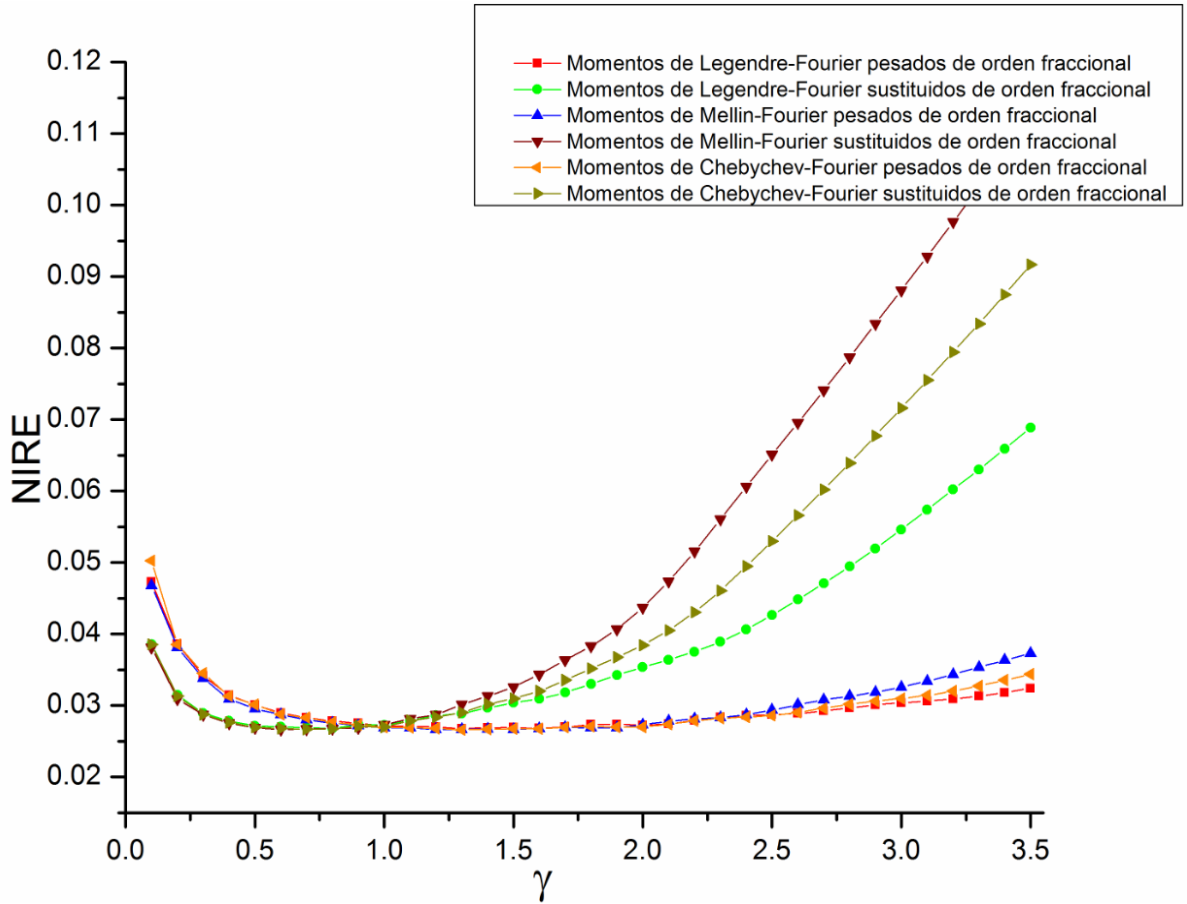


Figura 4.29: Error de reconstrucción $NIRE$ de la imagen de “Cameraman” de tamaño 128×128 pixeles con un orden máximo $L = 20$ para diferentes valores de γ . para cada conjunto de los momentos ortogonales de orden fraccional.

En la Fig. 4.29, los momentos pesados de orden fraccional tiene un mejor desempeño cuando el valor de γ está en el intervalo de 1 a 3.5 , mientras que los momentos sustituidos son mejores en un intervalo de 0 a 1.

4.5. Selección del parámetro γ .

La gráfica del error de reconstrucción NIRE de la Fig. 4.29, es una función unimodal ya que tiene un solo punto mínimo. En este trabajo de tesis, se utiliza el método sección dorada para encontrar el valor óptimo de γ . El método consiste en encontrar el punto mínimo o máximo de una función unimodal, mediante anidamiento. El nombre se deriva del hecho que mantiene los valores de la función en distintas posiciones cuyas distancias constituyen la proporción áurea, 1.618 [6]. El método comienza con dos valores iniciales, x_l y x_u que contiene extremos de la función $f(x)$. Después, se eligen dos puntos interiores x_1 y x_2 de acuerdo con la razón dorada (1,618); $d = 1,618(x_u - x_l)$, $x_1 = x_l + d$ y $x_2 = x_u - d$. Posteriormente, se evalúa la función en los dos puntos interiores, si $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $x_l = x_2$; $x_2 = x_1$ y $x_1 = x_l + d$, pero si $f(x_2) < f(x_1)$ por lo que $x_u = x_1$; $x_1 = x_2$ y $x_2 = x_u + d$. El Algoritmo 1, muestra la búsqueda de sección dorada para encontrar el valor óptimo de γ . Por otra parte, en la Fig. 4.30 se muestran los valores óptimos de γ para cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional, que corresponden a los valores encontrados en el Algoritmo 1.

4. Momentos circulares en píxeles polares

Algoritmo 1 Algoritmo de búsqueda de sección dorada para encontrar el valor óptimo de γ .

```
1:  $\varphi \leftarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 
2:  $\tau \leftarrow 0,001$ 
3:  $a \leftarrow 0,1$ 
4:  $b \leftarrow 3,5$ 
5:  $c \leftarrow a + (b - a)\varphi$ 
6:  $d \leftarrow b - (b - a)\varphi$ 
7:  $f_c \leftarrow NIRE(I, n, c)$ 
8:  $f_d \leftarrow NIRE(I, n, d)$ 
9: while  $|b - a| > \tau(|c| + |d|)$  do
10:  if  $f_c < f_d$  then
11:     $b \leftarrow d$ 
12:     $d \leftarrow c$ 
13:     $\gamma' \leftarrow c$ 
14:     $c \leftarrow a + (b - a)\varphi$ 
15:     $f_d \leftarrow f_c$ 
16:     $f_c \leftarrow NIRE(I, n, c)$ 
17:  else
18:     $a \leftarrow c$ 
19:     $c \leftarrow d$ 
20:     $\gamma' \leftarrow d$ 
21:     $d \leftarrow b - (b - a)\varphi$ 
22:     $f_c \leftarrow f_d$ 
23:     $f_d \leftarrow NIRE(I, n, d)$ 
24:  end if
25: end while
```

4. Momentos circulares en pixeles polares

| | γ' | <i>NIRE</i> |
|--------|-----------|-------------------|
| MLFPOF | 1.6007 | 0.026793063153121 |
| MLFSOF | 0.80008 | 0.026793065971719 |
| MMFPOF | 1.2368 | 0.026596448793641 |
| MMFSOF | 0.61838 | 0.026596448111538 |
| MCFPOF | 1.3079 | 0.026582836064989 |
| MCFEOF | 0.65409 | 0.026582836044855 |

Figura 4.30: Valor óptimo de γ para la imagen de “*Cameraman*” de tamaño 128×128 pixeles y orden máximo $L = 20$ para diferentes momentos de orden fraccional.

Una de las propiedades más importantes de los momentos circulares es la invariancia a la escala y a la rotación. Teóricamente, el valor óptimo de γ es el mismo para cualquier cambio de escala y rotación de una función imagen. Sin embargo, puede haber alguna variación debido a la pérdida de información en la imagen original o la inestabilidad numérica de los momentos circulares de orden fraccional. Para probar la invariancia a la rotación y escala del valor de γ dentro de los momentos ortogonales de orden fraccional se utiliza la imagen de “*Cameraman*” con un ángulo de rotación de 0° - 90° , con incrementos de 3° , de igual forma se modificó el tamaño de la imagen de prueba con cambios de escala de 0 a 1.5, esto con la finalidad de observar el comportamiento del valor de γ a cambios de escala y a rotación. Los resultados se presentan en las Figs. 4.31 y 4.32.

4. Momentos circulares en pixeles polares

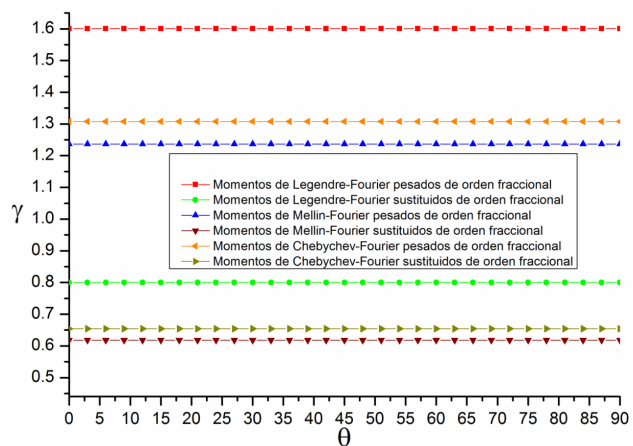


Figura 4.31: Valor óptimo de γ para la imagen de “Cameraman” de tamaño 128×128 pixeles y orden máximo $L = 20$ con cambios de rotación.

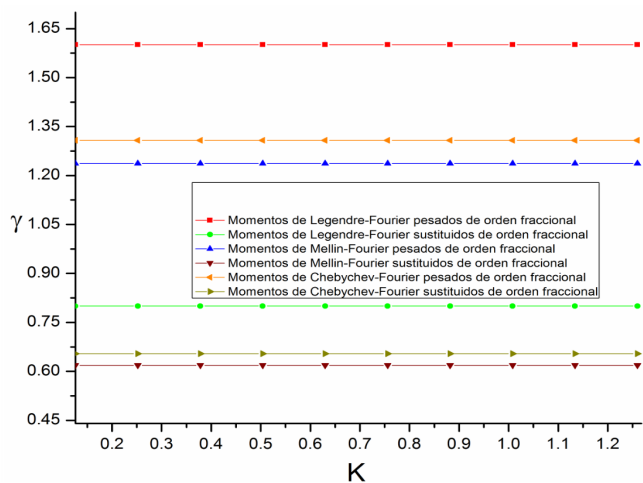


Figura 4.32: Valor óptimo de γ para la imagen de “Cameraman” con cambios en su escala, donde K es el factor de escala.

4. Momentos circulares en píxeles polares

Como se aprecia en las Figs. 4.31 y 4.32 el valor óptimo de γ se comporta constante a los cambios de escala y de rotación de la imagen, en estos experimentos se puede concluir que el valor de γ obtenido por la búsqueda de la sección dorada del Algoritmo 1 para cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional. Otro de los experimentos para determinar el parámetro óptimo de gamma en términos del error de reconstrucción (NIRE) se realiza a través de 15 imágenes estándar de tamaño de 512×512 píxeles (Fig. 4.33) con cambios en escala y en rotación.



Figura 4.33: Imágenes de prueba de tamaño 512×512 píxeles.

En la Fig.4.34 se muestran los resultados del valor óptimo de γ de las 15 imágenes de prueba para cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional. Cabe destacar que las imágenes sufrieron cambios tanto de escala como del ángulo de rotación, como se puede apreciar en la tabla el valor de gamma para cada imagen es invariante a cambios de rotación y a la escala.

4. Momentos circulares en pixeles polares

| Imagen | Cambios | | MLFPOF γ | MLFSOF γ | MMFPOF γ | MMFSOF γ | MCFPOF γ | MCFSOF γ |
|----------------|---------------------|------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | Rotación | Escala | | | | | | |
| cameraman | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.584 | 0.790 | 1.328 | 0.661 | 1.919 | 0.957 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.584 | 0.790 | 1.328 | 0.661 | 1.919 | 0.957 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.584 | 0.790 | 1.328 | 0.661 | 1.919 | 0.957 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.584 | 0.790 | 1.328 | 0.661 | 1.919 | 0.957 |
| woman blonde | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.634 | 1.124 | 1.395 | 0.701 | 1.576 | 0.787 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.634 | 1.124 | 1.395 | 0.701 | 1.576 | 0.787 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.634 | 1.124 | 1.395 | 0.701 | 1.576 | 0.787 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.634 | 1.124 | 1.395 | 0.701 | 1.576 | 0.787 |
| house | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.562 | 0.782 | 1.373 | 0.684 | 1.548 | 1.038 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.562 | 0.782 | 1.373 | 0.684 | 1.548 | 1.038 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.562 | 0.782 | 1.373 | 0.684 | 1.548 | 1.038 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.562 | 0.782 | 1.373 | 0.684 | 1.548 | 1.038 |
| lake | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.553 | 0.782 | 1.634 | 0.818 | 1.941 | 0.971 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.553 | 0.782 | 1.634 | 0.818 | 1.941 | 0.971 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.553 | 0.782 | 1.634 | 0.818 | 1.941 | 0.971 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.553 | 0.782 | 1.634 | 0.818 | 1.941 | 0.971 |
| jetplane | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.490 | 0.746 | 1.364 | 0.678 | 1.517 | 0.759 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.490 | 0.746 | 1.364 | 0.678 | 1.517 | 0.759 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.490 | 0.746 | 1.364 | 0.678 | 1.517 | 0.759 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.490 | 0.746 | 1.364 | 0.678 | 1.517 | 0.759 |
| livingroom | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.824 | 0.913 | 1.219 | 0.611 | 1.774 | 0.890 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.824 | 0.913 | 1.219 | 0.611 | 1.774 | 0.890 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.824 | 0.913 | 1.219 | 0.611 | 1.774 | 0.890 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.824 | 0.913 | 1.219 | 0.611 | 1.774 | 0.890 |
| walkbridge | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.453 | 0.728 | 1.314 | 0.656 | 1.409 | 0.706 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.453 | 0.728 | 1.314 | 0.656 | 1.409 | 0.706 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.453 | 0.728 | 1.314 | 0.656 | 1.409 | 0.706 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.453 | 0.728 | 1.314 | 0.656 | 1.409 | 0.706 |
| lena | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.350 | 0.976 | 1.503 | 0.751 | 1.679 | 0.840 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.350 | 0.976 | 1.503 | 0.751 | 1.679 | 0.840 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.350 | 0.976 | 1.503 | 0.751 | 1.679 | 0.840 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.350 | 0.976 | 1.503 | 0.751 | 1.679 | 0.840 |
| Woman darkhair | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.801 | 0.904 | 1.657 | 0.832 | 1.869 | 0.935 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.801 | 0.904 | 1.657 | 0.832 | 1.869 | 0.935 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.801 | 0.904 | 1.657 | 0.832 | 1.869 | 0.935 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.801 | 0.904 | 1.657 | 0.832 | 1.869 | 0.935 |
| Barbara | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.832 | 1.314 | 1.612 | 0.804 | 1.788 | 0.890 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.832 | 1.314 | 1.612 | 0.804 | 1.788 | 0.890 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.832 | 1.314 | 1.612 | 0.804 | 1.788 | 0.890 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.832 | 1.314 | 1.612 | 0.804 | 1.788 | 0.890 |
| Peppers | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.869 | 0.935 | 1.562 | 0.782 | 1.751 | 0.876 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.869 | 0.935 | 1.562 | 0.782 | 1.751 | 0.876 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.869 | 0.935 | 1.562 | 0.782 | 1.751 | 0.876 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.869 | 0.935 | 1.562 | 0.782 | 1.751 | 0.876 |
| mandril | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.671 | 0.832 | 1.305 | 0.651 | 1.503 | 0.751 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.671 | 0.832 | 1.305 | 0.651 | 1.503 | 0.751 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.671 | 0.832 | 1.305 | 0.651 | 1.503 | 0.751 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.671 | 0.832 | 1.305 | 0.651 | 1.503 | 0.751 |
| Goldhill | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.671 | 1.138 | 1.459 | 0.732 | 1.598 | 0.796 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.671 | 1.138 | 1.459 | 0.732 | 1.598 | 0.796 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.671 | 1.138 | 1.459 | 0.732 | 1.598 | 0.796 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.671 | 1.138 | 1.459 | 0.732 | 1.598 | 0.796 |
| pirate | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 1.467 | 0.732 | 1.300 | 0.648 | 1.423 | 0.709 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 1.467 | 0.732 | 1.300 | 0.648 | 1.423 | 0.709 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.467 | 0.732 | 1.300 | 0.648 | 1.423 | 0.709 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 1.467 | 0.732 | 1.300 | 0.648 | 1.423 | 0.709 |
| boat | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1$ | 0.999 | 0.746 | 1.219 | 0.606 | 1.305 | 0.651 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1$ | 0.999 | 0.746 | 1.219 | 0.606 | 1.305 | 0.651 |
| | $\theta = 0^\circ$ | $k = 1.25$ | 0.999 | 0.746 | 1.219 | 0.606 | 1.305 | 0.651 |
| | $\theta = 35^\circ$ | $k = 1.25$ | 0.999 | 0.746 | 1.219 | 0.606 | 1.305 | 0.651 |

Figura 4.34: Valores óptimos de γ para cada imagen de prueba con cambios de escala y de ángulo de rotación, para diferentes momentos ortogonales de orden fraccional.

4.6. Conclusiones

Con el método propuesto para el cómputo de los momentos ortogonales de orden fraccional se pudo minimizar el error de integración y el error geométrico que están presentes en los métodos convencionales.

En los resultados obtenidos de las Figs.4.5-4.28 se puede visualizar que los momentos que utilizan los polinomios de Jacobi pesados de orden fraccional como kernel tienen un mejor desempeño en la reconstrucción de imágenes que los momentos que utilizan los polinomios Jacobi sustituidos de orden fraccional, debido a que presentan un mayor error de reconstrucción cuando aumenta el valor de γ , lo cual se puede apreciar en los resultados obtenidos de la Fig.4.29.

En base a los resultados presentados en las Figs.4.31 y 4.32 el valor óptimo de γ para cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional es invariante a cambios de escala y del ángulo de rotación en una imagen digital.

Bibliografía

- [1] Pawlak, M., & Liao, S. X. (2002). On the recovery of a function on a circular domain. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(10), 2736-2753.
- [2] Keys, R. (1981). Cubic convolution interpolation for digital image processing. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 29(6), 1153-1160.
- [3] Upneja, R., & Singh, C. (2015). Fast computation of Jacobi-Fourier moments for invariant image recognition. *Pattern Recognition*, 48(5), 1836-1843.
- [4] Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., & Báez-Rojas, J. J. (2014). High-precision and fast computation of Jacobi–Fourier moments for image description. *JOSA A*, 31(1), 124-134.
- [5] Sáez-Landete, J. (2017). Comments on “fast computation of jacobi-Fourier moments for invariant image recognition”. *Pattern Recognition*, 67, 16-22.
- [6] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill,.
- [7] Toxqui-Quitl, C., Gutierrez-Lazcano, L., Padilla-Vivanco, A., & Camacho-Bello, C. (2011, November). Gray-level image reconstruction using Bessel-Fourier moments. In *22nd Congress of the International Commission for Optics: Light for the Development of the World (Vol. 8011, p. 80112T)*. International Society for Optics and Photonics.
- [8] Singh, C., Walia, E., & Upneja, R. (2013). Accurate calculation of Zernike moments. *Information Sciences*, 233, 255-275.
- [9] Walia, E., Singh, C., & Goyal, A. (2012). On the fast computation of orthogonal Fourier–Mellin moments with improved numerical stability. *Journal of Real-Time Image Processing*, 7(4), 247-256.

Capítulo 5

Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

Los momentos circulares tienen la característica de ser invariantes a cambios de escala y a rotación y a su vez tienen la capacidad de representar características globales de una imagen, por lo que suelen utilizarse en aplicaciones en análisis de imágenes tales como: clasificación y reconocimiento de objetos, recuperación de imágenes, reconocimiento facial, extracción de características de una región de interés, reconocimiento de imágenes con cambios de rotación en condiciones ruidosas y sin ruido[1]. En este trabajo de tesis se implementaron los momentos circulares en dos aplicaciones; en la primera como descriptores para clasificar la base de datos MNIST creado por LeCun et al [2]. Utilizando tres clasificadores diferentes (K-NN, MLP y TREE); en la segunda, se transforma una imagen catadióptrica a una imagen con una proyección cilíndrica mediante los momentos circulares de orden fraccional utilizando una reasignación adecuada de los píxeles.

5.1. Clasificación de imágenes mediante momentos circulares de orden fraccional

Los momentos circulares son ampliamente utilizados en el reconocimiento y clasificación de patrones, el análisis de imagen y visión artificial, tienen la capacidad de caracterizar, evaluar y manipular información visual con mínima redundancia. Por otra parte MNIST es una base de datos que contiene imágenes de números escritos a mano, donde cada imagen está etiquetada con un número entero. Es usada para medir el

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

rendimiento de algoritmos de machine learning, clasificación y selección de descriptores. La base de datos de MNIST contiene un conjunto de entrenamiento de 60 000 imágenes y un conjunto de pruebas de 10 000 ejemplos. El conjunto de entrenamiento es utilizado para enseñar al algoritmo a predecir la etiqueta correcta, mientras que el conjunto de prueba es usado para comprobar la precisión del clasificador en sus estimaciones. En la Fig. 5.1 se muestra algunos de los caracteres que compone la base de datos MNIST.



Figura 5.1: Algunas imágenes de la base de datos MNIST con un tamaño de 20×20 píxeles.

En este trabajo de tesis se utilizan los momentos circulares de orden fraccional en los algoritmos de clasificación como descriptores. El análisis de la clasificación se realiza a diferentes valores de γ con diferentes algoritmos de clasificación tales como: K-NN, MLP y Árboles de Clasificación.

5.1.1. Clasificador K-NN

K-NN (k vecinos más cercanos) es un método de clasificación supervisada, que puede usarse para problemas de predicción tanto de clasificación como de regresión. Sin embargo, es más ampliamente utilizado en problemas de clasificación dentro del sector industrial [3]. Este algoritmo clasifica cada dato nuevo en el grupo que corresponda, según tenga k vecinos más cerca de un grupo o de otro, es decir, calcula la distancia del elemento nuevo a cada uno de los existentes, y ordena dichas distancias de menor a mayor para ir seleccionando el grupo al que debe pertenecer. Este grupo será, por tanto, el de mayor frecuencia con menores distancias. Tomando a los momentos circulares como descriptores de las imágenes de MNIST se realiza la clasificación de los caracteres

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

de la base de datos utilizando las funciones predeterminadas de Matlab (*fitcknn*) del algoritmo de clasificación de K-NN, esto con la finalidad de analizar el comportamiento de γ . La función de Matlab para este algoritmo devuelve un modelo de clasificación basado en las variables de entrada como predictores. Los descriptores de cada una de las imágenes se obtuvieron para cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional, los cuales se almacenaron en una matriz de 10×10 . El desempeño de este algoritmo depende del valor de k que se tome, la literatura se recomienda un valor de $k = 5$. En la Fig. 5 se muestra el porcentaje de clasificación para diferentes valores de γ .

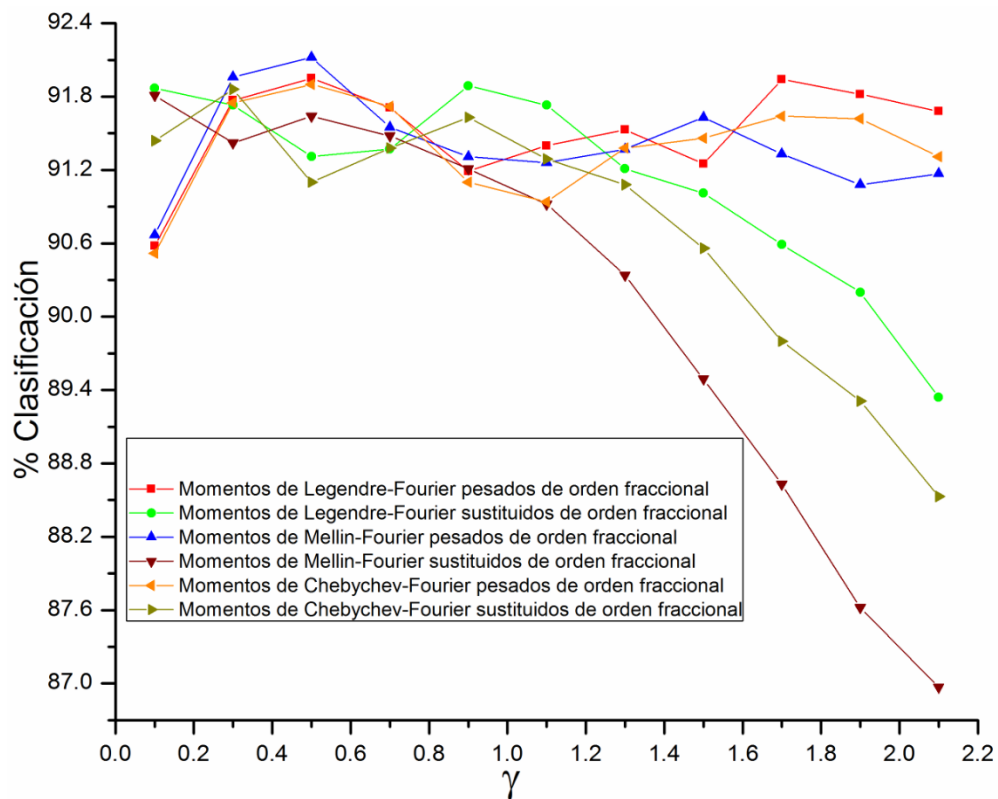


Figura 5.2: Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con K-NN con un valor de $k = 5$ de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional.

En base a los resultados obtenidos del clasificador K-NN de la Fig. 5.2, los momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional tienen una mejor clasificación del 92% con un valor de $\gamma = 0.5$. Por otra parte, utilizando los momentos circulares pesados de orden fraccional se obtienen mejores resultados en comparación con los sustituidos, ya que cuando el valor de γ se encuentra en el intervalo de 1 a 2.1 el desempeño de los de los momentos circulares sustituidos de orden fraccional disminuye.

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

5.1.2. Clasificador MLP

El clasificador a través de un perceptrón multicapa (MLP) es un clasificador basado en una red neuronal artificial feedforward (red neuronal prealimentada). El tipo de aprendizaje es supervisado, es decir, que es el usuario quien determina la salida deseada. MLP consiste en tres capas de nodos; una capa de entrada, una de salida y una o más capas de ocultas, cada capa está completamente conectada a la siguiente capa de la red. Los nodos en la capa de entrada representan los datos de entrada. Todos los otros nodos asignan las entradas con los pesos del nodo y aplicando una función de activación[4]. En la Fig. 5.3 se muestra la estructura de un Perceptrón Multicapa simple, es decir, con una sola capa oculta.

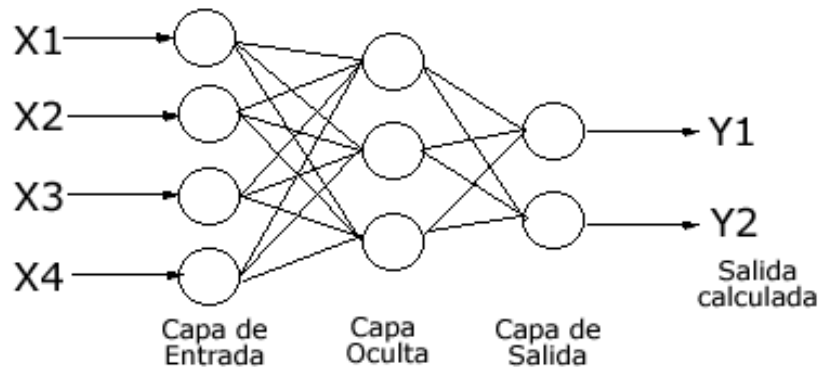


Figura 5.3: Ejemplo de un perceptrón Multicapa simple.

La red se compone de una etapa de entrenamiento y una de funcionamiento. En la de entrenamiento consiste en la presentación de un grupo de entrenamiento en el cual, cuyo principal objetivo es conseguir la mínima discrepancia entre el valor de salida obtenido y el valor de salida deseado. En la etapa de funcionamiento, se presenta un nuevo grupo de datos, grupo de validación, la señal se transmite hacia las neuronas ocultas en donde se transforman las señales a partir de la aplicación de una función de activación y proporcionan un valor de salida que se transmite a la siguiente capa, en donde, a partir de la misma operación se obtiene una salida de la red. El objetivo de este grupo es el de controlar el proceso de aprendizaje[4].

Para la clasificación de la base de datos MNIST mediante el algoritmo de MLP de este trabajo de tesis, se utiliza las funciones de Matlab (*patternnet* y *trainFcn*) en donde; *patternnet* toma los argumentos de entrada y devuelve una red neuronal de reconocimiento de patrones y *trainFcn* es una función de entrenamiento de la red,

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

el perceptrón multicapa de este trabajo se muestra en la Fig. 5.4, en donde la red está compuesta por una capa de entrada de 100 neuronas de que la componen los descriptores de cada momento circular de orden fraccional para cada imagen, con 120 capas ocultas y una capa de salida con 10 clases.

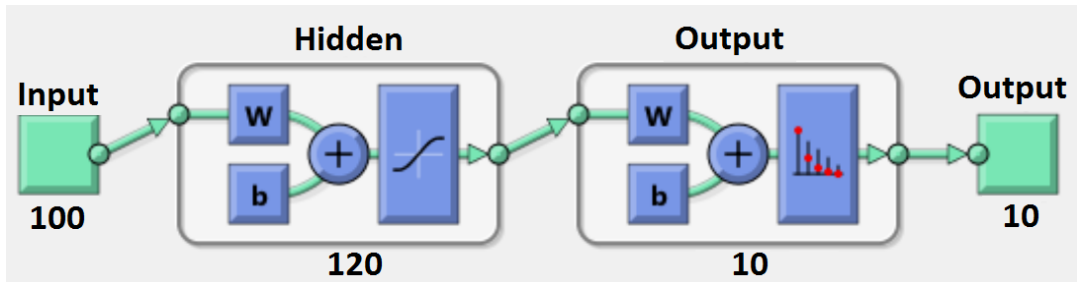


Figura 5.4: MLP de Matlab para la clasificación de la base de datos MNIST.

En la Fig. 5.5 se muestra el porcentaje de clasificación para este algoritmo a diferentes valores de γ .

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos del algoritmo de MLP de la Fig. 5.5, los momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional tienen un mejor desempeño de 91.26% cuando $\gamma = 0.1$, por otra parte utilizando los momentos circulares pesados de orden fraccional se obtienen mejores resultados en comparación con los sustituidos, ya que cuando el valor de γ aumenta el desempeño de los momentos circulares sustituidos de orden fraccional disminuye en comparación con los pesados.

5.1.3. Árboles de clasificación

Los árboles de clasificación y regresión son métodos de clasificación supervisada y de aprendizaje automático, los cuales son utilizados para construir modelos de predicción a partir de los datos de entrada. Los árboles de clasificación se basan en una estructura en forma de árbol, donde las ramas representan conjuntos de decisiones, para generar reglas de clasificación en un conjunto de datos en subgrupos de datos[5]. Cada hoja del árbol se marca con una clase o una distribución de probabilidad sobre las clases, las ramificaciones se generan de forma recursiva hasta que se cumplan ciertos criterios.

En este trabajo de tesis se realiza un script para la clasificación de la base de datos MNIST utilizando la función *fictree* predeterminada de Matlab, esta función devuelve un árbol de clasificación para los datos de entrada y para las respuestas

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

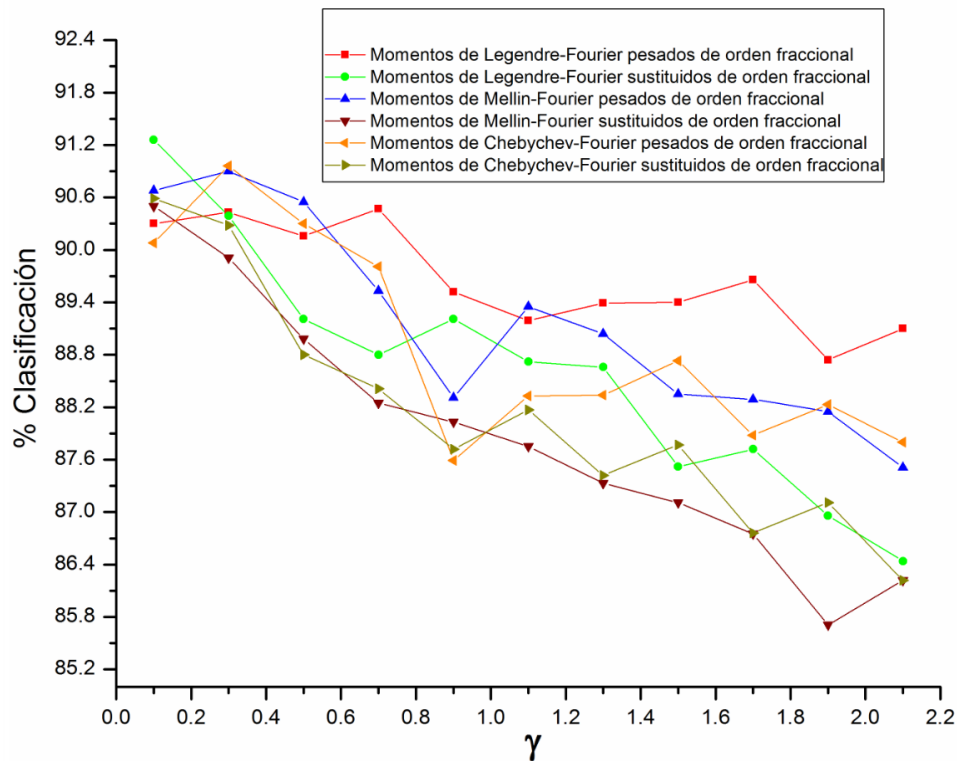


Figura 5.5: Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con MLP de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional.

esperadas para cada clase de los conjuntos a clasificar. Como datos de entrada para este trabajo se emplearon los descriptores obtenidos de cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional de orden 10 almacenados en una matriz de 10×10 . Como respuesta de entrada para este trabajo se empleó un vector con las etiquetas para cada clase de los caracteres de la base de datos, es decir los nombres de cada carácter. En la Fig. 5.6 se muestra el desempeño de este clasificador para cada conjunto de momentos circulares de orden fraccional a diferentes valores de γ .

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

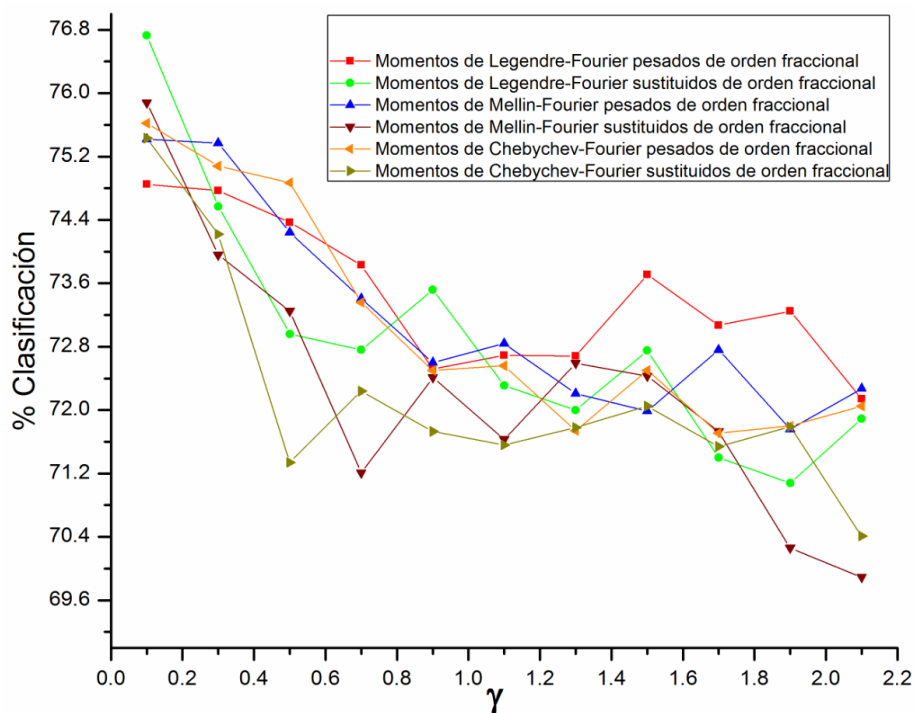


Figura 5.6: Clasificación de imágenes de la base de datos MNIST con árboles de clasificación de cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional.

Teniendo en cuenta los resultados de la Fig. 5.6, los momentos circulares de orden fraccional tienen un mejor desempeño cuando el valor de $\gamma = 0.1$. Por otra parte tomando las Figs. 5.2 y 5.5 se puede concluir que el desempeño del árbol de clasificación es menor a comparación de los otros, ya que el clasificador K-NN y MPL tienen un desempeño de clasificación mayor a 80 %, por lo contrario el árbol de clasificación su desempeño es menor.

5.2. Interpolación de imágenes catadióptricas

Las imágenes catadióptricas (Fig. 5.7.a) son aquellas imágenes con un campo de visión de 360° obtenidas a través de un sistema visión catadióptrico, este tipo de imágenes son ampliamente utilizadas en muchas aplicaciones de visión, como navegación de robots[6] y vigilancia[7], reconocimiento fotográfico aéreo[8], aplicaciones médicas[9] y reconocimiento del iris[10]. Los sistemas de visión catadióptricos consisten en una cámara convencional que apunta hacia un espejo convexo en el eje Z , la información del objeto se refleja y la cámara capta este reflejo, componiendo la imagen omnidireccional. En la Fig. 5.7.b muestra el modelo de proyección del sistema de visión catadióptrico, en donde un rayo del punto P hacia el punto O se refleja desde

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

la superficie del espejo M y es proyectado por la lente en el plano de la imagen N [6]. La imagen proyectada en el plano de la imagen (plano de proyección) es la vista omnidireccional.

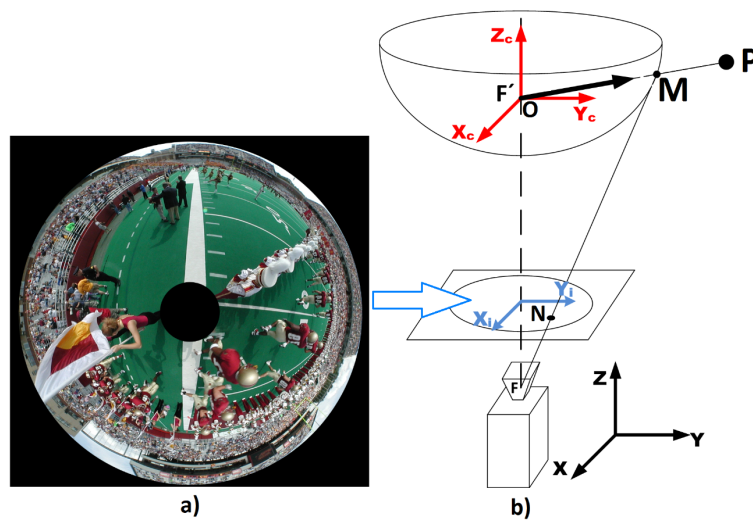


Figura 5.7: Imágenes catadióptricas; a) Ejemplo de una imagen catadióptrica [12], b) Modelo de proyección del sistema de visión catadióptrico.

Por otra parte, en algunas aplicaciones para este tipo de imágenes, es necesario transformar la imagen adquirida en otra imagen mediante una reasignación adecuada de los píxeles esto con la finalidad de tener una mayor resolución de la imagen, tal es el caso del análisis de imágenes del iris. Por lo general, las imágenes adquiridas de un sistema de reconocimiento del iris son de diferente tamaño. Por lo tanto, las características extraídas del iris a través de las imágenes capturadas de este sistema de reconocimiento se colocan en diferentes ubicaciones espaciales. Las características desalineadas en estas imágenes capturadas dan como resultado una menor precisión de coincidencia debido a que un sistema de reconocimiento del iris identifica o verifica la identidad de la persona en función de estructura de la superficie del iris. El sistema de reconocimiento de iris actual generalmente compensa la deformación en un proceso llamado: normalización del iris. Este proceso reasigna el anillo de iris segmentado a un rectángulo de tamaño fijo.

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

En este trabajo de tesis se utiliza el conjunto de momentos circulares de orden fraccional y la reconstrucción en un mapa rectangular para transformar las imágenes omnidireccionales en imágenes con una proyección cilíndrica para el caso de las imágenes catadiópticas y normalización del iris en una imagen rectangular para el análisis de imágenes del iris. Este método mapea cada punto (x, y) en el dominio cartesiano hasta un punto (r, θ) en coordenadas polares, como se muestra en la Fig. 5.8.

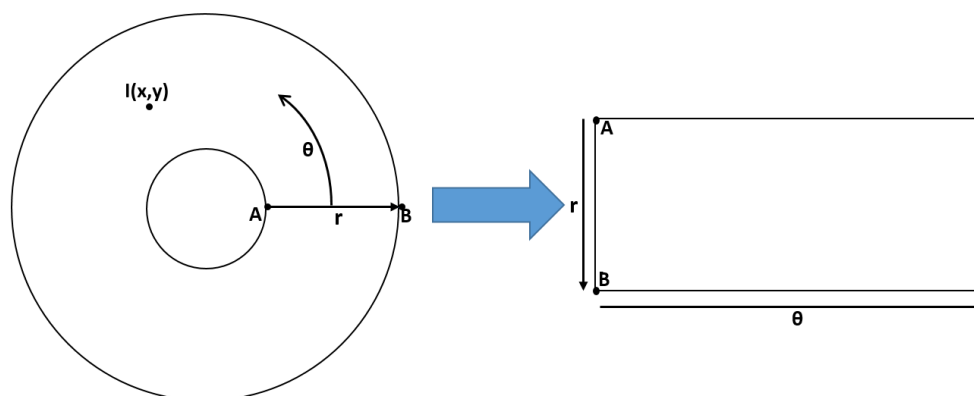


Figura 5.8: Modelo de interpolación de una imagen catadióptica o normalización del iris.

Como imágenes experimentales para este trabajo se utiliza las imágenes omnidireccionales de la Fig. 5.9. La transformación para estas imágenes se realiza para cada conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional con $L = 160$, para el valor de γ para esta aplicación se obtuvo mediante el método de búsqueda de sección dorada del capítulo 4.5. Las proyecciones cilíndricas obtenidas para cada imagen de prueba se muestran en las Figs. 5.10 y 5.11.

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

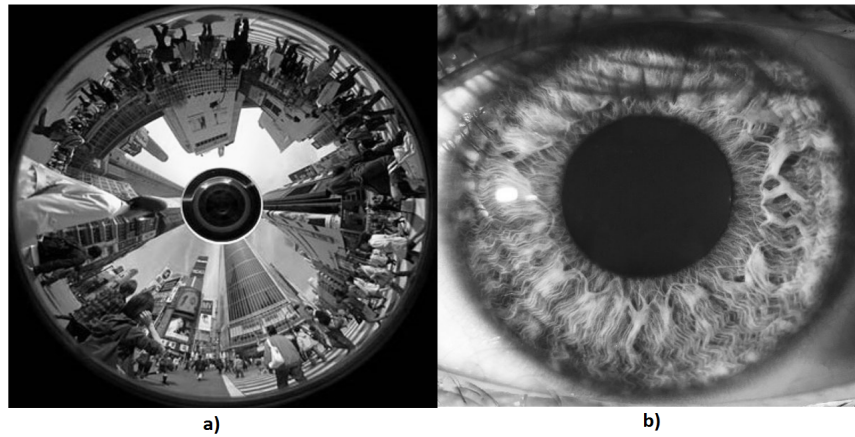


Figura 5.9: Imágenes catadióptricas de prueba de tamaño de 512×512 píxeles; a) Vista de la ciudad de Tokio [13], b) Iris del ojo humano [14].

Los momentos circulares de orden fraccional son capaces de adquirir la información de una imagen digital, ya que en base a los resultados obtenidos de las Figs. 5.10 y 5.11. se puede apreciar que la imagen recuperada e interpolada contiene toda la información de la imagen original sin pérdida de los detalles más relevantes de las imágenes catadióptricas.

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional







| Momento | Mapeo de la imagen catadióptrica |
|---|--|
| Momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.9776, NIRE = 0.006394)$ |  |
| Momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.1388, NIRE = 0.006407)$ |  |
| Momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.9191, NIRE = 0.006236)$ |  |
| Momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.0803, NIRE = 0.006294)$ |  |
| Momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.9776, NIRE = 0.006392)$ |  |
| Momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional $(L = 160, \gamma' = 1.0388, NIRE = 0.006408)$ |  |

Figura 5.10: Proyección cilíndrica y error de reconstrucción NIRE de la ciudad de Tokio de diferentes momentos ortogonales de orden fraccional con un orden máximo de $L=160$, utilizando el valor óptimo de γ .

5. Aplicación de momentos Jacobi-Fourier de orden fraccional

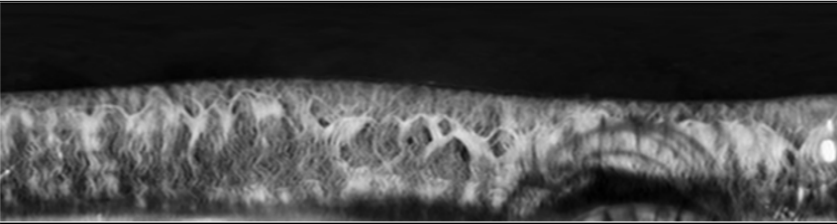
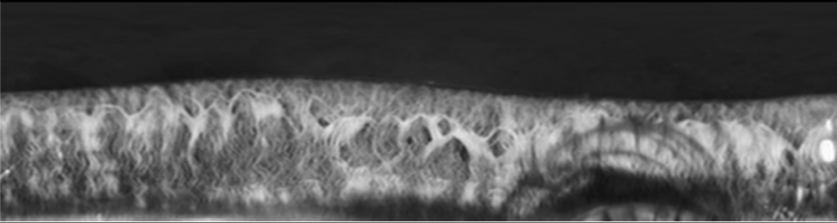
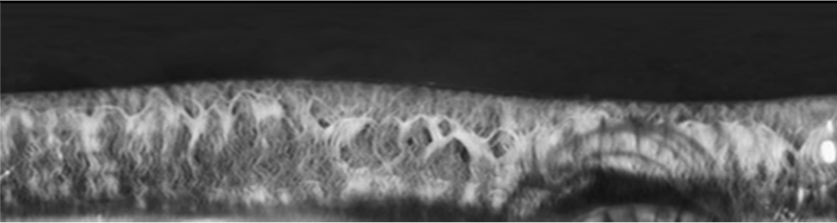
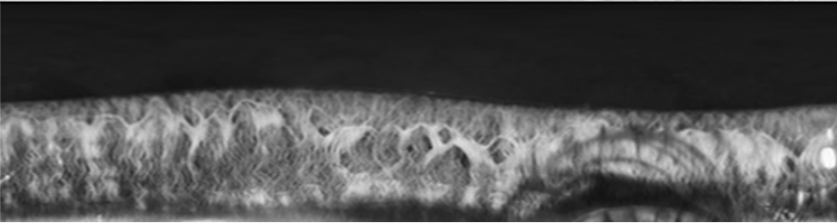
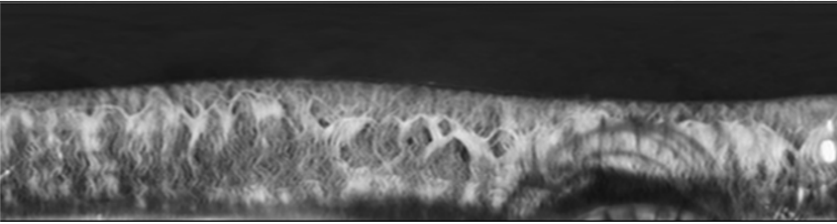
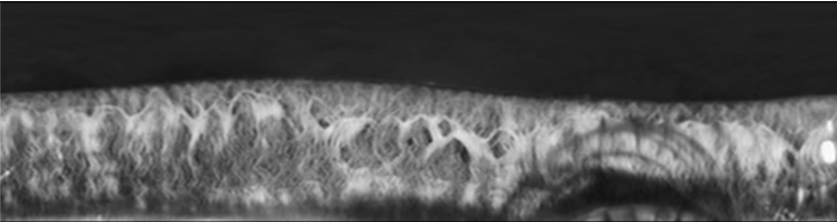
| Momento | Mapeo de la imagen catadióptrica |
|---|--|
| Momentos de Legendre-Fourier pesados de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.9776$, $NIRE = 0.0018642$) |  |
| Momentos de Legendre-Fourier sustituidos de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.1388$, $NIRE = 0.0018673$) |  |
| Momentos de Mellin-Fourier pesados de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.9191$, $NIRE = 0.0018638$) |  |
| Momentos de Mellin-Fourier sustituidos de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.0803$, $NIRE = 0.0018672$) |  |
| Momentos de Chebychev-Fourier pesados de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.9776$, $NIRE = 0.0018637$) |  |
| Momentos de Chebychev-Fourier sustituidos de orden fraccional ($L = 160$, $\gamma' = 1.0388$, $NIRE = 0.0018644$) |  |

Figura 5.11: Proyección cilíndrica y error de reconstrucción NIRE del iris del ojo humano de diferentes momentos ortogonales de orden fraccional con un orden máximo de $L=160$, utilizando el valor óptimo de γ .

Bibliografía

- [1] Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2016). 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley & Sons.
- [2] Yann.lecun.com. (2018). MNIST handwritten digit database, Yann LeCun, Corinna Cortes and Chris Burges. [online] Available at: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/> [Accessed 29 Aug. 2018].
- [3] He, Q. P., & Wang, J. (2007). Fault detection using the k-nearest neighbor rule for semiconductor manufacturing processes. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 20(4), 345-354.
- [4] Pal, S. K., & Mitra, S. (1992). *Multilayer Perceptron, Fuzzy Sets, Classification*.
- [5] Breiman, L. (2017). *Classification and regression trees*. Routledge.
- [6] Ikeuchi, K., Sakauchi, M., Kawasaki, H., & Sato, I. (2004). Constructing virtual cities by using panoramic images. *International Journal of Computer Vision*, 58(3), 237-247.
- [7] Fiala, M., & Basu, A. (2004). Robot navigation using panoramic tracking. *Pattern Recognition*, 37(11), 2195-2215
- [8] Boulton, T. E., Gao, X., Micheals, R., & Eckmann, M. (2004). Omni-directional visual surveillance. *Image and Vision Computing*, 22(7), 515-534.
- [9] Chen, L. D., Zhang, M. J., & Xiong, Z. H. (2010). Series-parallel pipeline architecture for high-resolution catadioptric panoramic unwrapping. *IET image processing*, 4(5), 403-412.
- [10] Rana, H. K., Azam, M. S., & Akhtar, M. R. (2017). Iris Recognition System Using PCA Based on DWT. *SM J Biometrics Biostat*, 2(3), 1015.
- [11] Bahrami, M., & Goncharov, A. V. (2010). All-spherical catadioptric telescope design for wide-field imaging. *Applied optics*, 49(30), 5705-5712.

BIBLIOGRAFÍA

- [12] Cs.columbia.edu. (2018). CAVE Projects: Catadioptric Cameras for 360 Degree Imaging. [online] Available at: http://www.cs.columbia.edu/CAVE/projects/cat_cam_360/ [Accessed 21 Aug. 2018].
- [13] Web-japan.org. (2018). 360-degree Camera! 2 - Hi-tech - Kids Web Japan - Web Japan. [online] Available at: <https://web-japan.org/kidsweb/hitech/360-degree/002.html> [Accessed 21 Aug. 2018].
- [14] Web-japan.org. (2018). 360-degree Camera! 2 - Hi-tech - Kids Web Japan - Web Japan. [online] Available at: <https://web-japan.org/kidsweb/hitech/360-degree/002.html> [Accessed 21 Aug. 2018].

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

A continuación se describirán las conclusiones generales del presente trabajo de tesis y algunos de los posibles trabajos futuros que pueden continuar desarrollándose como resultado de la investigación realizada.

6.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentó un panorama general de algunos aspectos de los momentos circulares de orden fraccional y sus posibles soluciones. De igual forma, se presentó un análisis de la construcción de nuevas familias de momentos circulares, los cuales tienen la característica de generar momentos con orden fraccional. Las aportaciones más relevantes de este trabajo de tesis se presentan a continuación:

Momentos genéricos de orden fraccional

En este trabajo de tesis, se propuso un nuevo conjunto de momentos circulares a partir de los polinomios genéricos de Jacobi, los cuales tienen la característica de generar órdenes fraccionales. Se proponen dos familias de polinomios: polinomios sustituidos de orden fraccional y polinomios pesados de orden fraccional. Los momentos genéricos de orden fraccional tienen la habilidad de generar diferentes familias cambiando los valores α y β , tales como: momentos de Legendre-Fourier de orden fraccional ($\alpha=\beta=1$), momentos de Chebychev-Fourier de orden fraccional ($\alpha=2$ y $\beta=3/2$) y momentos de Mellin-Fourier de orden fraccional ($\alpha=\beta=2$). Por otra parte, se analizó el desempeño de cada familia mediante el error de reconstrucción, en donde se demostró que los MJFPOF tienen un mejor desempeño que los MJFSOF, debido a que presentan un mayor error al aumentar el valor de γ .

Búsqueda de la mejor familia de momentos de orden fraccional.

En este trabajo de tesis se propuso un algoritmo para la búsqueda del mejor valor de γ con respecto al error de reconstrucción (NIRE). El método propuesto facilita la

6. Conclusiones y trabajo futuro

búsqueda del parámetro óptimo de γ que mejor se ajuste a determinadas aplicaciones. El análisis presentado demuestra que el valor que el valor óptimo de γ es invariante a cambios de escala y de rotación para los momentos circulares de orden fraccional. Sin embargo, puede haber una variación en el valor de γ debido a la pérdida de información en la imagen original o la inestabilidad numérica de los momentos.

Aplicación de los momentos genéricos de orden fraccional

Los momentos circulares son utilizados en reconocimiento y clasificación de patrones, en el análisis de imágenes médicas y entre otras, ya que tienen la capacidad de representar características globales de una imagen con una mínima redundancia. En este trabajo de tesis se implementó los momentos circulares de orden fraccional para la clasificar los caracteres de la base de datos MNIST, en dónde se comparó el desempeño de tres clasificadores (K-NN, MLP y Árboles de Clasificación). El análisis presentado demuestra que el clasificador K-NN y los momentos pesados de Mellin-Fourier de orden fraccional tienen mayor desempeño que el resto de los momentos.

Por otra parte, se utilizaron los momentos circulares de orden fraccional para la reconstrucción de imágenes catadiópticas y la normalización del iris en una forma rectangular. En base a los resultados obtenidos del error de reconstrucción (NIRE), los momentos circulares pesados de orden fraccional tienen mayor desempeño que los sustituidos.

6.2. Trabajo a futuro

Existe una variedad de aplicaciones que pueden ser mejoradas con el enfoque propuesto. Como trabajo a futuro se propone analizar los siguientes temas:

- Reducir el tiempo de cómputo del algoritmo propuesto.
- Proponer un nuevo método para encontrar un valor óptimo de γ , la cual se adapte a diferentes aplicaciones, tales como: reconocimiento y clasificación de patrones, reconocimiento del iris, reconocimiento facial, extracción de características de una región de interés, reconocimiento de imágenes con cambios de rotación en condiciones ruidosas y sin ruido, entre otras.]
- Implementar los momentos de orden fraccional en el análisis de imágenes RGB.
- Encontrar el valor óptimo de α y β para los momentos genéricos de Jacobi-Fourier de orden fraccional.