



U

P

T

**Uso de algoritmos heurísticos para el diseño
de rutas de recolección de
residuos sólidos urbanos.**

Realizado por:

Imelda Gutiérrez Espinosa

**Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado
de:**

MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN DE PROCESOS

En la

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE TULANCINGO

Octubre 2018

Tulancingo de Bravo, Hgo.

Director de tesis:

Dr. Enrique González Gutiérrez

©UPT

**El autor otorga a UPT el permiso de reproducir y distribuir copias en su
totalidad o en partes de esta tesis.**

Índice general

1. Objetivos	16
1.1. Objetivo general	16
1.2. Objetivos particulares	16
2. La gestión de residuos sólidos urbanos	18
2.1. Gestión de residuos sólidos en México	20
2.2. Manejo de residuos sólidos urbanos en el Estado de Hidalgo	24
3. Recolección de residuos sólidos	33
3.1. Capacidad del vehículo	34
3.2. Cantidad de flota disponible	34
3.3. Densidad de Población	37
3.3.1. Generación diaria de basura	37
3.4. Zonas de recolección	38
3.5. Frecuencia de recolección	40
3.5.1. Recolección diaria	42
3.5.2. Recolección cada tercer día	42
3.5.3. Número de recorridos del vehículo	44

4. Programación Matemática	47
4.1. Programación Lineal Entera (PLE)	52
4.2. Programación Binaria (PB)	53
4.3. Complejidad algorítmica	55
4.4. Conceptos básicos de teoría de grafos	57
5. Descripción del problema del agente viajero	66
5.1. La trayectoria más corta de un ciclo	67
5.2. Rutas de recolección y el TSP	70
6. Implementación computacional	73
6.1. Transformación de un TSP asimétrico en un TSP simétrico	74
6.2. Algoritmos heurísticos	77
6.2.1. Algoritmo del vecino más próximo	78
6.2.2. Algoritmo 2-opt	79
6.3. Sistema de información geográfica	82
7. Conclusiones	89
A. Sistema de ecuaciones	91
A.1. Características de las soluciones	94
B. Presencia de subtours	97
C. Codificación MATLAB	101
C.1. Vecino más próximo	101
C.2. TSP asimétrico-simétrico	104

Índice de tablas

2.1. Tiempo de incubación y crecimiento de la mosca [7]	26
2.2. Promedio diario de generación de residuos sólidos en Tulancingo	28
2.3. Volumen diario de residuos sólidos en Tulancingo (2010-2030) [18].	29
5.1. TSP Asimétrico de la unidad 17, turno matutino con 31 nodos, (extracto).	71
5.2. TSP Asimétrico de la unidad 12, turno matutino con 156 no- dos (extracto).	72
6.1. Algoritmo del vecino más proximo [43].	79
6.2. Algoritmo de Lin y Kernighan [41].	80
6.3. Coordenadas geográficas de ruta nocturna (latitud-longitud). .	85
6.4. Matriz de distancias entre nodos (extracto).	86
6.5. Contraste de la distancia entre las rutas.	86

Índice de figuras

2.1. Mapa del estado de Hidalgo.	19
2.2. Comisión del Servicio Público de Limpia del Municipio de Tullancingo de Bravo (Zona 5 (A) - Unidad 12)	21
2.3. Comisión del Servicio Público de Limpia del Municipio de Tullancingo de Bravo (Zona 5 (B) - Unidad 12)	22
2.4. Proceso de gestión de residuos.	23
2.5. Diagrama de flujo del proceso actual de recolección	31
3.1. Servicio de recolección de residuos, recolector compactador carga trasera de dos ejes.	35
3.2. Disposición y capacidad de los vehículos recolectores del municipio (extracto).	36
3.3. Promedio de recolección por periodo.	38
3.4. Ubicación geográfica del área de interés.	39
3.5. Asignación de subsectores (extracto).	40
3.6. Ruta de recolección, Zona C1 Centro (extracto).	41
3.7. Ruta de recolección real en la zona centro, con la intersección de calles.	43
3.8. Ruta de recolección actual en la zona centro.	46

4.1. Geometría de un modelo entero.	53
4.2. Grafo dirigido (recorrido desde un vértice inicial a un vértice final).	58
4.3. Grafo no dirigido.	59
4.4. Peso g en las aristas.	59
4.5. Grafo del Ejemplo 8.	60
4.6. Trayecto de a a f	60
4.7. Trayecto de a a f , que ilustra un camino simple.	61
4.8. Camino cerrado.	62
4.9. Camino cerrado.	62
4.10. Ciclo Hamiltoniano.	63
4.11. Subtours.	63
4.12. Grafo no dirigido.	64
5.1. Tour de una instancia de ocho ciudades.	68
5.2. Considerando como vértice inicial el nodo dos.	68
6.1. Tour inicial (algoritmo 2-opt)	81
6.2. Tour final (algoritmo 2-opt)	81
6.3. Región de Tulancingo a través de Google Maps.	83
6.4. Optimización de la ruta, Parte 1.	87
6.5. Optimización de la ruta, Parte 2.	87
6.6. Optimización de la ruta, Parte 3.	88
6.7. Optimización de la ruta, Parte 4.	88
A.1. Gráfica del modelo consistente, solución única.	93
A.2. Gráfica del modelo consistente, múltiples soluciones.	93

A.3. Gráfica de modelo inconsistente. 94

Introducción

La Investigación de Operaciones es una disciplina de la Ingeniería que tiene como propósito desarrollar métodos y herramientas para predecir, evaluar y demostrar propiedades relacionadas con el uso óptimo de los recursos.

Esta disciplina comprende diversas áreas como son Programación Lineal (PL), Programación Entera (PE), Teoría de Grafos, Teoría de Colas, entre otras, a través de las cuales se genera un modelo matemático que logra una base para la toma de decisiones [3].

El análisis de modelos de programación matemática ha sido tema de estudio de ingenieros, administradores, programadores, entre otros, dando lugar a numerosas líneas de investigación sobre esta materia, véase por ejemplo [23], donde el objeto central de la investigación es representar la localización de instancias de recolección de residuos a través de un modelo de programación lineal entera mixta, aplicado a una planificación a largo plazo de la gestión de desechos.

El uso de técnicas de programación lineal entera en problemas de recolección de residuos es aplicable en el control de los costos de transporte que es un problema que no conoce fronteras.

La programación eficiente es de enorme importancia ya que mejora el

servicio y las condiciones de trabajo del lugar donde se aplica, generando un impacto apreciable en los costos de operación.

Uno de los problemas más estudiados es el problema del agente viajero (TSP, Traveling Salesman Problem), problema típico en Optimización Combinatoria y es considerado difícil de resolver; en lenguaje computacional, es un problema NP- Difícil por lo que usualmente se resuelve utilizando algoritmos heurísticos para obtener soluciones factibles en tiempos de ejecución razonablemente pequeños.

El TSP frecuentemente ha sido utilizado como problema de prueba para nuevas estrategias en la solución de otros problemas combinatorios, así como para medir la aplicabilidad de nuevos algoritmos heurísticos. En [36] se proporciona un estudio completo del estado del arte del TSP.

Recientemente se han desarrollado aplicaciones importantes del TSP, lo que ha llevado a la creación de nuevas líneas de investigación, como por ejemplo, el desarrollo de un nuevo operador de mutación para resolver el TSP con ayuda de Algoritmos Genéticos. En [34] y [38] se resuelven problemas de TSP aplicando algoritmos de optimización de colonia de hormigas, el estudio propone un nuevo algoritmo híbrido denominado Sistema de Hormigas Genéticas Cooperativas.

En la práctica es común utilizar alguna técnica heurística que proporcione un ciclo Hamiltoniano para, posteriormente, aplicar alguna técnica que mejore la solución.

El algoritmo del vecino más próximo es una heurística, diseñada para resolver el TSP, que proporciona una solución (ciclo Hamiltoniano); este método no asegura hallar una solución óptima, sin embargo, suele proporcionar

buenas soluciones y tiene un tiempo de cálculo muy eficiente [43].

Existen técnicas de mejora de las soluciones, como las técnicas 2-opt y 3-opt (véase [41]) que son heurísticas eficientes y de rápida convergencia, debido a la selección y reconexión de nodos que dependen de la información geométrica de sus nodos vecinos y de los puntos de conexión entre otros nodos de la red.

El TSP se puede emplear en cualquier situación que requiera seleccionar nodos en cierto orden que reduzca los costos, por ejemplo, el reparto de productos, transporte, robótica, problemas de fabricación, turismo y agencias de viajes, horarios de transportes laborales o escolares, inspecciones a sitios remotos [37].

El problema de ruteo de vehículos (VPR, Vehicle Routing Problem) es de gran interés (véase [40] y las referencias que ahí aparecen), debido al ahorro que representa al encontrar la ruta óptima de un conjunto de rutas, con un costo mínimo de ruteo.

Una de las aplicaciones del VRP consiste en la elección de un recorrido eficiente a la hora de transportar mercancías, o en este caso, el transporte de residuos sólidos urbanos. La recolección de residuos sólidos representa un impacto importante en el medio ambiente, en la salud pública y en los costos de transporte de estas.

El TSP es un caso particular del problema de rutas de vehículos, en el que se trata de establecer las rutas óptimas de una flota de transporte para dar servicio a sus clientes. En particular, puede ser utilizado para la recolección de residuos sólidos urbanos, que representan un impacto importante en el medio ambiente, en la salud pública y en los costos de transporte.

En [35] se utiliza un método no paramétrico basado en la eficiencia para identificar los factores de rendimiento de los servicios de recogida de residuos en 40 municipios de la provincia de Verona, Italia.

En [42] se presenta un algoritmo de búsqueda hacia atrás, modificado en modelos de problemas de enrutamiento de vehículos capacitados, con el concepto de compartimiento inteligente para encontrar las soluciones óptimas para la ruta de recolección de residuos; la función objetivo minimiza la suma de las distancias de la ruta de recogida de residuos. El estudio introduce el concepto de nivel umbral de residuos de los contenedores de basura para reducir el número de contenedores que deben vaciarse, encontrando un rango óptimo, minimizando la distancia.

Dada la estructura dinámica del sistema de recolección, el TSP se puede modelar mediante un grafo, analizando la conexión de una red de calles que se enlazan mediante nodos representando los vértices del grafo, los caminos que unen los nodos representan los arcos o aristas y a cada arco se asocia información como la distancia entre puntos de recolección, como se establece en [6].

Una característica clásica en este entorno se muestra en el problema del agente viajero a través del tiempo. Su origen se establece en 1832 con ejemplos de recorridos por Alemania y Suiza, pero sin ningún análisis matemático. El análisis consiste en la asignación de un recorrido a fin de minimizar el tiempo, cubriendo la mayor parte de las ciudades sin visitar el mismo lugar más de dos veces, desde entonces ha sido uno de los problemas más estudiados en el campo de la optimización.

Para 1956, Flood introduce el TSP, siendo uno de los más comunes en la

Investigación de Operaciones [3],[24]. El problema establece que un vendedor debe seguir una ruta para visitar cada ciudad una sola vez, de tal manera, que inicie y termine su recorrido en la ciudad origen.

A partir de la propuesta anterior, surgen variaciones por Dantzing y Ramser (1959), planteando el modelo con una flota de camiones a diferentes estaciones de servicio, donde se incrementa el número de variables y restricciones [22].

Así, en 1960 se establece con Miller, Tucker y Zemlin la primera referencia del TSP múltiple, en donde se considera un depósito y m vehículos. En esta misma línea están los trabajos de Tillman, que en 1969 da origen al TSP Probabilístico, donde el objetivo de este problema es encontrar el mínimo costo de recorrido esperado a través de un conjunto de nodos con probabilidad asociada a la presencia o no de consumidores que requieren ser servidos.

Problemas relacionados al TSP fueron estudiados por Sir William Rowan Hamilton y Thomas Penyngton Kirkam, a quien se debe el nombre de un camino Hamiltoniano en el recorrido de una gráfica, que es una sucesión de aristas adyacentes que visita todos los vértices de la gráfica una sola vez. Si además el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un ciclo hamiltoniano.

Las investigaciones del modelo de transporte aún continúan, en [14] se considera el costo de almacenaje de los productos; siendo en el 2001, con trabajos de Hal et. al., que se presentan como herramientas para el estudio de la cadena logística y sus limitaciones (véase [30]).

Con el paso del tiempo se ha observado el crecimiento de la potencia computacional, esto ha llevado a la creación de nuevas líneas de investigación,

tal es el caso de [34], con el desarrollo de un nuevo operador de mutación para resolver el TSP con ayuda de Algoritmos Genéticos (GA), el estudio permite encontrar la mínima distancia del TSP.

El desarrollo del operador de mutación GA fue probado en 14 ejemplos diferentes del TSP, generando resultados más efectivos si se aplica un método de mutación para un subtour Greedy (GSTM).

En [34] se resuelven problemas de TSP aplicando algoritmos de optimización de colonia de hormigas (ACO) que ha sido exitosamente empleado en resolver TSPs [38]. El estudio propone un nuevo algoritmo híbrido denominado Sistema de Hormigas Genética Cooperativa (CGAS), este enfoque cooperativo (GA y ACO) crea una mejor oportunidad para la solución del TSP en términos de capacidad.

En [2] se presenta el análisis de problemas NP-Difícil como la Aproximación Spanning, que encuentra aplicación en las áreas de estimación de tráfico, tanto para grafos dirigidos como no dirigidos.

En [23] se presenta un enfoque de optimización que sirve de soporte para la planeación a largo plazo de la gestión de residuos sólidos, con rangos flexibles para la toma de decisiones en el análisis de equilibrio entre la calidad del medio ambiente y los objetivos económicos.

El servicio de recolección de residuos en un municipio es un problema de logística y consume un alto porcentaje de las metas municipales disponibles, restando recursos financieros que limitan otras necesidades urbanas.

Este problema lo enfrentan a diario las empresas encargadas de la gestión de residuos, así como las administraciones competentes en la materia. Lo que significa que este servicio se debe ofrecer de manera eficiente debido a que es

susceptible de optimizar.

La importancia en el monitoreo de las rutas de recolección de residuos permite una visión más clara de cómo optimizar las actividades diarias del servicio de limpias que cubren en la totalidad las colonias del municipio.

Con el aumento del número de puntos a cubrir y el aumento del parque vehicular que se debe destinar a esta tarea, incrementa también evidentemente el costo económico y el ambiental. Con la finalidad de reducir ambos tipos de costo es necesario revisar las herramientas disponibles para definir las mejores rutas en un sector determinado de la población.

Una de las herramientas más utilizadas hasta la fecha para realizar la programación de estas tareas son los sistemas de información geográfica.

El problema también puede ser resuelto empleando técnicas de optimización y programación matemática para el recorrido de los camiones encargados de la recolección de contenedores y residuos en la ciudad de Tulancingo, Hgo., considerada la región de estudio, a fin de obtener propuestas que minimizan la distancia total recorrida por cada camión y que muestran una disminución de los trayectos, los resultados positivos en este sentido se logran mediante la teoría de grafos, como se presenta en [1].

Así, se da una adecuada atención en la fase del diseño a variables como la planificación de las rutas y traslado directo a distancias económicamente viables.

En este trabajo se propone un modelo de optimización combinatoria para la planificación de las rutas en la recolección de residuos de todas las visitas desde el depósito ubicado en el Fraccionamiento Santa Ana, en la misma ciudad, hasta el tiradero ubicado en Paxtepec.

Un instrumento convincente es el plan de optimización para la recolección de residuos sólidos urbanos en el municipio, con el fin de mejorar la prestación del servicio e identificar el orden en que deben ser visitados los puntos de recolección de residuos, lo que permite minimizar el costo o distancia de la ruta, así como la distancia entre cada punto de recolección para definir la distancia entre un origen y un destino, generando con ello la mínima distancia de recorrido.

Con este fin, se desarrolla un modelo matemático representativo del caso de estudio para encontrar el flujo de ruta de reparto óptimo, resolviendo el modelo matemático de estudio mediante un optimizador (Lingo y GAMS) para obtener la solución. También se utiliza un modelo de optimización combinatoria para la planificación de las rutas en la recolección de residuos sólidos urbanos en el área de estudio: Municipio de Tulancingo de Bravo, Hidalgo, utilizando el TSP y las técnicas heurísticas del vecino más próximo [39] y el algoritmo 2-opt [41].

El trabajo se ha dividido en cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se describe la forma en que se gestionan los residuos sólidos urbanos . En el Capítulo 2 se describen mediante gráficas, tablas y mapas el recorrido de las unidades recolectoras de residuos sólidos urbanos en la ciudad de Tulancingo de Bravo, Hidalgo. En el Capítulo 3 se proporcionan conceptos de programación matemática que serán utilizados para poder proponer la ruta óptima de recolección.

En el Capítulo 4 se presenta la descripción del problema del agente viajero (TSP) y la metodología propuesta para evaluar el proceso de recolección de residuos sólidos, así como conceptos básicos de teoría de grafos, el Capítulo

5 incluye la implementación computacional de los algoritmos que se utilizan en la solución del TSP y se muestran los resultados obtenidos para la ruta óptima de recolección; finalmente se muestran las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Objetivos

1.1. Objetivo general

Optimizar el recorrido de los vehículos del Departamento de Limpias con rutas de recolección específicas de residuos sólidos urbanos en el municipio de Tulancingo de Bravo, Hidalgo.

1.2. Objetivos particulares

1. Analizar la situación actual del transporte de limpias del municipio, que se asigna a las diferentes zonas de recolección.
2. Identificar la zona del municipio de Tulancingo, Hgo. con mayor conflicto, así como la ruta a mejorar.
3. Identificar el modelo que se ajuste a la situación real como el problema del TSP que es típico del ruteo de vehículos.
4. Buscar las herramientas que apoyen el cálculo de distancia entre dife-

rentes puntos de recolección, ya que existen zonas con 312 nodos.

5. Resolver con optimizadores GAMS y utilizando algoritmos heurísticos (2-opt).

6. Aplicar la propuesta de recorrido en la zona de estudio para verificar el impacto y aceptación en la región de estudio.

Capítulo 2

La gestión de residuos sólidos urbanos

Algunos estudios en los últimos años recomiendan la aplicación a situaciones reales en el problema de recolección de residuos sólidos, su estudio aconseja entre otros casos: la planificación, la logística para organización de empresas, aplicación informática KPTS basada en teoría de grafos [4], entre otros. Un enfoque alternativo fue desarrollado en [29] para el ruteo de vehículos desde un centro de distribución a una línea de supermercados en Barranquilla, Colombia.

En la zona de estudio las actividades dedicadas a la gestión de Residuos Sólidos Urbanos (RSU) son responsabilidad del municipio, que debe proporcionar el servicio con la cobertura y calidad requerida.

El estudio fue realizado en la ciudad de Tulancingo de Bravo, que es cabecera del Municipio en el Estado de Hidalgo (Figura 2.1), con una población, de acuerdo a resultados del censo de población y vivienda 2010, de



Figura 2.1: Mapa del estado de Hidalgo.

151 584 habitantes. En esta zona, la recolección y disposición final de RSU son coordinados por la Secretaría de Servicios Municipales y la Dirección de Limpias y Disposición de Residuos. El servicio cubre 13 zonas de recolección con un parque vehicular de 12 unidades que operan de Lunes a Sábado en dos turnos:

- El primer turno labora en un horario de 6:30 am a 15:29 pm.
- El segundo turno labora en un horario de 15:40 pm a 00:10 hrs.

Los puntos de recolección se clasifican como: zona 1, zona 2, zona 3, zona 4, zona 5, zona 6, zona 7, zona 8, zona 9, zona 11, zona 12, zona C1 y zona C3, respectivamente.

En las Figuras 2.2 y 2.3 se muestra un ejemplo (elaboración propia) de

la ruta de recolección en la Zona 5, realizado los días Lunes, Miércoles y Viernes por la unidad 12; el recorrido da inicio en colonia La Morena con un horario de salida de 6:40 am, seguido por las Colonias: Centro, Valle Verde, Valle Sol, Mimila, La Morena, Jardines del Sur, La Estrella y Magisterio I, posteriormente se dirige al tiradero a las 13:34 hrs. y, finalmente, regresa a las oficinas de la Dirección de Limpias en el Fraccionamiento Santa Ana a las 15:29 hrs, donde se resguardan los camiones recolectores para dar inicio al segundo turno.

La recolección de residuos en las colonias se clasifican en:

- **Domésticos:** son los generados en casa habitación y se depositan en bolsas (fuera de las viviendas o en las esquinas).
- **No domésticos:** generados fuera de las casas habitación.

2.1. Gestión de residuos sólidos en México

La evolución de las sociedades ha traído consigo un incremento en la producción de bienes y servicios que originó una demanda sobre los recursos naturales y una generación creciente de RSU.

La generación de residuos es uno de los problemas más apremiantes del municipio; la gestión contempla el proceso de generación, recolección, traslado y disposición final (Figura 2.4), de acuerdo con el Programa Estatal para la Prevención y Gestión Integral de los Residuos Sólidos Urbanos y de Manejo Especial del Estado de Hidalgo (véase [17]).

En este trabajo se hace una propuesta del proceso de gestión de los residuos, que es un problema de logística que consume un alto porcentaje de

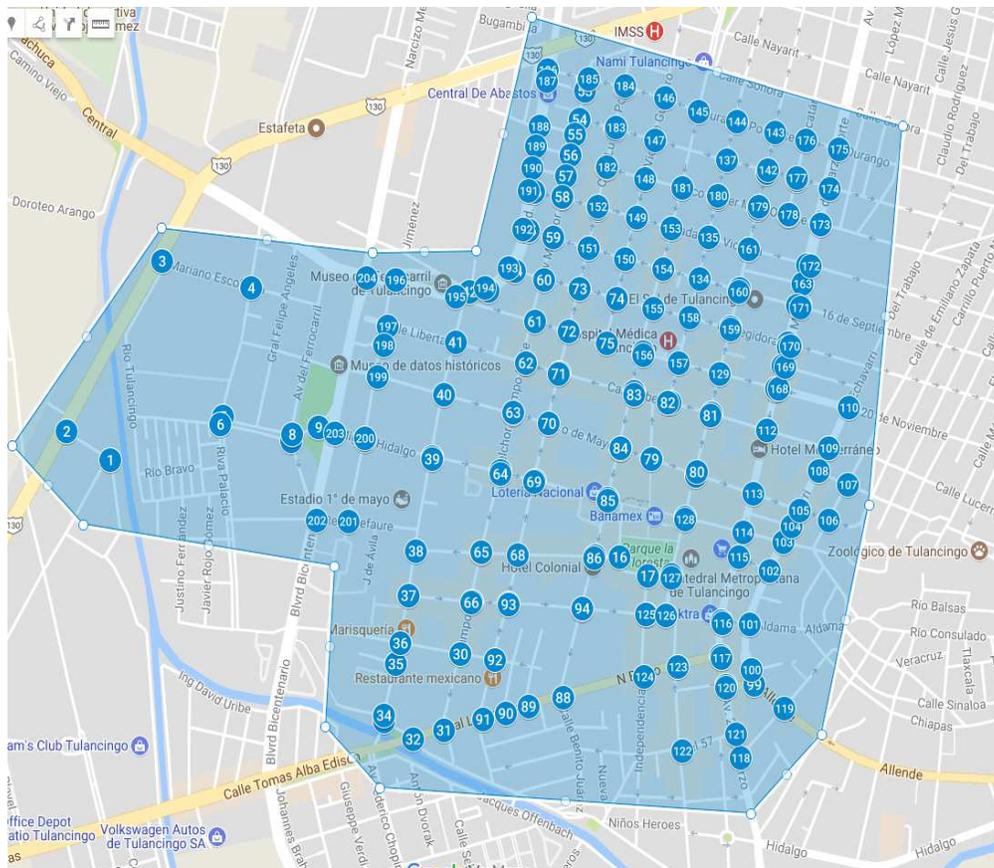


Figura 2.2: Comisión del Servicio Público de Limpia del Municipio de Tulancingo de Bravo (Zona 5 (A) - Unidad 12)

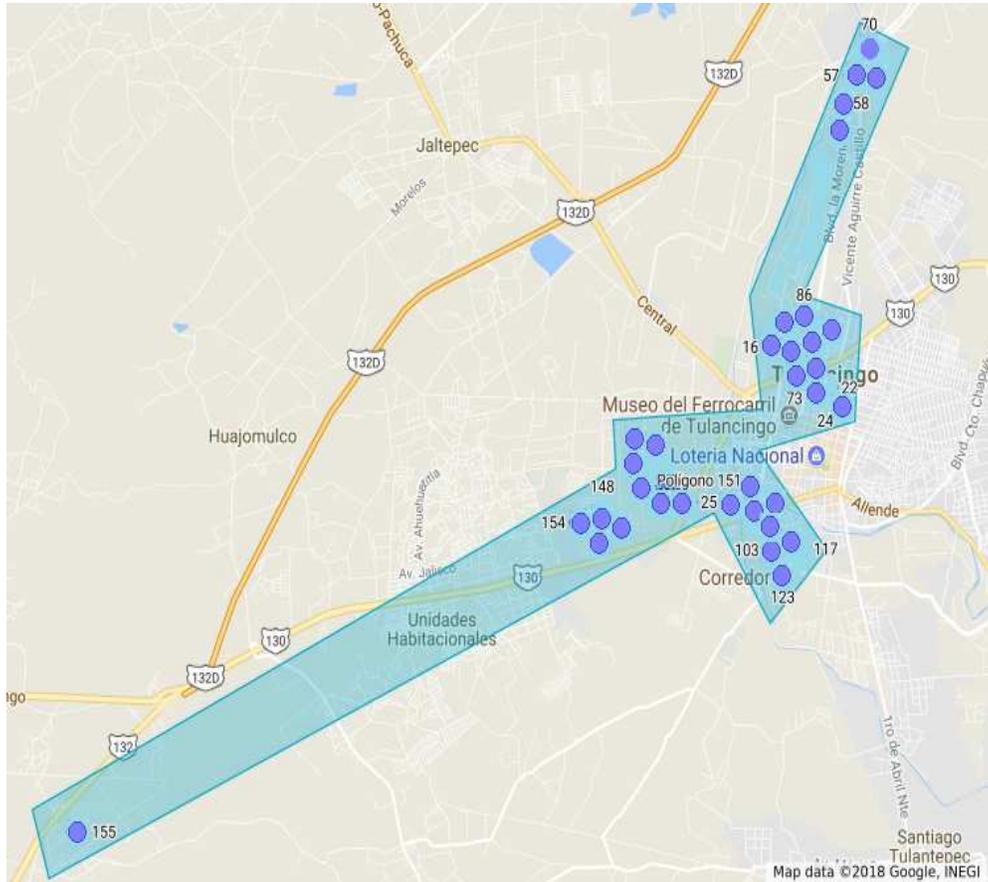


Figura 2.3: Comisión del Servicio Público de Limpia del Municipio de Tulancingo de Bravo (Zona 5 (B) - Unidad 12)

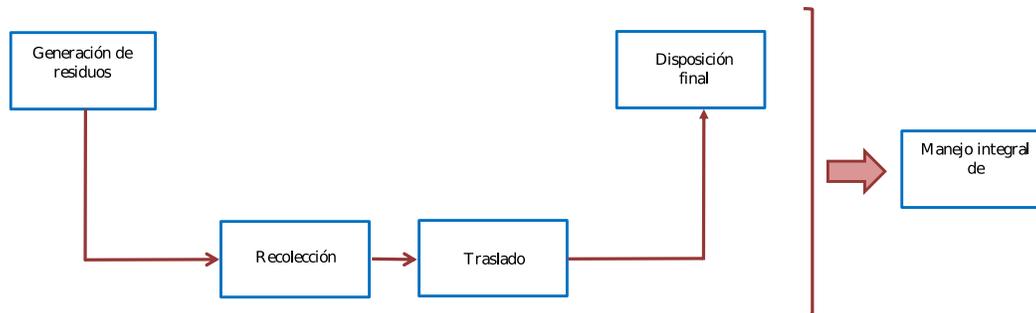


Figura 2.4: Proceso de gestión de residuos.

los recursos destinados al servicio de limpia municipal, lo que significa que el servicio se debe ofrecer de manera eficiente.

Por lo que el objetivo es el diseño de rutas para el parque vehicular que realiza la colecta de residuos, para que la actividad se lleve a cabo en el menor tiempo posible y con ello, minimizar los recursos necesarios. Así se presta atención al monitoreo de las rutas de recolección, que genera una mejor visión para optimizar las actividades diarias del servicio de limpias.

Una de las herramientas más utilizadas hasta ahora, para realizar la programación de estas tareas, son los Sistemas de Información Geográfica (GIS); dichos sistemas se centran en el manejo de una base de datos, con información geográfica asociada a un mapa digital, donde una de las tareas que puede resolver es la determinación de las rutas óptimas entre dos o más puntos.

El problema de ruteo puede ser resuelto utilizando técnicas de optimización para el recorrido de los camiones, encargados de la recolección de contenedores y residuos en la región de estudio, utilizando técnicas de programación matemática a fin de obtener propuestas que minimicen la distancia total recorrida en el parque vehicular.

2.2. Manejo de residuos sólidos urbanos en el Estado de Hidalgo

De acuerdo a la Ley para la Protección del Ambiente en el Estado de Hidalgo, del 21 de junio del 2004, en el artículo 3, Fracción XXVII, los Residuos Urbanos son (véase [13]):

- i) Cualquier material generado en los procesos de extracción, beneficio, transformación, producción, consumo, utilización, control o tratamiento cuya calidad no permitía usarlo nuevamente en el proceso que lo generó.
- ii) Los residuos procedentes de la limpieza de vías públicas, zonas verdes, áreas recreativas y playas.
- iii) Animales domésticos muertos, así como muebles, enseres y vehículos abandonados.
- iv) Residuos y escombros procedentes de obras menores de construcción y reparación domiciliaria.

En general, es aceptado que la gestión de los residuos se puede dividir en cuatro fases:

- a) Pre-recogida, que consiste en el debido almacenamiento, manipulación, clasificación y presentación de los residuos en condiciones adecuadas para su recogida y traslado.

Las dos fases siguientes suelen ser las más costosas, por lo que se requiere de una adecuada planificación.

- b) Recogida.
- c) Transporte, se lleva directamente a los puntos de tratamiento o a las plantas de transferencia donde se compactan.
- d) Tratamiento, que incluye operaciones encaminadas a la eliminación o aprovechamiento de materiales contenidos en los residuos .

Debido al crecimiento poblacional y al aumento de volumen de los residuos, los desechos se depositan en cualquier sitio, generando un alto grado de complejidad en materia de controlar su descarga y el impacto al medio ambiente.

Para realizar un sistema de recolección de residuos apropiado es necesario una evaluación del conjunto de factores que demandan la toma de decisiones para prestar el servicio de limpias. Los factores con mayor incidencia en el sistema son:

- El tiempo de recolección desde la generación de la basura hasta la disposición final.
- La frecuencia de recolección, entre otros.

En relación al tiempo que transcurre desde la generación de basura hasta la recolección para la disposición final, la Secretaría de Desarrollo Social (SEDESOL [33]) lleva a cabo el diagnóstico y establece que la recolección no debe exceder el ciclo de reproducción de la mosca, que varía según el clima de 7 a 10 días; y entre 9 y 20 días en llegar del huevo a adulto, que por razones sanitarias no conviene reducir la frecuencia de recolección de los residuos a

Temperatura ($^{\circ}C$)	Huevo a Pupa	Huevo a Adulta
Promedio de $20^{\circ}C$	10.1 días	20.5 días
Promedio de $28^{\circ}C$	5.6 días	10.8 días
Promedio de $35^{\circ}C$	5.6 días	8.9 días

Tabla 2.1: Tiempo de incubación y crecimiento de la mosca [7]

menos de 2 veces por semana, y como límite a una vez por semana [33] (véase la Tabla 2.1).

Un enfoque alternativo es desarrollado en la Ley General para la Prevención y Gestión Integral de los Residuos (LGPGIR), publicada en el DOF del 22 de mayo de 2015 en el Artículo 15, donde establece por definición legal que la SEDESOL (Secretaría de Desarrollo Social) agrupará y subclasificará los residuos peligrosos, sólidos urbanos y de manejo especial en categorías, con el propósito de elaborar los inventarios correspondientes, y orientar la toma de decisiones basada en criterios de riesgo y en el manejo de los mismos.

Por otra parte, y de conformidad con los Programas Estatales y Municipales para la Prevención y la Gestión Integral de los Residuos, así como con los ordenamientos legales aplicables sugieren que los RSU podrán subclasificarse en orgánicos e inorgánicos con objeto de facilitar su separación primaria y secundaria (véase [7]).

Analizando el segundo factor, que es la frecuencia de recolección, es vital por dos razones importantes, una de ellas por la que debe efectuarse la limpieza en las calles es por la conservación de la salud humana, ya que la acumulación de desechos propicia las condiciones para el desarrollo de insectos y roedores que son transmisores de diversas enfermedades.

Así, la limpieza de las vías de circulación vehicular y peatonal debe efectuarse a lo largo de las cunetas y las aceras, con una frecuencia de barrido que dependerá de factores como la cantidad de residuos que sea necesario retirar, características de las ciudades y sector de la población, entre otros.

Considerando que en América Latina y el Caribe los componentes de residuos sólidos municipales representan entre el 50 % y 75 % del total de residuos sólidos del municipio.

Una variedad notable en el barrido es el método manual, que se realiza en calles y avenidas donde el tráfico no es intenso, en calles angostas y en plazas o espacios públicos, con rendimiento del personal de 1.0 a 2.0 km/día de calle (y de 2.0 a 4.0 km de cuneta), se recogen de 30 a 90 kg de basura por kilómetro barrido y se requiere entre 0.4 y 0.8 personas de limpieza por cada 1000 habitantes, dependiendo del apoyo del barrido mecánico, siendo el segundo método de recolección de residuos que depende de las condiciones topográficas y económicas de la población. Resultados que fueron reportados en el documento manejo de residuos sólidos (véase [15]).

De acuerdo a las fases de recolección de residuos, una vez efectuado el barrido, el proceso de enlace siguiente es el transporte de los desechos y la disposición final, que es la última etapa operacional del servicio público de limpieza para el manejo integral de los desechos.

Los residuos, una vez recolectados, se pueden asignar a diversos procesos de transformación delimitados dentro de una Gestión Integral de Residuos Sólidos, de tal forma que representen beneficios sanitarios. Sin embargo, conforme a [10], para los países latinoamericanos los rellenos sanitarios constituyen una opción segura a mediano y corto plazo, amigable con el ambiente

Tipo de residuo	Peso/ton	%
Residuos sólidos urbanos	64.36	42.43
Papel y cartón	26.66	17.57
Vidrio	12.16	8.02
Plástico	13.56	8.94
Pañales desechables	10.64	7,01
Aluminio	7.6	5.01
Fierro	3.04	2.00
Ropa	3.04	2.00
Latas	1.52	1.00
Objetos diversos	9.12	6.01
Total	151.7	100

Tabla 2.2: Promedio diario de generación de residuos sólidos en Tulancingo

y además económica en comparación a otros métodos.

El uso de rellenos sanitarios es un beneficio ampliamente reconocido por el Programa Municipal de Desarrollo Urbano en la zona de estudio, ya que aproximadamente 151 toneladas de basura son generadas en el municipio, reportado por la Comisión del Servicio Público de Limpia de Tulancingo COSEPLAT (2012), [18]. En el estudio se identificó que el volumen diario de generación de residuos, en su mayoría, es de tipo orgánico, como se observa en la Tabla 2.2.

La severidad del tiempo ha estado demostrando que la tendencia de reproducción de basura superará 202 toneladas diarias, con una generación estimada de residuos de 1.001 kg/hab/día, cifra superior a la nacional 0.939

Indicador	2010	2015	2020	2025	2030
Población	151,584	166,156	177,153	188,796	202,676
Ton/día	151.70	166.16	177.15	188.80	202.68

Tabla 2.3: Volumen diario de residuos sólidos en Tulancingo (2010-2030) [18].

kg/hab/día, como se observa en la Tabla 2.3.

Este escenario es más crítico, considerando que en el municipio no existen sitios adecuados para la disposición y manejo de residuos sólidos (informe proporcionado por COSEPLAT, (2012) [18]), de los cinco sitios habilitados históricamente para este objetivo, actualmente solo opera uno, denominado grupo Proactiva Medio Ambiente México (GP), empresa líder en servicios medioambientales, especializada en la gestión integral de residuos que permite el uso del relleno sanitario ubicado en Paxtepec, en el fraccionamiento del Lote 04 del rancho Santa Ana del Monte, perteneciente a Santiago Tulantepec, el sitio está confinado con características que permiten prevenir la liberación de residuos al ambiente y las consecuentes afectaciones a la salud de la población, a los ecosistemas y sus elementos, acorde a la normatividad ambiental mexicana y en cumplimiento a los tratados internacionales firmados por México.

De acuerdo con la información de la Dirección de Limpias del municipio, actualmente se ha estado trabajando mediante un sistema de rutas, donde la subdirección encargada de la parte operativa realiza un diseño de las mismas con el fin de la asignación posterior de los vehículos y con ello el personal responsable de cubrir las diferentes zonas en la región.

La actividad siguiente es registrar la salida del vehículo y dirigirse a la carga de combustible, acción controlada por el departamento de Tesorería. La tarea posterior es responsabilidad del conductor que lleva a cabo el Proceso de Gestión de RSU, obteniendo un comprobante de disposición de residuos emitido por Proactiva. Este informe es complementado y contrastado con los registros que acompañan cada factura que Proactiva hace llegar a la Presidencia Municipal para su cobro.

Con esta actividad, en el relleno sanitario concluye la ruta del conductor, que se dirige al centro de operaciones en espera que la Subdirección Operativa le asigne cubrir una nueva ruta. De lo contrario, las operaciones de recolección de residuos finalizan; este proceso se observa en el diagrama de flujo de la Figura 2.5.

La empresa GP está regulada por la PROESPA (Procuraduría Estatal de Protección al Ambiente) y la SEMARNAT (Secretaría del medio ambiente y Recursos Naturales) que cumple con lo establecido por la NOM-083-SEMARNAT 2003 de acuerdo con la resolución de la manifestación de impacto ambiental, emitida por el Consejo Estatal de Ecología de la Secretaría de Obras Públicas, Comunicaciones, Transportes y Asentamientos, emitida con oficio SOPTCA/CEE/DG/DCA/2880/08 (véase [32]). Esta es la última compañía con la que el Gobierno Local cumple con el aislamiento de desechos como lo marca la normatividad, desde el 2012, donde se canalizaron aproximadamente 120 toneladas diarias de desechos, por un pago anual superior a 8 millones de pesos.

A fin de garantizar una mejora en condiciones financieras respecto al pago a la Comisión Federal de Electricidad, a las tarifas actuales a GP y a las

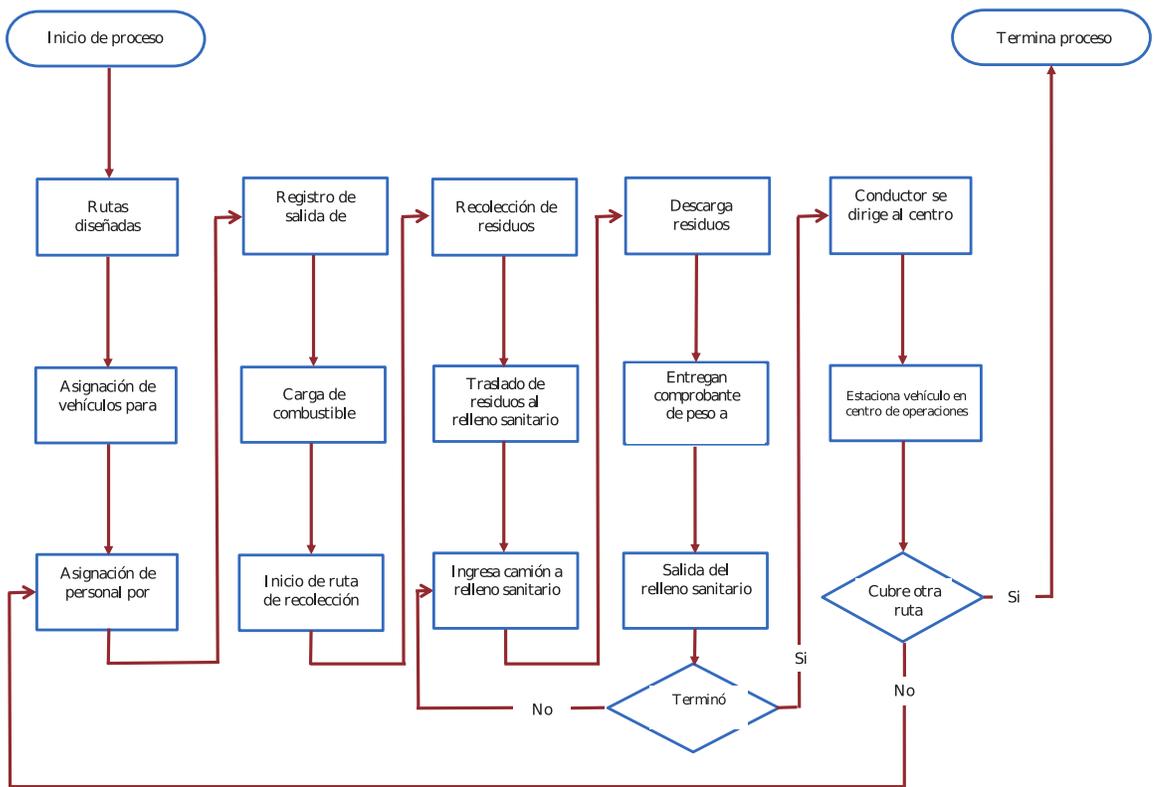


Figura 2.5: Diagrama de flujo del proceso actual de recolección

condiciones ambientales en el municipio, se establece nuevo convenio a partir de Septiembre 2016, con la empresa Valorización de Residuos Sólidos Urbanos de México (Valorsum), que tiene la capacidad de generar energía eléctrica, a partir del procesamiento de residuos sólidos, de esta manera proveerá al municipio de dicho servicio, con ahorro de hasta 20 %, respecto a lo que actualmente se paga a la CFE.

Este informe se generó en el Plan Municipal de Desarrollo 2016 - 2020 en Tulancingo de Bravo, Hidalgo, que se fundamenta en el Artículo 60, fracción I, como facultad y obligación del Presidente Municipal de la prestación de servicios públicos municipales de excelencia, que incluyen dentro de otras actividades la recolección de basura.

Capítulo 3

Recolección de residuos sólidos

Cuando una determinada empresa dedicada a la recolección de basura presta un servicio de limpieza urbana, recolección y disposición final de los desechos sólidos de los sectores, es necesario establecer atención especial que involucre la planeación y operación de este servicio de manera eficiente, reduciendo así los costos operativos.

Los lineamientos que requieren ser atendidos por la administración actual, en la región de estudio son:

- a) Las rutas de recolección no han sido definidas de manera específica por las unidades que deben cubrir cada zona de la Región de Tulancingo.
- b) En algunos casos el equipo de recolección excede la capacidad de carga, con el consecuente desgaste anticipado.
- c) El número de recorridos que realiza cada unidad no es óptimo.

Entre otros puntos, que incluye el manejo de los residuos sólidos urbanos (RSU) en el área de estudio comprende varias etapas como: capacidad del

vehículo, cantidad de flota disponible, dimensión de las calles, densidad de población, generación diaria de basura, zonas de recolección, frecuencia de recolección, número de recorridos del vehículo y distancia al tiradero [5].

3.1. Capacidad del vehículo

Con respecto a los vehículos de recolección, la Dirección de Limpias y Disposición de Residuos informa que se utilizan carrocerías de caja trasera y caja lateral de dos y tres ejes respectivamente. La asignación de los vehículos a las diversas áreas de la ciudad dependerá de la facilidad de acceso y maniobrabilidad requeridas, ya que si se usan adecuadamente la eficiencia de recolección es muy alta (Figura 3.1).

Así que cuentan con una unidad no convencional, denominada unidad piloto, que es una camioneta pick up de 3 toneladas, con la finalidad de mejorar tanto en costo como en rendimiento la recolección en puntos o momentos estratégicos.

3.2. Cantidad de flota disponible

Uno de los problemas de la recolección de residuos sólidos y, en particular, de las rutas de recolección consiste en determinar el número de vehículos que deben utilizarse dada la generación de la basura, el método que se seguirá para la recolección y las posibilidades económicas del municipio.

Actualmente, el municipio de Tulancingo cuenta con una flota de 10 unidades. Dentro de la nomenclatura del área de servicios municipales se de-



Figura 3.1: Servicio de recolección de residuos, recolector compactador carga trasera de dos ejes.

Unidad	Zona	Días	Horario	Recorrido	Turno	Camión		Capacidad (estimada Ton)	Núm de Vueltas
1	7	L,M,V	06:28 15:40	Presidencia, Jaltepec, Carrillo Puerto, Jaltepec, Pantaleo, Jaltepec	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6.2	10	6
1	7	M,J,S	06:25 15:00	Presidencia, Jaltepec, Salinas de Gortari, La Ponderosa, Vista Real, Sta. Alicia, Campo Alegre, Las Glorias, Sta. Maria el Chico, Contratos, Las Praxac Centro,	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6.2	10	
8	7	L,M,V	06:46 16:13	Insurgentes, Centro, Mimila, Insurgentes	Matutino	Volteo	6	4	3
12	5	L,M,V	06:40 15:29	La Morena, Centro, Valle Verde, Valle Sol, Mimila, La Morena, Jardines del Sur, Estrella, Magisterio	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6.2	10	3

Figura 3.2: Disposición y capacidad de los vehículos recolectores del municipio (extracto).

nominan como Unidad 1, Unidad 8, ... ,Unidad 21, donde cada una de las unidades recolectoras realiza recorridos durante algunos días de la semana, bajo un horario establecido, en una determinada zona, así como en un turno específico, como se muestra en la Figura 3.2.

3.3. Densidad de Población

Uno de los problemas en el municipio es la prestación de los servicios públicos municipales, tales como abasto de agua potable, bacheo de calles, recolección de basura, conservación del mercado, entre otros.

En atención al servicio público de recolección, el elemento básico que se requiere para establecer relaciones entre capacidad de recolección y la generación de residuos de las zonas a recolectar, son los datos de la densidad poblacional, que permite estimar el número de habitantes que serán atendidos con este servicio público.

De acuerdo a las cifras del último Censo General de Población y Vivienda del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), en el municipio de Tulancingo, hasta el periodo de 2010, se tiene el registro de 151 584 habitantes.

3.3.1. Generación diaria de basura

La recolección de residuos puede dividirse en tres tipos: domiciliaria, comercial e industrial [26]. En la región de estudio, la recolección domiciliaria atiende básicamente casas particulares. En tanto, la recolección comercial presta el servicio a restaurants, panaderías, mercado municipal, hoteles y obradores. Dejando a la parte industrial la empresa de Hilatura.

Otro de los elementos básicos para determinar la generación diaria de residuos de la ciudad, es la emisión per cápita por día en el municipio que es de 0.00085 toneladas a nivel domiciliario, ilustrando en la Figura 3.3 el promedio de recolección de RS en el 2015 en toneladas por mes, semana y

Periodo	Toneladas
Promedio por mes	3448.748
Promedio por semana	795.864
Promedio por día	113.383

Figura 3.3: Promedio de recolección por periodo.

día.

Se estima, que otras fuentes de generación, que deben ser atendidas por el servicio de limpia municipal generan un total por día de 18.5517 toneladas, para el caso de obradores de pollo y barbacoa. Por otra parte, en el sector industrial de Hilaturas la recolección promedio de residuos fue de 5.20 toneladas diarias durante el periodo 2015.

3.4. Zonas de recolección

En los últimos años el municipio de Tulancingo presenta un crecimiento desordenado de asentamientos humanos, regulares e irregulares, que traen consigo un desorden generalizado por la falta de servicios públicos en las nuevas colonias. En la actualidad, en el municipio, permanecen consolidadas 148 colonias con un total de 38 314 viviendas que demandan los diversos servicios públicos municipales.

Así, la asignación de vehículos recolectores a diversas áreas de la región se establece con el macroruteo, que se puede realizar partiendo de una zona de la ciudad, conociendo la producción de basura en kilogramos por habitante

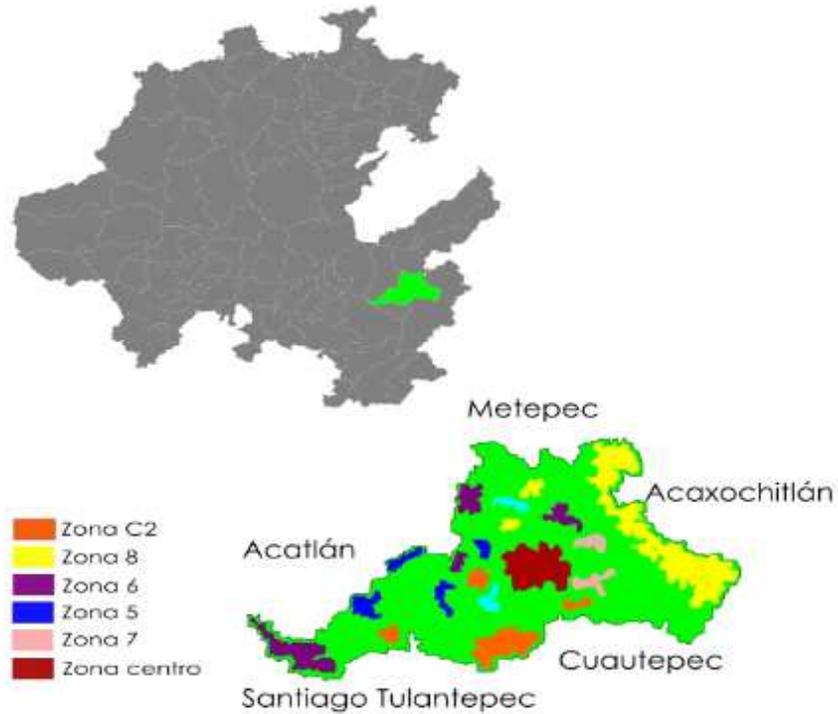


Figura 3.4: Ubicación geográfica del área de interés.

por día y la frecuencia del servicio.

Actualmente, para identificar el área de estudio y mejorar la planificación de rutas, uno de los elementos básicos que se requieren es un mapa de la ciudad, que se divide en 14 sectores operativos (zonas) y 30 subsectores, asignando un área de la zona a cada vehículo recolector. La localización de las fuentes no domiciliarias de desechos desempeñan un papel importante en la asignación del servicio.

Cada zona, delimitada en la Figura 3.4, ilustra los lugares donde el sistema se encuentra actualmente implementado, de acuerdo con la información proporcionada.

Unidad	Zona	Días	Horario	Operador	Recorrido	Turno	Camión	Capacidad (estimada Ton)
1	7	L,M,V	06:28 15:40	Raúl Baños	Presidencia, Jaltepec, Carrillo Puerto, Jaltepec, Pantaleo, Jaltepec	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6,2
1	7	M,J,S	06:25 15:00	Raúl Baños	Presidencia, Jaltepec, Salinas de Gortari, La Ponderosa, Vista Real, Sta. Alicia, Campo Alegre, Las Glorias, Sta. Maria el Chico, Contratos, Las Presas	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6,2
8	7	L,M;V	06:46 16:13	Miguel Amador	Centro, Insurgentes, Centro, Mimila, Insurgentes	Matutino	Volteo	6
12	5	L,M,V	06:40 15:29	Cosme Martínez	La Morena, Centro, Valle Verde, Valle Sol, Mimila, La Morena, Jardines del Sur, Estrella, Magisterio	Matutino	Compactador Carga Trasera (1/2)	6,2

Figura 3.5: Asignación de subsectores (extracto).

La división de la ciudad, en zonas, permite asignar a cada equipo de recolección una cantidad apropiada de trabajo utilizando toda su capacidad y desarrollando una ruta para cada subsector, tal como se muestra en la Figura 3.5.

3.5. Frecuencia de recolección

El proceso de recolección de RSU comprende varias etapas, el recorrido se inicia en el *centro de operaciones*, enseguida se dirige a la colonia de la zona fijada, recolecta los residuos de las diferentes calles, descarga en el *tiradero* los residuos y vuelve al *centro de operaciones*.

Cada vehículo tiene una zona de la región asignada, que varía según la

distribución de los sectores, estableciendo dos turnos de trabajo, el primero inicia actividades por la mañana a las 06:25 hrs. y finaliza aproximadamente a las 15:29 hrs.

Para el turno vespertino, las actividades inician 15:30 hrs. concluyendo la actividad a las 00:10 hrs a fin de cubrir la totalidad de la zona, que dependerá de la capacidad de carga de las diversas unidades. Un ejemplo de la ruta de recolección planeada actualmente es la que se ilustra en la Figura 3.6.

COLONIA	CALLE	ENTRADA	SALIDA	
Aurrera	Aurrera	05:50	06:29	
Centro	1° Cuadro	06:30	06:52	
	Jardín la Floresta	06:54	07:39	
	Cto. Zaragoza	07:40	07:46	
Frac. Del Villar	Ocampo	07:47	07:58	
	5 de Febrero	07:59	08:02	
Centro	Isacc González	08:03	08:05	
	Nicolás Bravo	08:06	08:11	
	Luis Ponce	08:12	08:23	
	Hidalgo	08:24	08:32	
	21 de Marzo	08:33	08:48	
	Molino del Rey	08:49	08:58	
	Echavarrí	08:59	09:05	
	Fernando Soto	09:07	09:19	
	Libertad	09:20	09:29	
	Jardín la Floresta	09:32	10:04	
	Ocampo	10:06	10:19	
	Luis Ponce	10:20	10:34	
	Morelos	10:35	10:49	
	Libertad	00:51	10:59	
	Ocampo	11:00	11:07	
	Calzada 5 de Mayo	11:08	11:16	
	1° de Mayo	11:17	11:39	
	Juárez	11:40	11:51	
	Corregidora	11:52	12:03	
	Fernando Soto	12:04	12:14	
	Morelos	12:16	12:26	
	Mercado Municipal	12:27	12:55	
	21 de Marzo	12:56	13:12	
	Salidad al Tiradero		13:13	14:55

Figura 3.6: Ruta de recolección, Zona C1 Centro (extracto).

En cuanto a la regularidad con la que se debe recolectar la basura, la Dirección de Limpias del Municipio, teniendo como referencia el Manual para el diseño de rutas de recolección [33], propone los tiempos de recolección que se muestran a continuación.

3.5.1. Recolección diaria

Se establece que diariamente, excepto el día Domingo, las rutas deben ser cubiertas en la totalidad por los camiones recolectores, así que los Lunes, se recolecta 100 % más de basura, ya que corresponde al periodo Sábado y Domingo.

En la Figura 3.7, se muestra la ruta de recolección de la Unidad 20, Turno Matutino, Zona C1 centro, días Lunes a Sábado.

3.5.2. Recolección cada tercer día

En el plan de recolección de la Comisión del Servicio Público de Limpia del Municipio, se establece el horario y zona que debe cubrir cada unidad, asignando cuatro unidades recolectoras el día Lunes, Miércoles y Viernes en el primer turno, así como tres unidades en el mismo horario para el día Martes, Jueves y Sábado.

Logrando con este sistema que la sobrecarga de la recolección será repartido en dos días (Lunes y Martes), además de reducir el costo por tonelada-kilómetro, ya que los camiones recolectores se llenan en un tiempo más corto y a menor distancia.

Nodo	Esquina	Nodo	Esquina	Nodo	Esquina
1	Morelos - Calzada 5 de Mayo	25	Luis M. Ponce - Hidalgo	49	Libertad - Luis Ponce
2	Morelos - Ocampo	26	Parque Juárez - Molino del Rey	49	Libertad - Luis Ponce
3	Morelos - Luis M. Ponce	27	Colegio Militar - Parque Juárez	50	Libertad - Ocampo
4	Morelos - Av. Juárez	28	Manuel F. Soto - Morelos	51	Libertad - Calzada 5 de Mayo
5	Libertad - Av. Juárez	29	Morelos - Av. 21 de Marzo	52	Libertad - 27 de Septiembre
6	1º de Mayo - Av. Juárez	30	Av. 21 de Marzo - Libertad	53	27 de Septiembre - 1º de Mayo
7	Hidalgo - Av. Juárez	31	Av. 21 de Marzo - 1º de Mayo	54	1º de Mayo - Calzada 5 de Mayo
8	Cuauhtemoc - Parque Juárez	32	Av. 21 de Marzo - Progreso	55	1º de Mayo - Ocampo
9	Hidalgo - Parque Juárez	33	Av. 21 de Marzo - Hidalgo	56	1º de Mayo - Luis Ponce
10	Hidalgo - Manuel F. Soto	34	Av. 21 de Marzo - Reforma	57	1º de Mayo - Cuauhtemoc
11	1º de Mayo - Manuel F. Soto	35	Av. 21 de Marzo - Doria	58	Echavari - Morelos
12	Libertad - Manuel F. Soto	36	Av. 21 de Marzo - Bravo	59	Juarez - Doria
13	Zaragoza - Av. Juárez	37	Av. 21 de Marzo - Xicoténcatl	60	Doria - Independencia
14	Zaragoza - Luis M. Ponce	38	Av. 21 de Marzo - Callejón del 57	61	Doria - Molino del Rey
15	Zaragoza - Ocampo	39	Callejón del 57 - Molino del Rey	62	Bravo - Molino del Rey
16	Doria - Ocampo	40	Molino del Rey - Xicoténcatl	63	Bravo - Independencia
17	5 de Febrero - Ocampo	41	Xicoténcatl - Echavari	64	Lázaro Cárdenas - Juárez
18	5 de Febrero - Luis Ponce	42	Echavari - Aldama	65	Lázaro Cárdenas - Ocampo
19	5 de Febrero - Isaac Gonzalez	43	Echavari - Reforma	66	Calzada 5 de Mayo - 5 de Febrero
20	5 de Febrero	44	Echavari - Hidalgo	67	Calzada 5 de Mayo - Doria
21	Lázaro Cárdenas	45	Echavari - Progreso	68	Calzada 5 de Mayo - Zaragoza
22	Lázaro Cárdenas - Isaac González	46	Echavari - 1º de Mayo	69	Calzada 5 de Mayo - Hidalgo
23	Lázaro Cárdenas - M. de la Colina	47	Echavari - Soto Mayor	70	Fin de ruta
24	Doria - Luis M. Ponce	48	Echavari - Libertad		Unidad 20 Zona Centro C1

Figura 3.7: Ruta de recolección real en la zona centro, con la intersección de calles.

3.5.3. Número de recorridos del vehículo

El número de viajes realizados por camión, durante la jornada normal de trabajo dependerá de diversos factores, como son:

- a) La recolección deberá iniciar lo más cercano al centro de operaciones.
- b) La cantidad de basura en cada punto de recolección.
- c) Distancia al sitio del relleno sanitario.
- d) Longitud de las rutas.
- e) Dirección de vialidad.

Considerando los factores anteriores, en la Figura 3.8 se muestra un recorrido realizado actualmente por la unidad recolectora en la ruta centro, nótese que la unidad realiza el mismo recorrido más de una vez, los nodos simbolizan la intersección de dos o más calles, cuya descripción se muestra en la Figura 3.7, considerando el sentido de la vialidad, en este caso, la red está compuesta por 70 nodos, la unidad recorre los nodos 5, 6 ,7, 13, 26, 27,10, 11 y 12 hasta tres veces, esto se presenta en las primeras arterias de la Ciudad, como son calle Libertad hasta calle Zaragoza, así también entre calle Juárez y Manuel F. Soto.

Además, en la Figura 3.8 se observa que existen recorridos que se repiten en las primeras arterias de la zona centro, causando el desgaste del vehículo y un consumo excesivo de combustible, lo que motiva a la investigación y análisis de las rutas de recolección, con el objetivo de que se pueda reducir el recorrido que efectúa cada vehículo recolector, de tal forma que sólo pase por cada nodo una sola vez y visitando todos los puntos de recolección

establecidos por la Comisión del Servicio Público de Limpias, en un tiempo menor.

El recorrido del camión recolector para la zona C1 Centro inicia en el centro de operaciones (Fraccionamiento Santa Ana) y se dirige al punto inicial de recolección (nodo 1) ubicado en calle Morelos y 5 de Mayo, en seguida se dirige al nodo 2 en la esquina de calle Morelos y calle Ocampo, la ruta continúa hasta el nodo 70 como punto de recolección final en la calle Valentín Gómez Farías, Colonia Tepeyac, y de ahí se dirige al tiradero, ubicado en Paxtepec.

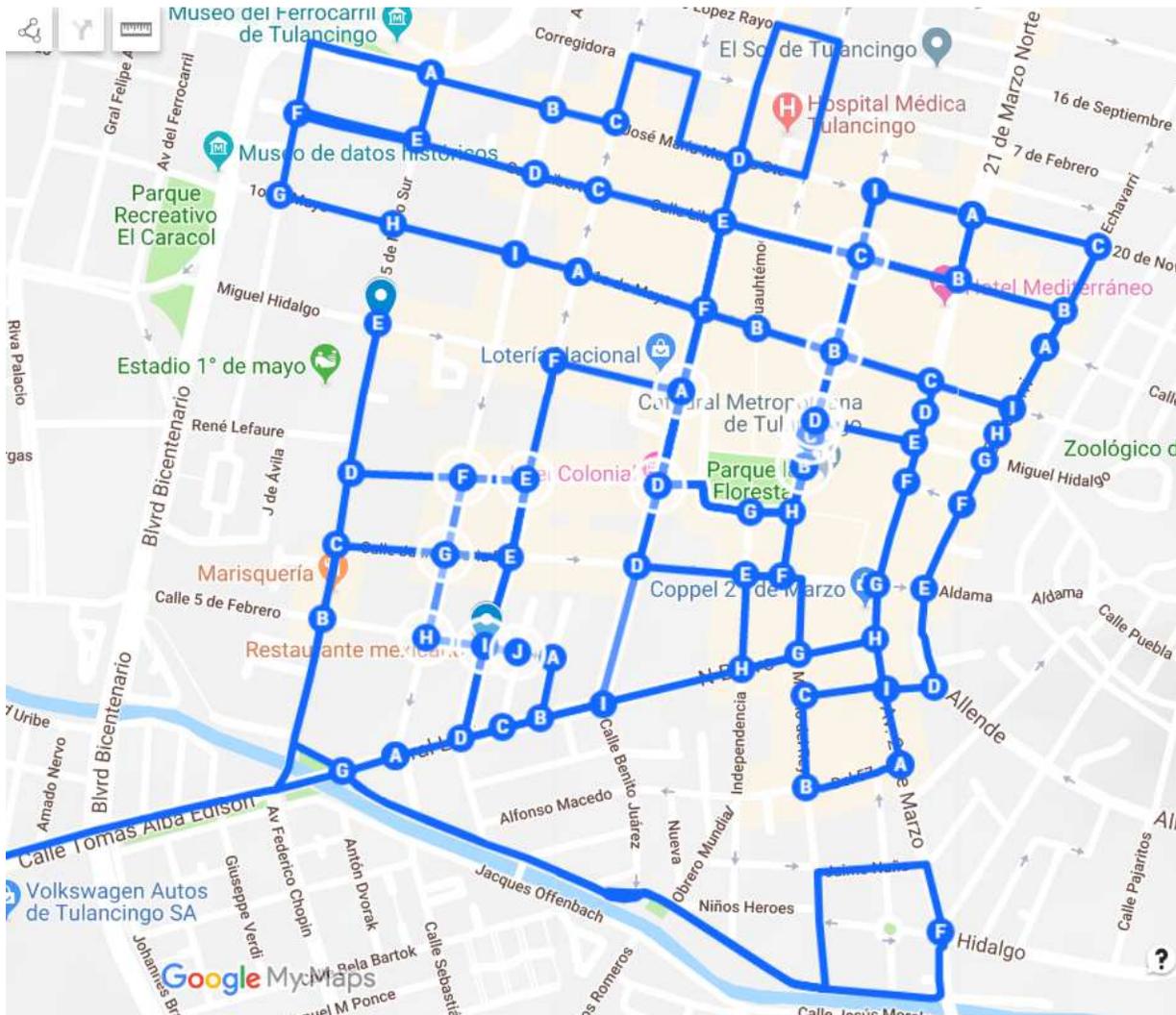


Figura 3.8: Ruta de recolección actual en la zona centro.

Capítulo 4

Programación Matemática

La Programación Matemática es una parte de la Matemática Aplicada que trata de resolver problemas de decisión en los que se deben determinar acciones que optimicen un determinado objetivo, pero satisfaciendo ciertas limitaciones en los recursos disponibles.

En [31] se establece que la Programación Matemática a su vez se divide en varias ramas según las características de las variables y de las ecuaciones y/o inecuaciones que describen los modelos matemáticos. Así, se genera la siguiente clasificación:

1. Programación Lineal (PL), cuando las ecuaciones/inecuaciones son lineales en sus variables.
2. Programación No Lineal, con algunos casos particulares como:
 - a) Programación Cuadrática, donde algunas o todas las ecuaciones/inecuaciones son cuadráticas.
 - b) Programación Entera, si las variables asumen sólo valores enteros.

- c) Programación Continua, las variables asumen valores reales (no negativos).
- d) Programación Multiobjetivo, se genera cuando la función objetivo es una función vectorial.
- e) Programación Determinística, si los parámetros que describen el problema tienen valores fijos.
- f) Programación Estocástica, donde los parámetros son variables aleatorias.
- g) Programación Paramétrica, cuando los parámetros varían de forma sistemática y se buscan las oportunas soluciones óptimas en cada cambio.

3. Optimización Combinatoria, se caracteriza por tener un número finito de posibles soluciones.

En [16] se menciona que el primer modelo de PL fue construido en el siglo XVIII para estimar datos astronómicos. De nuevo se formularon modelos de PL durante la Segunda Guerra Mundial para resolver problemas de asignación de recursos y de transporte, y su uso se popularizó durante la segunda mitad del siglo XX.

Para iniciar a plantear un modelo de PL, es necesario conocer la estructura del problema, considerando medir $m \geq n$ combinaciones lineales, en la estimación indirecta de n magnitudes x_1, \dots, x_n representado de la siguiente forma

$$a_i^T x = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

obteniendo un resultado, b_i para $i = 1, \dots, m$.

Sean

$$A = [a_{ij}], \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde el valor de x satisface la expresión $Ax = b$, si las componentes de b son exactas. Si sucede lo contrario, es recomendable tomar como valor aproximado de x una solución del sistema $Ax = b$.

Ya que la relación entre m y n está representada por $m > n$ el sistema es *inconsistente*, por tener A filas repetidas, generando así una solución aproximada.

Esta solución aproximada del sistema la toman Lagrange y Laplace con el vector $x \in R^n$ que minimiza la norma L_∞ ($\|r\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \{|r_i|\}$) del vector de error,

$$\begin{aligned} r &= (r_1, \dots, r_m)^T \\ &= (a_i^T x - b_1, \dots, a_m^T x - b_m)^T \end{aligned}$$

El problema

$$\text{mín } \|r\|_\infty$$

no puede resolverse por el método clásico (al no ser diferenciable la función objetivo $f(x) = \max\{|a_i^T x - b_i|, i = 1, \dots, m\}$). Reformulado por Fourier se presenta

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.a.} \quad & |a_i^T x - b_i| \leq z, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

que es de PL, con variables x_1, \dots, x_n y z , donde las restricciones pueden reescribirse en la forma

$$-z \leq a_i^T x - b_i \leq z, i = 1, \dots, m.$$

Por otra parte, la Programación Lineal Continua como se establece en [31] trata sobre la resolución de problemas de optimización que pueden modelarse de la forma:

$$\text{mín} \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, m,$$

donde n representa el número de variables, m el número de restricciones, x_j ($j = 1, \dots, n$) las variables del problema, y a_{ij}, c_j, b_i ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) números reales dados. Al número c_j se le llama costo asociado a la variable j -ésima ($j = 1, \dots, n$) y al número b_i se le llama recurso asociado a la restricción i -ésima ($i = 1, \dots, m$).

Utilizando notación vectorial, el problema se puede representar como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

considerando que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y A una matriz con m filas y n columnas.

Para tomar decisiones en una situación real es necesario conocer las posibilidades que se presentan y el efecto que generan las mismas, así el cálculo de esas posibilidades se logra a través de modelos que comprenden, por una parte identificar las posibles decisiones a tomar, seguido de las condiciones que limitan el campo de decisión a establecer (conjunto de restricciones), y

finalmente el cálculo costo-beneficio de cada decisión, denominada función objetivo.

La formulación de un modelo de programación lineal identifica tres componentes básicos:

1. Determinación de las variables de decisión
2. Determinación de las restricciones
3. La función lineal que debe ser optimizada.

El conjunto de valores para las variables que satisfacen todas las restricciones se denomina punto factible y el conjunto de todos los puntos factibles se le llama región factible.

Algebraicamente un problema de PL se define como:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Optimizar } f(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde A , b , c y x están descritos como sigue:

A : es la matriz de coeficientes técnicos, matriz de $m \times n$,

b : es una matriz de coeficientes de $m \times 1$,

x : vector de variables de $n \times 1$.

Definición 1 Sea (P) el problema de programación lineal dado como en (4.1), el conjunto factible se define por

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Los problemas de programación lineal se pueden clasificar, de acuerdo a su solución, como:

- i) Problema consistente ($F \neq \emptyset$): Es aquel que tiene solución única o múltiples soluciones.
- ii) Problema inconsistente ($F = \emptyset$): Es aquel que no tiene solución.

Unas de las aplicaciones importantes que se analizan bajo el enfoque de la Programación Matemática es la distribución de bienes o servicios mediante el análisis de modelos analíticos existentes, en este caso, dichos modelos los ocupamos para la optimización de rutas de vehículos, generando un marco estratégico para la toma de decisiones en la asignación de recursos.

4.1. Programación Lineal Entera (PLE)

Un problema de PLE es un problema similar a un PL, sin embargo las variables del problema toman valores que no están en un conjunto continuo. En estos problemas, cuando sólo tienen sentido aquellas soluciones de la región factible en las que todas las variables de decisión toman valores enteros no negativos se denominan *Enteros Puros* (\mathbb{Z}), en caso contrario se denominan *Mixtos*. La forma general de un problema de PLE es la siguiente:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx / mín } f(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \\ & x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

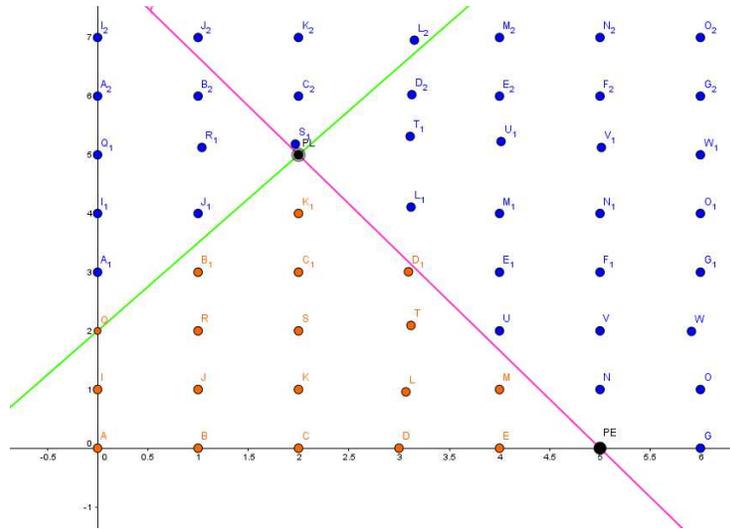


Figura 4.1: Geometría de un modelo entero.

Las aplicaciones de modelos de PE son problemas de localización de instalaciones, problemas de asignación, problemas de ruteo vehicular, entre otros.

Ejemplo 2 *Consideremos el problema entero*

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín} \quad x_1 + x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 5x_1 + 3x_2 \leq 25 \\
 & -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
 & x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La gráfica de la Figura 4.1 ilustra la geometría de un modelo entero

4.2. Programación Binaria (PB)

La PB pertenece a la PL y tiene como finalidad la toma de decisiones enfocada a realizar o no una actividad. Así, la variable binaria únicamente

acepta valores de 0 y 1, consideradas como situaciones de exclusión o inclusión respectivamente.

En este trabajo consideraremos el modelo del Agente Viajero (TSP, Traveling Salesman Problem), que es un modelo de PB que minimiza la distancia total recorrida, en donde consideramos como origen el lugar desde donde salen los camiones recolectores, y el destino el depósito de los desechos.

Definir la variable binaria es establecer

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si se realiza la actividad } i \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La diversidad de condiciones en las que se puede aplicar tiene un impacto en cuanto al tiempo, al tipo de servicio y a los recursos económicos. De esta manera, las decisiones operativas [27] para la toma de decisiones en horizontes de planeación cortos que pueden ir de unos días hasta semanas, incluyen actividades como la asignación de rutas de reparto, asignación de tareas, itinerario de vehículos, entre otras.

La localización geográfica de unidades y logística como parte del diseño de sistemas logísticos es una decisión que se requiere para técnicas de análisis multicriterio, evaluación de puntos de recolección y modelos de asignación de clientes a unidades.

El sistema de distribución de un servicio se compone de todas las partes involucradas directa o indirectamente, pero que satisface las necesidades de los clientes [9]. Así, las actividades relacionadas con el sistema de recolección se realizan a través de una flota de vehículos que inician y finalizan su recorrido en un depósito en la misma ciudad, visitando n lugares, con la finalidad de que la distancia recorrida sea mínima. Una característica común es que

cada nodo es visitado una sola vez por un solo vehículo y cada vehículo tiene una capacidad limitada.

Esto significa que para tres vértices (x, y, z) la salida del algoritmo es un *cactus*, esto es, un grafo $G = (V, E)$ llamado un *spanning cactus*, si cada borde de un cactus está contenido en exactamente un ciclo, generando una solución aproximada al problema del agente viajero.

4.3. Complejidad algorítmica

Para comprender lo que es un problema NP es necesario abordar el tema de la complejidad computacional, que estudia la “dificultad” de problemas de importancia teórica y práctica, como es el caso del TSP.

En toda investigación saber que tan bueno es un algoritmo para resolver un problema representa uno de los ejes de reflexión, ya que a la presentación superficial de un problema le sigue su delimitación, dirigiendo la atención a la complejidad algorítmica y la complejidad computacional de un problema de análisis combinatorio, como se establece en [31] y Clay Mathematics Institute (CMI), que incluyó a estos problemas entre los más importantes de la época.

Se llama *ejemplo* o *instancia* de un problema al propio problema cuando los datos de entrada son datos concretos o conocidos.

Se llama *tamaño* de una instancia al número de símbolos que sean necesarios para codificar los datos de entrada de la instancia.

Se llama *dimensión* de una instancia al número de palabras que configuran los datos de entrada de la instancia.

Llamaremos *autómata* a un ente capaz de realizar unos cambios de es-

tados (digamos pasos) dependiendo de un conjunto de instrucciones, al que llamaremos programa.

Un *algoritmo* para resolver un problema es un programa que lleva a un autómata a escribir los datos de salida de cada una de sus instancias, tras un número finito de pasos, después de haber leído sus datos de entrada.

Se llama *complejidad de un algoritmo* al número máximo $f(n)$ de pasos que dicho algoritmo requiere del autómata para resolver instancias de tamaño no superior a n , siendo n cualquier número natural arbitrario pero fijo.

La función $f(n)$ no requiere ser conocida de forma exacta, sino que es suficiente conocer su tendencia de crecimiento. A ésta se le llama *orden de crecimiento* y se denota como $O(\cdot)$.

Definición 3 *Un algoritmo se dice polinomial si su orden de crecimiento está acotado por un polinomio en n (sin importar el grado de dicho polinomio), esto es, es del tipo $O(n^k)$ para algún número natural k .*

Definición 4 *Un problema se dice polinomial si se conoce un algoritmo polinomial para determinar una solución óptima.*

Definición 5 *Un problema se dice decisional si su respuesta es “sí” o “no”. Se llama problema complemento de un problema decisional a otro que pregunta lo opuesto.*

Definición 6 *La familia de problemas decisionales polinomiales se conoce como clase P .*

Se llama *certificado polinomial* a una información auxiliar que puede usarse para verificar la exactitud de la respuesta del problema mediante un algoritmo de tiempo polinomial en el tamaño de la instancia.

Definición 7 *Un problema se dice que pertenece a la clase NP (Nondeterministic Polynomial) si toda instancia con respuesta “si” admite un certificado polinomial.*

El problema del viajante (TSP), responde a la siguiente pregunta: dada una lista de ciudades y las distancias entre cada par de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y al finalizar regresa a la ciudad origen? Este es un problema NP-difícil dentro de la optimización combinatoria, muy importante en la investigación de operaciones y en la ciencia de la computación.

El TSP, en la práctica sólo se resuelve analíticamente para instancias pequeñas. Cuando el modelo creado es demasiado complicado o bien, el tamaño del problema lo hace inmanejable utilizando métodos exactos, los métodos heurísticos representan una alternativa de solución de problemas de optimización, por lo que el TSP es una prueba obligada para validar cualquier técnica de resolución de problemas enteros o combinatorios.

4.4. Conceptos básicos de teoría de grafos

Gran cantidad de problemas de planificación de rutas o recorridos de distribución han encontrado alternativas de solución en la teoría de grafos, considerando que el grafo puede ser una ciudad o un punto de paso en el recorrido. Un modelo alternativo por la semejanza de sus estructuras es el problema del agente viajero (TSP) que junto con la teoría de grafos se diseñan estrategias de ruteo en la red de recolección de RSU, buscando que se realice de manera eficiente respecto a la distancia de las diversas rutas y tiempo de

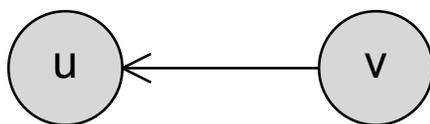


Figura 4.2: Grafo dirigido (recorrido desde un vértice inicial a un vértice final).

servicio utilizado, que permite encontrar el recorrido de la ruta con menor distancia, impactando en la eficiencia y agilidad de la distribución.

El estudio de la teoría de grafos se centra en diversos puntos denominados *vértices* y los lados que los conectan llamadas *aristas*. Esto da origen a la definición de grafo, (véase [19]).

Definición *Un grafo G es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos. Al conjunto V se le llama conjunto de vértices, al conjunto E conjunto de lados o aristas. Cada arista $e \in E$ tiene un nodo en sus extremos u, v , denotada por $e = \{u, v\}$.*

$$E \longrightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

Definición *Un grafo dirigido u orientado es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos, junto con dos aplicaciones s, t denominadas dominio y codominio. El recorrido es de un vértice inicial a un vértice final (Figura 4.2).*

$$s, t : E \longrightarrow V$$

Por otra parte, cuando no se distingue entre las aristas uv y vu , presenta aristas en ambos sentidos y se dice que es un grafo no dirigido como se muestra en el grafo de la Figura 4.3.

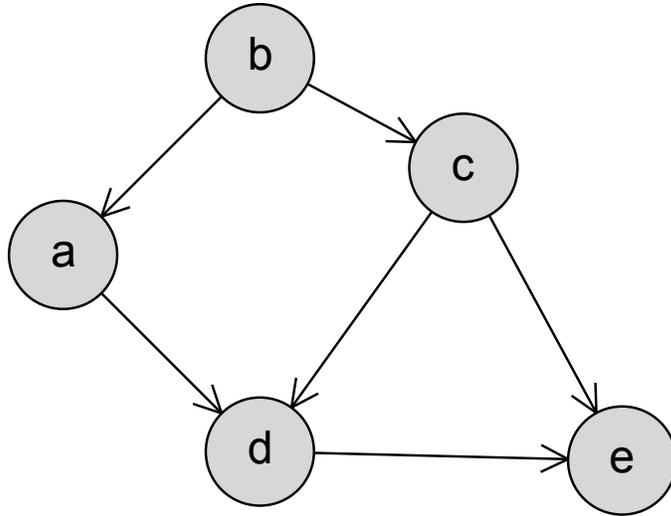


Figura 4.3: Grafo no dirigido.

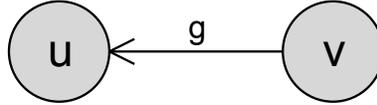


Figura 4.4: Peso g en las aristas.

Las aristas de un grafo pueden tener pesos, como lo muestra la Figura 4.4.

Un camino (trayectoria) de longitud n es una sucesión de lados e_1, e_2, \dots, e_n , junto con una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_{n+1} , tales que

$$e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$$

Así, el vértice final de cada arista coincide con el vértice inicial de la siguiente. Esto es, el camino simple o elemental, del vértice v_1 , al vértice v_{n+1} , no utiliza más de una vez el mismo vértice.

Ejemplo 8 Consideremos el grafo de la Figura 4.5, podemos observar el trayecto como la secuencia (a, b, c, d, e, f) mostrado en el grafo de la Figura 4.6.

El trayecto (a, d, e, f) cumple con las condiciones de camino simple, como se observa en la Figura 4.7.

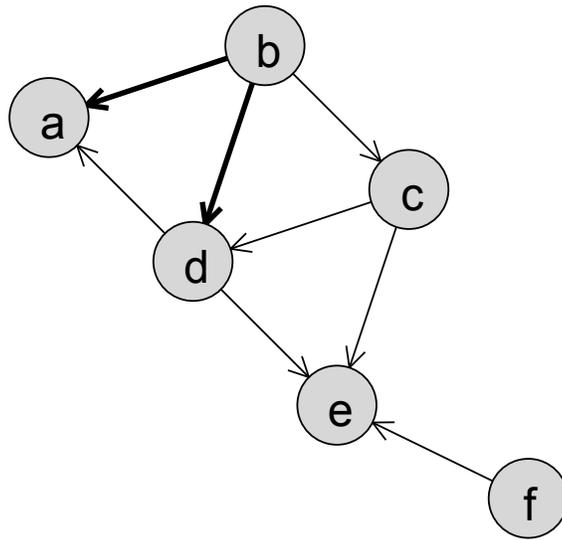


Figura 4.5: Grafo del Ejemplo 8.

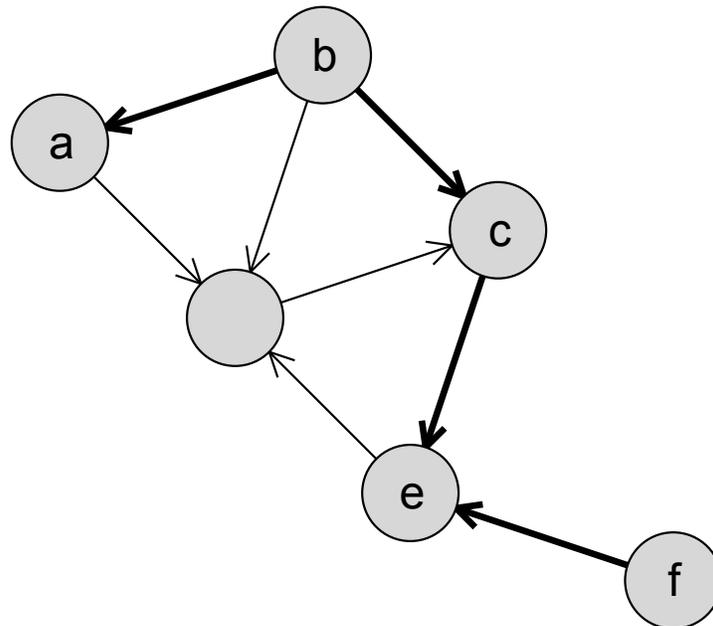


Figura 4.6: Trayecto de a a f .

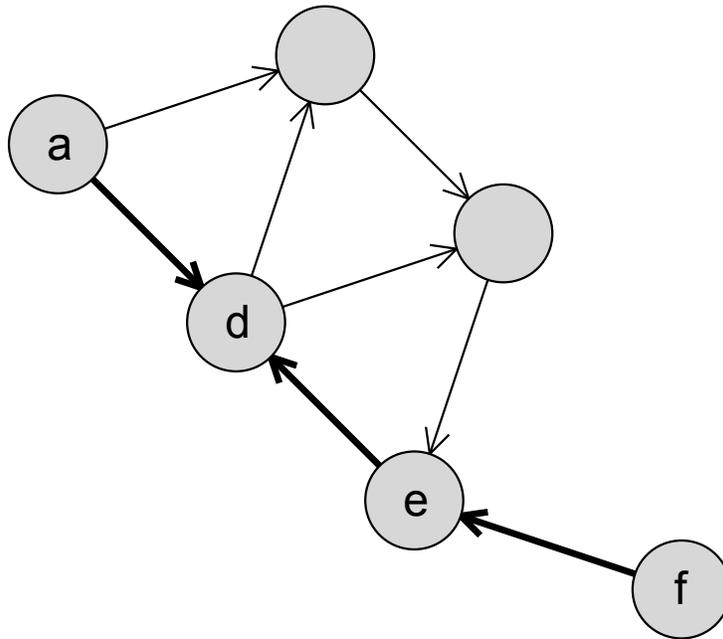


Figura 4.7: Trayecto de a a f , que ilustra un camino simple.

Un camino cerrado, es cualquier camino de x a y donde $x = y$; esto es, inicia y termina en el mismo nodo. En el camino $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, el vértice final a_k coincide con el vértice inicial a_1 . En la Figura 4.8 y Figura 4.9 se muestran los caminos cerrados (a, b, d, a) y (a, b, c, d, a) , respectivamente.

- **Tour o Ciclo Hamiltoniano:** Ciclo Simple que pasa por todos los vértices. En términos de Teoría de Grafos, el problema es, dado un grafo $G = (V, A, C)$ donde V es el conjunto de vértices, A el conjunto de aristas y C_{ij} el costo o distancia de la arista (i, j) , encontrar la ruta más corta que visita cada ciudad exactamente una sola vez y vuelve a la ciudad de origen (Figura 4.10).
- **Subtour:** Es un tour que no incluye todas las ciudades, aunque empiece y termine en el nodo origen (Figura 4.11).

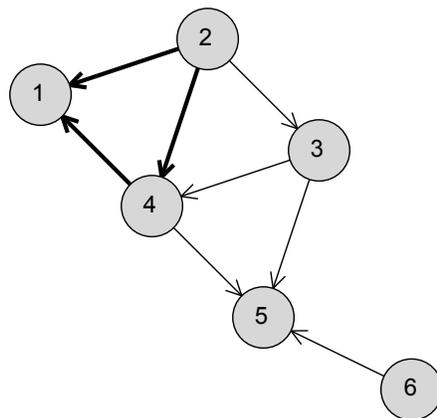


Figura 4.8: Camino cerrado.

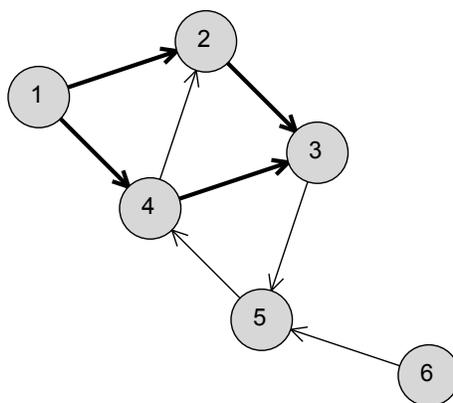


Figura 4.9: Camino cerrado.

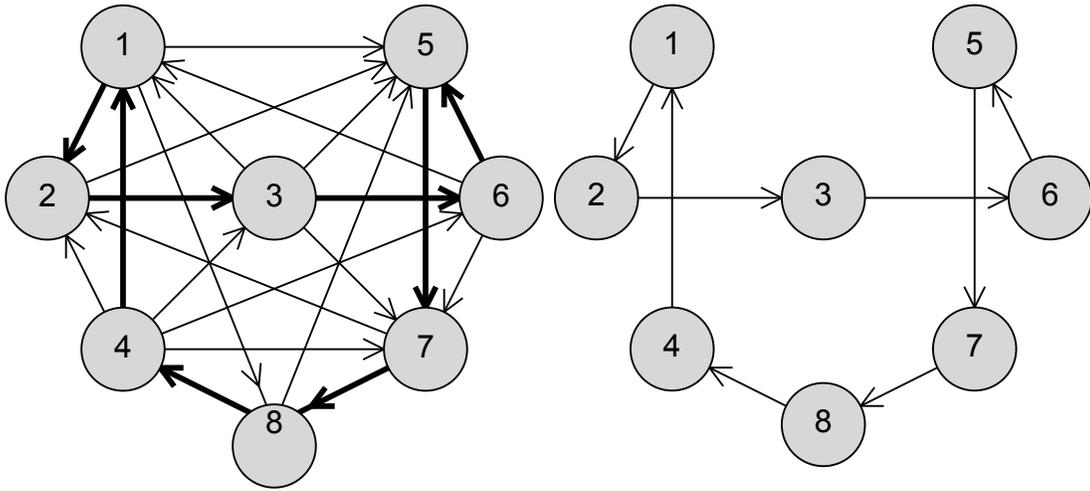


Figura 4.10: Ciclo Hamiltoniano.

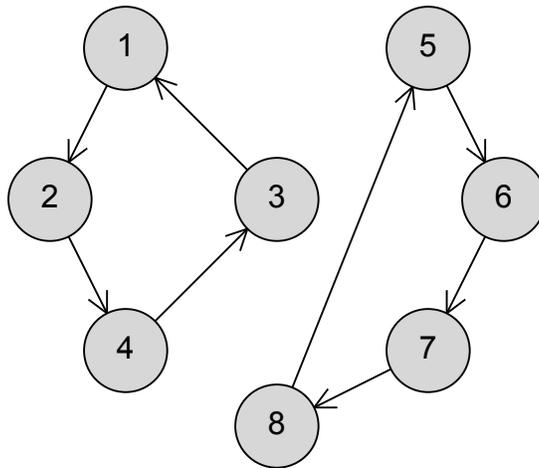


Figura 4.11: Subtours.

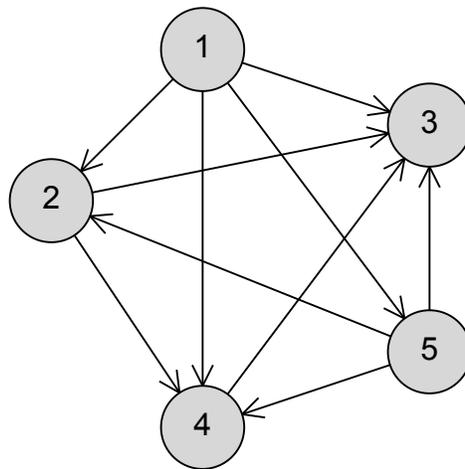


Figura 4.12: Grafo dirigido.

Definición 9 Un grafo no dirigido (V, A) que se representa con el conjunto de vértices V y el conjunto de aristas A , es simétrico si para toda arista (i, j) que pertenece a A también existe la arista (j, i) que pertenece a A .

Además el Costo o Distancia son iguales esto es, $C_{ij} = C_{ji}$ ó $d_{ij} = d_{ji}$ $\forall (i, j) \in A$, donde A es el conjunto de aristas, (véase la Figura 4.12).

La Optimización Combinatoria es una parte de la Programación Matemática que estudia problemas del tipo:

$$\text{mín}\{f(x) : x \in S\},$$

siendo $|S| < \infty$, es decir, la Optimización Combinatoria trata de desarrollar algoritmos para afrontar problemas de optimización caracterizados por tener un número finito de soluciones factibles. Aunque por definición puede parecer que la “simple” enumeración de las soluciones en S es suficiente para resolverlos, esta idea no es realizable en la práctica, ya que el número $|S|$ puede

ser exageradamente enorme. Por otra parte, particularidades del conjunto S permiten en ocasiones diseñar algoritmos efectivos que permiten determinar (con tiempos de cálculo razonables) alguna solución al problema.

Algunos problemas de Optimización Combinatoria son los problemas polinomiales como $NP - duros$ (también llamados $NP - difíciles$) tienen la particularidad de que si algún día alguien encontrara un algoritmo polinomial para uno de ellos, entonces automáticamente todos los problemas de la clase NP pasarían a estar en la clase P . A pesar de esta intrínseca naturaleza difícil, algunos de estos problemas necesitan de algoritmos, ya que aparecen en diversas aplicaciones.

Uno de los problemas NP duros más importantes es el problema del Agente Viajero.

Capítulo 5

Descripción del problema del agente viajero

El problema del viajante, también conocido como *Traveling Salesman Problem* (TSP), ha sido uno de los más estudiados en Investigación Operativa. Cuando la teoría de la Complejidad Algorítmica se desarrolló, el TSP fue uno de los primeros problemas en estudiarse, debido a que pertenece a la clase de los problemas difíciles (NP-hard), que se convierte en una prueba obligada para validar cualquier técnica de resolución de problemas enteros o combinatorios.

El problema del viajante puede enunciarse del siguiente modo:

“Un viajante de comercio ha de visitar n ciudades, comenzando y finalizando en su propia ciudad. Conociendo el costo de ir de cada ciudad a otra, determinar el recorrido de costo mínimo”.

El TSP puede ser modelado como un grafo G , compuesto por elementos como: un conjunto de vértices y el costo del viaje que son las distancias de

las aristas de ir de la ciudad i a la j .

Se dice que el TSP es *asimétrico* cuando se genera $C_{ij} \neq C_{ji}$ ó $d_{ij} \neq d_{ji}$. El TSP es considerando como un problema de programación entera con variables binarias, donde, $x_{ij} \in \{0, 1\}$, que representa una posibilidad de conexión entre el nodo origen i y el nodo destino j .

El recorrido que el agente viajero realiza se le llama tour y la distancia o costo entre cada ciudad está representada por C_{ij} ó d_{ij} , donde el objetivo es minimizar la distancia recorrida por el agente viajero, que en términos matemáticos significa minimizar una función objetivo.

5.1. La trayectoria más corta de un ciclo

En la Figura 5.1 se ilustra un tour en una instancia de 8 ciudades, donde no afecta el nodo que se considera como origen. Esto es, si el vértice origen es el vértice 1, se puede ir del vértice 1 al vértice 2 ó del vértice 1 al vértice 3, así sucesivamente hasta el vértice 8, lo que permitirá construir el conjunto de ecuaciones (5.1)-(5.3).

$$\sum_{j=1}^8 x_{1j} = 1 \quad (5.1)$$

Si el vértice origen es el 2, la condición gráfica y el modelo se representa por (Fig 5.2).

$$\sum_{j=1}^8 x_{2j} = 1 \quad (5.2)$$

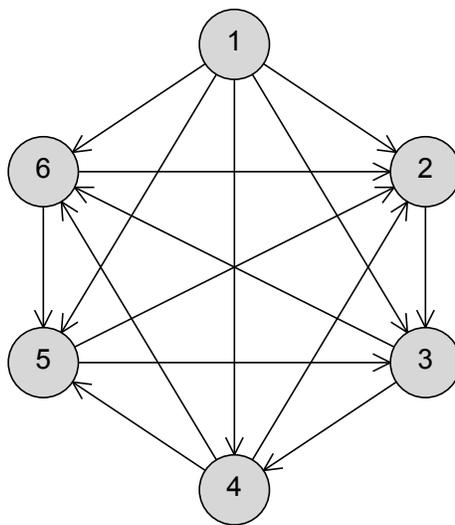


Figura 5.1: Tour de una instancia de ocho ciudades.

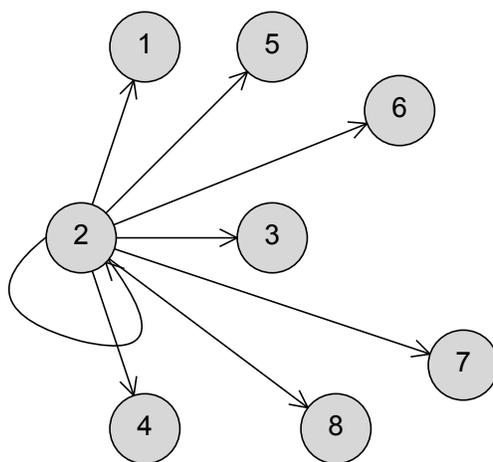


Figura 5.2: Considerando como vértice inicial el nodo dos.

La condición gráfica de cada nodo se repite para los vértices restantes, lo que genera el tour de 8 ciudades como:

$$\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 x_{ij} = 1 \quad (5.3)$$

Así, para un grafo con n vértices, la condición es:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad ; \quad \forall_{ij} \in I$$

Donde I es el conjunto de todos los vértices del grafo, esto es $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ y además $i, j \in I$.

El problema del TSP se puede formular mediante un modelo de programación lineal entera con variables binarias. Consideremos las variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el viajante va de la ciudad } i \text{ a la } j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y c_{ij} el costo de ir de la ciudad i a la ciudad j :

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i < j} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i < j} x_{ij} + \sum_{j < i} x_{ji} = 2, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{(i,j) \in \partial(S)} x_{ij} \geq 2, \quad \forall S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad 3 \leq |S| \leq [n/2] \\ & x_{i,j} = 0, 1 \quad \forall i < j, \end{aligned}$$

donde $\partial(S)$ representa el conjunto de aristas con exactamente un vértice de S .

Las restricciones que aparecen en segundo lugar (vinculadas a casi la mitad de los subconjuntos de vértices de S) reciben el nombre de restricciones de *eliminación de subtours* y garantizan que la solución sea un tour.

5.2. Rutas de recolección y el TSP

El proceso de recolección por parte de cada vehículo del municipio se debe iniciar desde el centro de operaciones y, posteriormente, transitar por cada uno de los puntos de recolección pre-establecidos en una determinada zona.

El análisis del transporte de recolección es vital por dos razones importantes: el vehículo destinado a la recolección de desechos garantiza que el operario realizará la correcta prestación del servicio y aseo, por lo que será acreedor a falta administrativa en caso de abandonar la ruta establecida por el centro de operaciones. Así como, asegurar que el vehículo cumple con la capacidad suficiente para almacenar los RSU durante una jornada de recolección y transporte de desechos.

De acuerdo a lo que se presentó en el Capítulo 3, la recolección de residuos sólidos se puede interpretar como el problema del TSP, donde cada nodo que recorre el agente viajero (el vehículo recolector) se puede entender como el depósito de los lugares previstos para la recolección de cada punto de disposición de residuos de los ciudadanos, y así el vehículo recolector debe visitar cada uno de los puntos de disposición.

Por lo que podemos utilizar el problema del TSP para encontrar una ruta óptima del recorrido en cada una de las zonas del municipio, de manera particular y como se vió en el Capítulo 3 con un número de nodos $n = 70$, que corresponde a la unidad 20, turno matutino, zona C1-Centro, con recorrido que inicia a las 5:50 am en Aurrera y concluye 13:12 pm en Avenida 21 de Marzo (Figura 3.6), informe proporcionado por la Dirección de Limpia y Disposición de Residuos de la Secretaría de Servicios Municipales para el recorrido de las rutas [18].

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	...
Nodo 1	2000	3.41	2.66	2.81	2.40	2.22	1.85	...
Nodo 2	3.20	2000	2.07	2.225	1.85	2.80	3.03	...
Nodo 3	3.00	2.00	2000	0.155	0.941	1.30	1.31	...
Nodo 4	3.00	2.00	1.00	2000	0.94	1.27	1.31	...
Nodo 5	2.33	2.80	0.92	1.00	2000	0.291	0.503	...
Nodo 6	2.00	3.00	0.701	0.819	0.806	2000	0.232	...
Nodo 7	2.00	4.00	0.736	0.854	0.841	0.444	2000	...
Nodo 8	2.00	3.00	0.736	0.854	0.841	0.444	0.19	...
Nodo 9	2.00	3.00	0.992	1.00	1.00	0.70	0.381	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 5.1: TSP Asimétrico de la unidad 17, turno matutino con 31 nodos, (extracto).

Cabe mencionar que, considerando cada una de las zonas, se contempla una cantidad de nodos que varían entre 31 (unidad 17, turno matutino) y 312 (unidad 12, turno matutino) generando la matriz asimétrica $d(i, j) \neq d(j, i)$ para cada uno de los puntos de recolección. Los cuadros 5.1 y 5.2 de *TSP* asimétrico muestran el recorrido.

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	...
Nodo 1	2000	1.3	1.4	1.5	1.5	1.5	1.6	...
Nodo 2	1.7	2000	0.10	0.14	0.20	0.17	0.20	...
Nodo 3	1.8	0.045	2000	0.084	0.14	0.11	0.20	...
Nodo 4	1.8	0.20	0.30	2000	0.059	0.11	0.19	...
Nodo 5	1.9	0.19	0.94	0.05	2000	0.15	0.25	...
Nodo 6	1.9	0.17	0.74	0.12	0.17	2000	0.081	...
Nodo 7	1.9	0.25	0.16	0.20	0.25	0.094	2000	...
Nodo 8	2.0	0.30	0.21	0.17	0.12	0.28	0.35	...
Nodo 9	2.0	0.70	0.20	0.16	0.11	0.27	0.40	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 5.2: TSP Asimétrico de la unidad 12, turno matutino con 156 nodos (extracto).

Capítulo 6

Implementación computacional

La teoría de la complejidad computacional basada en la eficiencia de los algoritmos, está en función de los recursos requeridos para resolver un problema, como es el tiempo de ejecución y el espacio requerido en el equipo de cómputo para el almacenamiento de datos.

Se implementó el TSP con los diferentes nodos, dependiendo de la zona para determinar la solución óptima, dado que se trata con un problema del TSP asimétrico, se utilizó un procedimiento para transformar el TSP asimétrico hacia un problema simétrico.

Existen varios métodos que adaptan el TSP asimétrico a un TSP simétrico. En este trabajo utilizamos la metodología que se presenta en [44].

6.1. Transformación de un TSP asimétrico en un TSP simétrico

Una instancia de TSP de tamaño n consiste de un grafo dirigido de n -nodos y una matriz de distancias $D = [d_{ij}]_{n \times n}$, donde para cada i, j , d_{ij} representa la distancia entre los nodos i y j . El problema es encontrar un recorrido Hamiltoniano óptimo, es decir, un camino cerrado con la longitud lo más corta posible que visite cada nodo exactamente una vez. Una instancia de TSP se llama *simétrica*, denotada como STSP, si D es una matriz simétrica, es decir, si $D^T = D$, donde D^T denota la traspuesta de D ; de lo contrario, se llama *asimétrica*, denotada como ATSP. Una instancia de TSP se llama *euclidiana* si se satisface la desigualdad,

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}; \quad \forall i \neq j \neq k$$

Sea $D_{n \times n}$ la matriz distancia para un TSP de tamaño n . Entonces definimos

$$d_{\text{máx}} := \max_{i \neq j} d_{ij}$$

$$d_{\text{mín}} := \min_{i \neq j} d_{ij}.$$

Se dice que D es positivo si $d_{\text{mín}} > 0$. El conjunto de todas las soluciones de un TSP de tamaño n es el conjunto de todos los ciclos Hamiltonianos, las cuales también se pueden ver como el conjunto de todas las permutaciones cíclicas del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Usamos \mathcal{T}_D para denotar al conjunto de todos los ciclos Hamiltonianos asociados con la matriz de distancias D . Dado un ciclo Hamiltoniano $T \in \mathcal{T}_D$ de la forma,

$$T = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_n,$$

donde $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$, el costo del ciclo T , denotado por $C_D(T)$, se determina por la suma de las distancias de todas las fronteras del ciclo

$$C_D(T) := \sum_{k=1}^n d_{i_k i_{k+1}},$$

donde $i_{n+1} := i_1$. $T^* \in \mathcal{T}_D$ es un ciclo Hamiltoniano óptimo si

$$T^* \in \arg \left\{ \min_T C_D(T) \right\},$$

de esta forma, $C_D(T)$ representa el costo de un ciclo óptimo.

Considere una matriz de distancias asimétrica $D = [d_{ij}]_{n \times n}$. Se supone que

$$-\infty < d_{\min} \leq d_{\max} < \infty \quad (6.1)$$

Primero se muestra que agregando una constante adecuada a cada entrada de D , es posible obtener una matriz D' tal que $\frac{d'_{\max}}{d'_{\min}} < \frac{4}{3}$. Se define la matriz de distancias $D' = [d'_{ij}]_{n \times n}$ para toda i, j , como

$$d'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ d_{ij} & \text{si } [4d_{\min} - 3d_{\max}] > 0, i \neq j \\ d_{ij} + [3d_{\max} - 4d_{\min} + \varepsilon] & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6.2)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número pequeño positivo. A partir de la expresión (6.1) y la definición (6.2) se sigue que:

$$-\infty < d'_{\min} \leq d'_{\max} < \infty.$$

Usando la matriz de distancia D' , se define la matriz de distancia simétrica $\bar{D} = [d_{ij}]_{2n \times 2n}$ como

$$\bar{D} := \left[\begin{array}{c|c} \infty & (D')^T \\ \hline D' & \infty \end{array} \right]$$

Por simplicidad, dado $i \leq n$, usamos $[i]$ para denotar $i + n$. Así que $[1] = 1 + n$, $[2] = 2 + n$, etc. Decimos que i e $[i]$ denotan a un par de nodos *complementarios*. Además, para cada $i \leq n$, el nodo i se denomina *nodo real*, mientras que el nodo $[i]$ se llama *nodo virtual*. Nótese que para cada i, j ,

$$\begin{aligned} \bar{d}_{ij} &= \bar{d}_{[i][j]} = \infty; \\ \bar{d}_{[i]j} &= \bar{d}_{j[i]} = d'_{ij}; \\ \bar{d}_{[i]i} &= \bar{d}_{i[i]} = d'_{ii} = 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, la distancia entre un par de nodos reales o virtuales es infinita, mientras que la distancia entre un nodo real y un nodo virtual es finita y simétrica, y la distancia entre un par de nodos complementarios es cero.

Un ciclo Hamiltoniano factible induce un ciclo Hamiltoniano para la matriz de distancias asimétrica D .

Se dice que un ciclo Hamiltoniano $T \in \mathcal{T}_{\bar{D}}$ es factible si visita nodos reales y virtuales de forma alternada, y visita un nodo complementario inmediatamente después de visitar un nodo, es decir, es de la forma:

$$\bar{T} = i_1 \rightarrow [i_1] \rightarrow i_2 \rightarrow [i_2] \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow [i_n],$$

donde $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$. Claramente, \bar{T} es un ciclo Hamiltoniano, ya que es una permutación cíclica del conjunto $\{1, \dots, n, n+1, \dots, 2n\} = \{1, \dots, n, [1], \dots, [n]\}$.

En nuestro caso, el problema auxiliar TSP simétrico se codificó con el optimizador GAMS, con un procesador pentium dual core. Sin embargo, el

proceso que se llevó a cabo para resolver cada uno de los problemas (diferentes valores de n) para cada zona fue superior a la capacidad de cómputo del equipo mencionado. Notemos que el problema auxiliar TSP simétrico aumenta el número de nodos, a través de nuevos nodos ficticios. El TSP auxiliar tiene un número de nodos $2n$. Para la cantidad de nodos en nuestro modelo ahora con nodos entre 62 y 312. Es por ello que se requirió utilizar otro tipo de estrategia de cómputo, a través de algoritmos heurísticos.

6.2. Algoritmos heurísticos

Algunas clases de problemas de optimización son relativamente fáciles de resolver. Este es el caso, por ejemplo, de los problemas lineales, en los que tanto la *función objetivo* como las *restricciones* son expresiones lineales. Estos problemas pueden ser resueltos con el conocido *método Simplex*; sin embargo, muchos otros tipos de problemas de optimización son muy difíciles de resolver. De hecho, la mayor parte de los que podemos encontrar en la práctica entran en esta categoría.

La idea intuitiva de problema "difícil de resolver" queda reflejada en el término científico NP-hard utilizado en el contexto de la complejidad algorítmica. En términos coloquiales podemos decir que un problema de optimización difícil es aquel para el que no podemos garantizar el encontrar la mejor solución posible en un tiempo razonable. La existencia de una gran cantidad y variedad de problemas difíciles, que aparecen en la práctica y que necesitan ser resueltos de forma eficiente, impulsó el desarrollo de procedimientos eficientes para encontrar buenas soluciones aunque no fueran

óptimas.

Estos métodos, en los que la rapidez del proceso es tan importante como la calidad de la solución obtenida, se denominan heurísticos o aproximados. El uso de algoritmos heurísticos es una estrategia utilizada para la solución de problemas de optimización combinatoria.

La palabra *heurístico* proviene de la palabra griega *heuriskein* que significa encontrar o descubrir y se usa en el ámbito de la optimización para describir una clase de algoritmos de resolución de problemas.

Algunas razones para utilizar en un problema métodos heurísticos como se establece en [43], es que no se conoce un método exacto para su resolución, en caso de existir el método computacional sería costoso. Teniendo la ventaja que el método heurístico es más flexible que un método exacto, lo que permite la incorporación de condiciones donde la modelización se torna difícil.

Un buen algoritmo heurístico debe tener las siguientes propiedades como medidas de calidad:

1. Eficiente. Un esfuerzo computacional realista para obtener la solución.
2. Bueno. La solución, debe estar en promedio, cerca del óptimo.
3. Robusto. La probabilidad de obtener una solución lejos del óptimo, debe ser baja.

6.2.1. Algoritmo del vecino más próximo

Cuando la teoría de la Complejidad Algorítmica se desarrolló, el TSP fue uno de los primeros problemas en estudiarse, ya que pertenece a la clase de los problemas difíciles (NP-hard). El Algoritmo del vecino más próximo es

un método constructivo que trata de construir un ciclo Hamiltoniano de bajo costo basándose en el vértice cercano a uno dado. Su código, en una versión estándar, es el siguiente [43]:

Algoritmo del vecino más próximo

Inicialización

Seleccionar un vértice j al azar.

Hacer $t = j$ y $W = V \setminus \{j\}$

Mientras ($W \neq \emptyset$)

Tomar $j \in W \mid c_{tj} = \min_{i \in W} \{c_{ti}\}$

Conectar t a j

Hacer $W = W \setminus \{j\}$ y $t = j$.

Tabla 6.1: Algoritmo del vecino más proximo [43].

6.2.2. Algoritmo 2-opt

Este algoritmo mejora la solución obtenida por alguna heurística constructiva como la del vecino más próximo. La estrategia se basa en proponer un movimiento compuesto, en donde cada una de las partes consta de un movimiento que no mejora necesariamente, pero el movimiento compuesto sí lo hace. De esta forma, es como si se realizaran varios movimientos simples consecutivos en donde algunos empeoran y otros mejoran el valor de la solución, pero no se pierde el control sobre el proceso de búsqueda ya que el movimiento completo sí que mejora. Además, combina diferentes movimientos simples, lo cual es una estrategia que ha producido muy buenos resultados en los algoritmos de búsqueda local [41] y [43].

A continuación introducimos el Algoritmo de Lin y Kernighan.

Algoritmo de Lin y Kernighan

Inicialización

Obtener una solución inicial W .

Mientras sea posible hacer

elegir los vértices $(i, i + 1)$ y $(k, k + 1) \in W$ tal que

$$c_{i,i+1} + c_{j,j+1} > c_{i,k} + c_{i+1,k+1}$$

$$W := W \setminus \{(i, i + 1), (k, k + 1)\} \cup \{(i, k), (i + 1, k + 1)\}$$

Tabla 6.2: Algoritmo de Lin y Kernighan [41].

El recorrido específico que deben cubrir diariamente los vehículos de recolección en las áreas de la población donde han sido asignados no es un hecho trivial, designar la ruta óptima entre dos puntos determinados, considerando las restricciones que esto conlleva, involucra un modelo de optimización combinatoria para la planificación de las rutas de recolección, utilizando el TSP y técnicas heurísticas del vecino más próximo y el algoritmo 2-opt. Un ejemplo se muestra en la Figura 6.1 y 6.2

Aunque se estudia el TSP simétrico, también es posible considerar el TSP Asimétrico, en donde la distancia de ir de un vértice a otro no es la misma que en el sentido contrario, en la realidad existen calles de un solo sentido, por lo tanto, el problema simétrico resulta insuficiente.

Las restricciones en el proceso, es que cada ciudad debe ser visitada una sola vez, así como la eliminación de subtours, por lo que se requieren de herramientas para la optimización de rutas, junto con la ubicación geográfica, para obtener como resultado rutas optimizadas que se ajustan a un problema

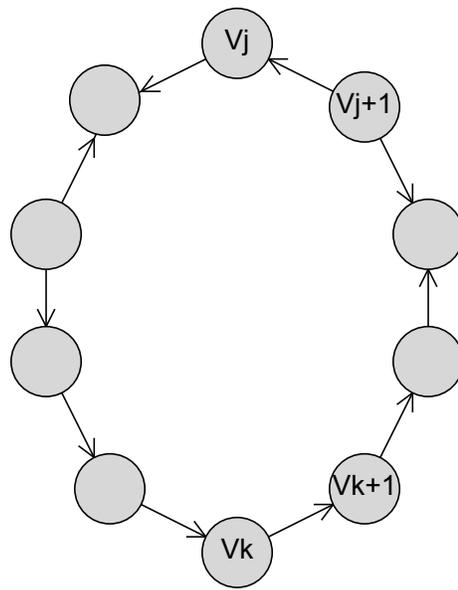


Figura 6.1: Tour inicial (algoritmo 2-opt)

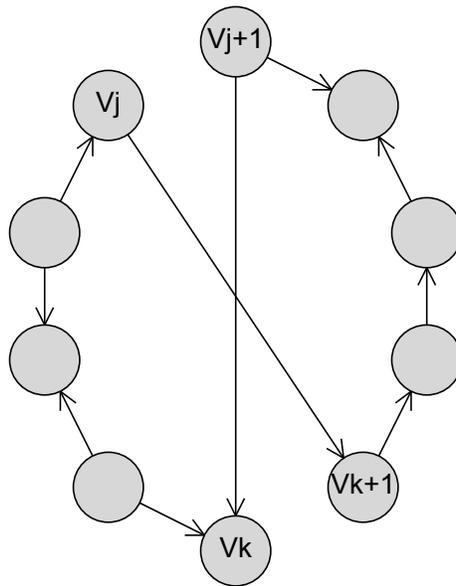


Figura 6.2: Tour final (algoritmo 2-opt)

concreto.

6.3. Sistema de información geográfica

Una de las funciones de toda organización es la distribución de bienes y/o servicios, que sitúan a la gestión logística como un elemento clave para optimizar las rutas de transporte.

La optimización de rutas comprende todas aquellas acciones que contribuyan a mejorar la función de distribución, en términos de servicio, costo y distancia de recorrido.

El uso de modelos asociados con la capacidad de análisis espacial de los Sistemas de Información Geográfica (SIG) es el nuevo enfoque de los estudios relacionados con la asignación de rutas de vehículos para la recolección de RSU [8], que permite un análisis de la red, identificando el recorrido de un vehículo a través de todos los nodos de la red, tal como el TSP.

El diseño de una red de distribución del servicio se logra incorporando nuevas tecnologías, como los Sistemas de Información Geográfica (SIG), representando una herramienta auxiliar en los problemas de transporte que se plantean de forma natural en una red.

De manera particular, en el diseño de rutas de recolección de RSU es importante localizar los puntos donde actualmente se colectan los residuos, que corresponden a las esquinas de cada calle y las distancias asociadas entre vértices, que se estiman por medio de las herramientas de Google Maps, ambos elementos tienen dependencia geográfica y afectan significativamente la planeación.

Los sistemas SIG funcionan como una base de datos con información geográfica asociada con el uso de coordenadas de un mapa digital (Fig 6.3), para asignar una ubicación espacial y saber su localización en la cartografía.

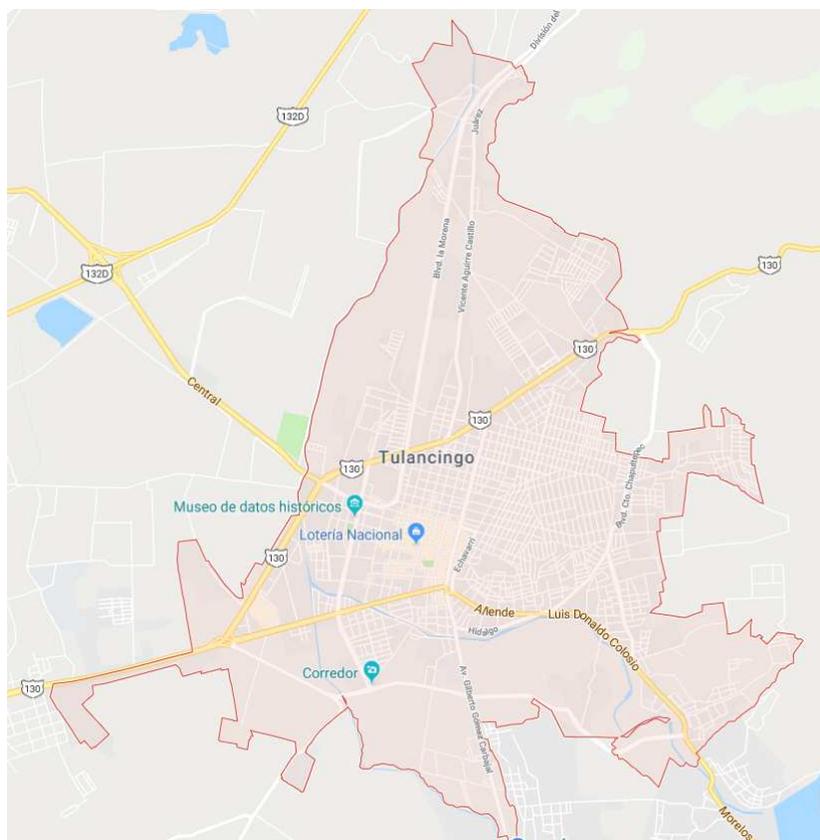


Figura 6.3: Región de Tulancingo a través de Google Maps.

El modelo de información soportado por el sistema, consiste en dividir el área de estudio en una malla regular de celdas, donde cada celda contiene un valor y una posición geográfica. Cada valor contenido en la celda corresponde a alguna de las variables de interés en el estudio que son coordenadas en el mapa para asignar una ubicación.

Un marco para definir ubicaciones de una zona real es el sistema de coordenadas de latitud-longitud además del sistema de coordenadas geográficas, con ambas condiciones es posible superponer capas de datos SIG sobre la superficie de la tierra. Al registrar descripciones detalladas de estas propiedades para cada SIG los equipos pueden proyectar y transformar las ubicaciones geográficas en cualquier sistema de coordenadas adecuado, por lo que es posible combinar información de múltiples capas.

Un ejemplo de la ruta nocturna se muestra en la Figura 6.3 donde se encuentra la dirección correspondiente de cualquier punto en el mapa a partir de coordenadas decimales geográficas de latitud y longitud. La posición nortesur de un punto está dada por su latitud, mientras que su longitud brinda información de la posición este-oeste y el signo negativo en la longitud indica que la coordenada está al oeste del meridiano de Greenwich.

Con la ayuda del Sistema de Información Geográfica (SIG) y a través de herramientas de VBA (Visual Basic para aplicaciones) de Excel, se procede a estimar las distancias por medio de las herramientas de Google Maps. En la Tabla 6.4, que tiene la forma de una matriz no dirigida, se presenta un extracto de la información de dichas distancias, las cuales se calculan considerando el sentido de las calles, por lo que, en general tendremos que $d(i, j) \neq d(j, i)$.

Para la implementación de los Algoritmos 6.1 y 6.2 se consideraron 72 puntos de recolección (nodos), para el área de estudio es de, aproximadamente, 83.48 km (obtenida a partir del SIG de Google Maps). El vehículo asignado a esta zona, recorre los nodos de acuerdo a la Figura 3.8.

Con la implementación de los algoritmos 6.1 y 6.2 se obtiene una ruta cuya

Ruta nocturna	Latitud	Longitud
Nodo 1	20,0811449	-98,3813775
Nodo 2	20,0825557	-98,3816028
Nodo 3	20,0832006	-98,3826435
Nodo 4	20,088148	-98,3794355
Nodo 5	20,0874427	-98,3779979
Nodo 6	20,0870195	-98,3771396
Nodo 7	20,0865862	-98,3764207
Nodo 8	20,0857499	-98,3766782
Nodo 9	20,084712	-98,3769572
Nodo 10	20,0843594	-98,3761632

Tabla 6.3: Coordenadas geográficas de ruta nocturna (latitud-longitud).

longitud es de, aproximadamente, 39.09 km, y los nodos se recorren como se muestra en las Figuras 6.4-6.7. Nótese, que al ser una ruta más corta, se produce un ahorro de recursos de alrededor del 46 %, como se muestra en la Tabla 6.5.

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	...
Nodo 1	0	1190	1361	1448	1634	1729	1847	...
Nodo 2	2114	0	171	258	444	539	661	...
Nodo 3	2481	367	0	87	273	368	491	...
Nodo 4	2683	847	480	0	186	281	412	...
Nodo 5	2754	640	810	382	0	95	226	...
Nodo 6	2659	545	715	287	473	0	131	...
Nodo 7	3423	812	983	555	741	268	0	...
Nodo 8	3306	1149	1320	844	1030	1125	815	...
Nodo 9	3154	1040	1256	783	968	495	627	...
Nodo 10	3099	985	1201	728	914	440	572	...
Nodo 11	3099	985	1201	728	914	440	572	...
Nodo 12	2997	882	1098	625	811	338	469	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 6.4: Matriz de distancias entre nodos (extracto).

	Distancia (km)	% mejora
Real	84.32	
Propuesta (por el algoritmo)	39.09	46.35

Tabla 6.5: Contraste de la distancia entre las rutas.

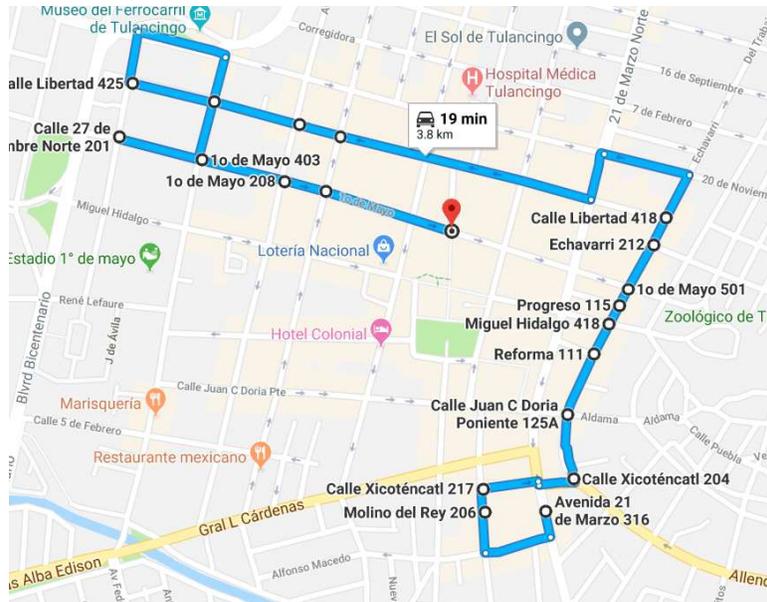


Figura 6.6: Optimización de la ruta, Parte 3.

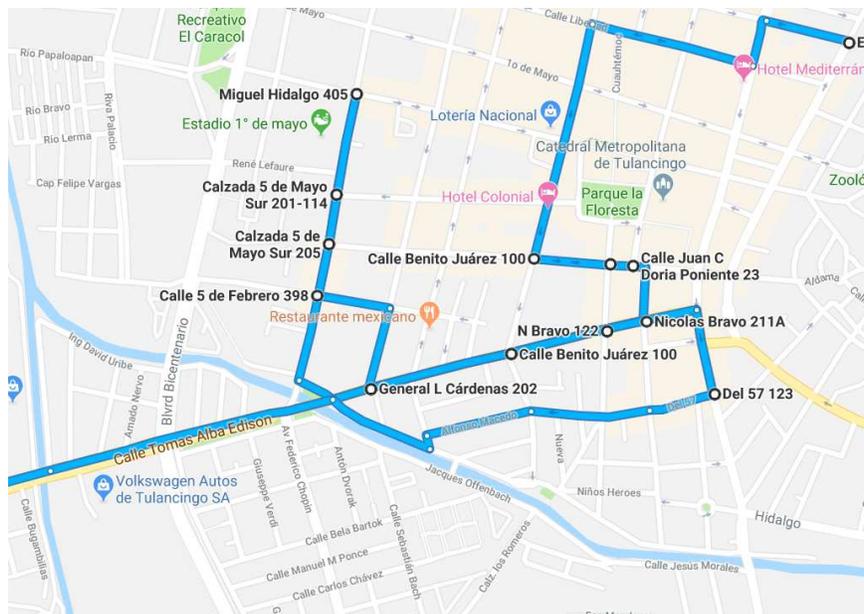


Figura 6.7: Optimización de la ruta, Parte 4.

Capítulo 7

Conclusiones

Se atendió a la mejora de la ruta de recolección de la zona centro y la reducción del tiempo de recolección y los costos de operación que junto con la implementación pronostica un ahorro económico significativo del 46.35 %, a la gestión municipal actual, como son desgaste de los vehículos recolectores, ahorro en combustible, entre otros.

En el proceso se utilizaron métodos heurísticos que proporcionaron resultados alentadores en el tiempo de computo algorítmico. Sin embargo, en este estudio no se ha incluido todas las rutas que cubren los vehículos del municipio, se encuentran rutas adicionales cuyo recorrido requiere del uso óptimo de recursos.

En este trabajo, identificamos la medida en que un programa de optimización de una de las rutas impactó significativamente en los costos de operación y en la mejora del servicio al cliente relacionados con la recolección de RSU.

Identificamos que en todas las rutas, la participación de este programa de optimización para el recorrido en el manejo de RSU estará asociada con au-

mentos sustanciales de mejora en el medio ambiente, en la salud pública y en los costos de transporte. Estos aciertos extienden los de S. Lin, B. W. Kernighan en An effective heuristic algorithm for the Traveling-Salesman Problem, Operations Research, lo que confirma que un análisis prolongado a toda la flota de transporte en la recolección de residuos tiende a producir mejoras efectivas que cuando el análisis se realiza en una sola ruta de recolección (S. Lin, B. W. Kernighan, Vol. 21, No. 2, 498-516, 1973).

Más notablemente, este es el primer estudio que se propone a la Dirección de Limpias para investigar la efectividad de las actividades diarias del servicio de limpias con la cobertura y calidad requerida en la totalidad de las colonias del municipio.

Nuestros resultados proporcionan convincente evidencia de participación a largo plazo con la totalidad de las rutas y sugerir que este enfoque parece ser efectivo dada la estructura dinámica del sistema de recolección, asegurando la disminución del número total de paradas de colecta.

Se sugiere que el trabajo debe incluir un seguimiento diseñado para evaluar si la mejora se mantiene a largo plazo que pasó de una distancia real de 84.32 % a una propuesta (por el algoritmo) de 39.09 %, siendo este tal vez el mayor beneficio por la mejora del sistema de recolección.

Como trabajo futuro se implementarán estas herramientas para el análisis de toda la flota de vehículos con que dispone el municipio, y se considerará de forma adicional la capacidad de cada vehículo de la flota.

Apéndice A

Sistema de ecuaciones

Una alternativa de representación y solución de modelos de PL lo constituye el método gráfico, trazando en el plano los ejes x_1, x_2 de R^2 , sobre el que se representan las inecuaciones:

$$ax + by \leq c$$

$$ax + by \geq c$$

Cada desigualdad del sistema de restricciones cumple con un conjunto de puntos que delimita un semiplano determinado por la recta $ax + by = c$. Siendo también los puntos de la recta soluciones de la inecuación, generando regiones correspondientes a cada una de las restricciones y eligiendo la intersección de todos los semiplanos que satisfacen por separado cada una de ellas y que en relación a la teoría de conjuntos esta intersección corresponde a la *región factible*, donde cualquier punto en ella es un candidato a ser solución del problema. Dejando a un lado la región factible, ahora se identifica en que dirección crece la función $Z(x)$, dando distintos valores con lo que se conoce

la dirección de mejora de la función objetivo, desplazándose hasta quedar con el último punto de la región de factibilidad, presentando así la solución del sistema.

Ejemplo 10 *Resuelva, utilizando el método gráfico, los siguientes problemas de programación lineal*

i)

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & \min 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_i \geq 0, i = \overline{1,2}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para este problema ilustramos la geometría de (P_1) descrita en la Figura A.1

ii)

$$\begin{aligned} (P_2) \quad & \max 2x + y \\ \text{s.a} \quad & 2x + y \leq 10 \\ & x + y \leq 8 \\ & x \leq 4 \\ & x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{aligned}$$

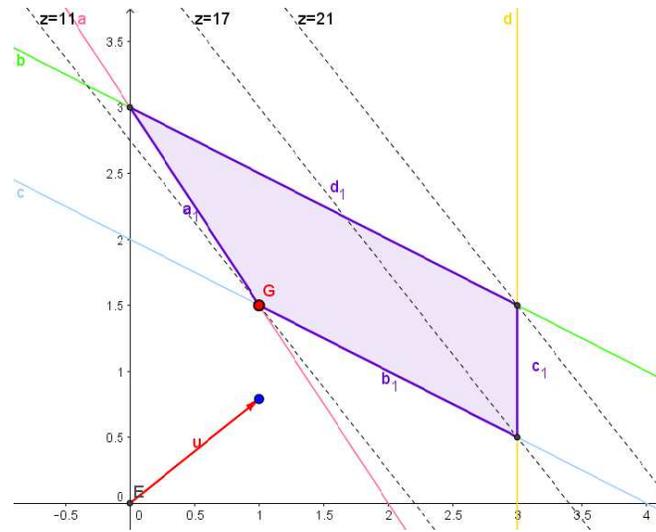


Figura A.1: Gráfica del modelo consistente, solución única.

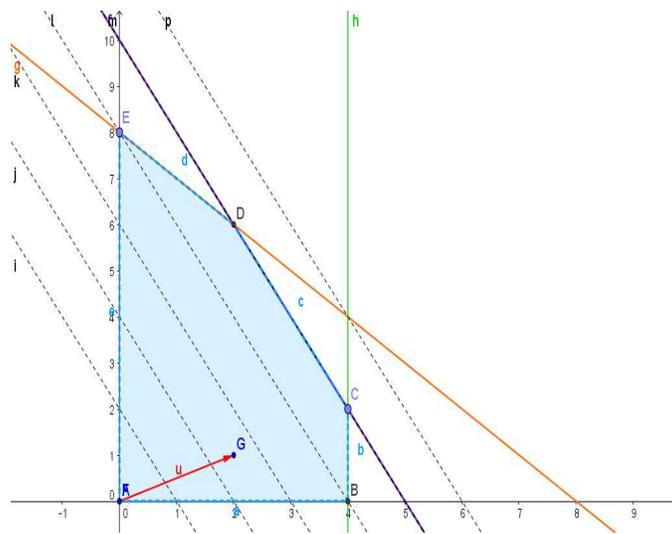


Figura A.2: Gráfica del modelo consistente, múltiples soluciones.

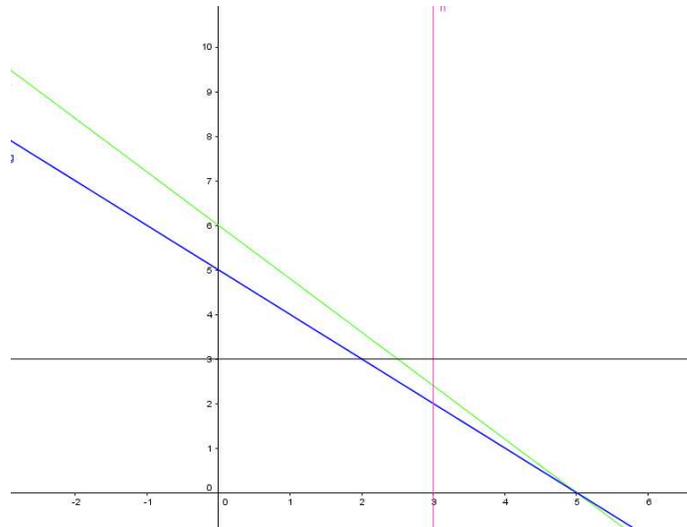


Figura A.3: Gráfica de modelo inconsistente.

iii)

$$\begin{aligned}
 (P_3) \quad & \min x_1 + x_2 \\
 \text{s. a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 2},
 \end{aligned}$$

A.1. Características de las soluciones

La representación en el plano de un sistema de programación lineal es a través de rectas que resultan de convertir las restricciones de desigualdad en ecuaciones, donde la región factible queda determinada por la intersección de los semiplanos que definen las restricciones.

Un conjunto de valores x es una *solución del problema* si cumple el sistema

de ecuaciones $Ax = b$.

Un conjunto de valores x es una *solución factible del problema* si cumple el sistema de ecuaciones $Ax = b$ y cumple que $x \geq 0$, es decir con la condición de no negatividad.

Una solución $x^* \in F$ es *óptima* si para cualquier $x \in F$, se tiene $f(x^*) \leq f(x)$, si el problema (P) es en el sentido de minimización, ($f(x^*) \geq f(x)$, si el problema (P) es en el sentido de maximización).

Algunos problemas de planificación de actividades requieren la optimización de funciones que se definen como el máximo o el mínimo de cierto número de aplicaciones lineales. Cuando se genera la ecuación de una línea recta para cada restricción en el plano se evalúan los puntos que cumplan con la inecuación y el espacio en el que se satisfacen todas las restricciones representa un punto factible.

La solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo. Si es un problema de minimización la solución óptima es el primer punto factible que toque la función Z y por el contrario si es un problema de maximización, será entonces el último de los puntos factibles que toque la función Z .

Definición 11 *Se llama solución factible de un problema lineal a cualquier vector x que cumpla todas sus ecuaciones e inecuaciones. La región factible de un problema lineal es el conjunto de todas sus soluciones [31].*

Resolver un problema lineal donde se minimiza una función lineal no consiste en encontrar cualquier solución del problema, sino una con el menor costo posible, y que se llama *solución óptima*.

Cuando la función objetivo del problema consiste en maximizar una función lineal entonces, en lugar de hablar de *costo*, se suele hablar de *beneficio*, y una solución óptima es aquella que tiene su beneficio lo mayor posible.

Apéndice B

Presencia de subtours

Sin embargo, esas dos restricciones no serán suficientes para evitar un subtour, por lo que se deben agregar restricciones que los eviten (Fig 8).

Por lo que, en 1954 Dantzing, Fulkerson y Johnson establecen la restricción de eliminación de subtours a través de la siguiente expresión:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 ; \forall S$$

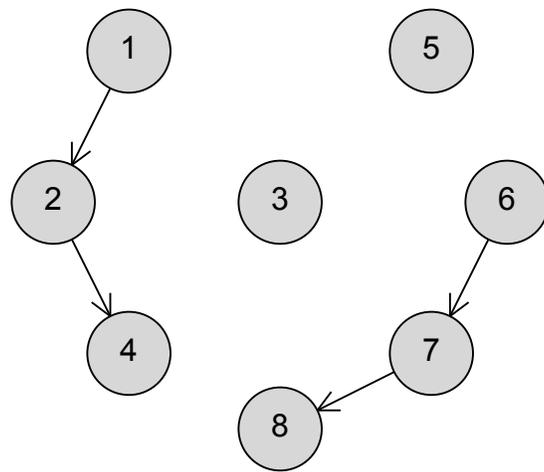
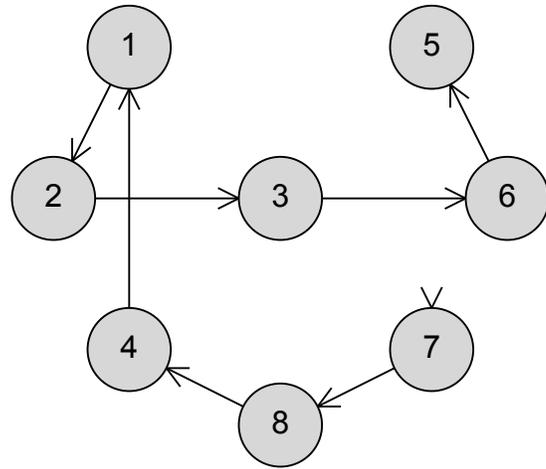
Lo que genera 2^n restricciones

$$2 \leq |S| \leq 4$$

Donde, el número cardinal indica la cantidad de elementos de un conjunto, que se simboliza mediante $|S|$.

Dado un conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se tiene el subtour para $|S| = 4$ como:

a₁) $S = \{1, 2, 3, 4\}$



$$\mathbf{a}_2) S = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$\mathbf{a}_3) S = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$\mathbf{a}_4) S = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{a}_5) S = \{2, 3, 4, 5\}$$

Analizando el primer subtour,

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_{12} = 1$$

$$x_{23} = 1$$

$$x_{34} = 1$$

Para el subtour $|S| = 3$

$$S = \{1, 2, 3\}, \quad S = \{1, 4, 5\},$$

$$S = \{1, 2, 4\}, \quad S = \{2, 3, 4\},$$

$$S = \{1, 2, 5\}, \quad S = \{2, 3, 5\},$$

$$S = \{1, 3, 4\}, \quad S = \{2, 4, 5\},$$

$$S = \{1, 3, 5\}, \quad S = \{3, 4, 5\}.$$

Para el subtour $|S| = 2$

$$S = \{1, 2\}, \quad S = \{2, 4\},$$

$$S = \{1, 3\}, \quad S = \{2, 5\},$$

$$S = \{1, 4\}, \quad S = \{3, 5\},$$

$$S = \{1, 5\}, \quad S = \{3, 4\},$$

$$S = \{2, 3\}, \quad S = \{3, 5\}.$$

Así, en el subtour indicado la cardinalidad es

$$|S| = 4$$

Por lo que, la sumatoria se representa por:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} = 4$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} = x_{12} + x_{23} + x_{34}$$

La forma de hacer algunas combinaciones con el subtour $|S| = 4$ y generar subconjuntos (sin ordenar) de k elementos, contenidos en un conjunto de n se establece como:

$$C \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Las maneras posibles de esas combinaciones se muestran así:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq V$$

$$S = \{1, 2, 3, 5\} \subseteq V$$

⋮

$$S = \{5, 4, 3, 2\} \subseteq V$$

Apéndice C

Codificación MATLAB

C.1. Vecino más próximo

```
%-----  
-----function [p,L] = exchange2(p,D)  
%EXCHANGE2 Improve tour p by 2-opt heuristics (pairwise exchange of  
edges).% The basic operation is to exchange the edge pair (ab,cd)  
with the pair  
% (ac,bd). The algorithm examines all possible edge pairs in the tour  
and  
% applies the best exchange. This procedure continues as long as the  
% tour length decreases. The resulting tour is called 2-optimal.  
n = numel(p);  
zmin = -1;  
% Iterate until the tour is 2-optimal  
while zmin < 0  
    zmin = 0;  
    i = 0;
```

```

b = p(n);
% Loop over all edge pairs (ab,cd)
while i < n-2
a = b;
i = i+1;
b = p(i);
Dab = D(a,b);
j = i+1;
d = p(j);
while j < n
c = d;
j = j+1;
d = p(j);
% Tour length diff z
% Note: a == d will occur and give z = 0
z = (D(a,c) - D(c,d)) + D(b,d) - Dab;
% Keep best exchange
if z < zmin
% a
% b
% c
% d
zmin = z;
imin = i;
jmin = j;

```

```

end
end
end
% disp('Cambios finales')
% a
% b
% c
% d
% disp('p inicial')
% p
% Apply exchange
if zmin < 0
    p(imin:jmin-1) = p(jmin-1:-1:imin);
% disp('p final, se encontraron mejoras en')
% i
% j
% zmin
% p
end
end
% Tour length
q = double(p);
ind = sub2ind([n,n],q,[q(2:n),q(1)]);
L = sum(D(ind));

```

C.2. TSP asimétrico-simétrico

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%TRANSFORMAMOS LA MATRIZ ORIGINAL ASIMÉTRICA EN UNA MATRIZ SIM
ÉTRICA, DEACUERDO A LA ESTRATEGIA QUE SE PRESENTA EN EL ARTÍCULO
"ON SYMMETRIC TSP:%TRANSFORMATION TO SYMETRIC TSP AND PERFORMANCE
BOUND", DE
%RATNESH KUMAR Y HAOMIN LI%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;
clear;
Daux= [20000 1.3 1.4 1.5 1.5 1.5 1.6 1.6 1.6 1.6
1.7 20000 0.1 0.14 0.2 0.17 0.25 0.3 0.3 0.3
1.8 0.045 20000 0.084 0.14 0.11 0.2 0.26 0.25 0.27
1.8 0.2 0.3 20000 0.059 0.11 0.19 0.18 0.17 0.19
1.9 0.19 0.094 0.05 20000 0.15 0.25 0.13 0.12 0.13
1.9 0.17 0.74 0.12 0.17 20000 0.081 0.29 0.28 0.3
1.9 0.25 0.16 0.2 0.25 0.094 20000 0.35 0.35 0.4
2 0.3 0.21 0.17 0.12 0.28 0.35 20000 0.23 0.25
2 0.7 0.2 0.16 0.11 0.27 0.4 0.23 20000 0.017
2 0.3 0.22 0.18 0.13 0.29 0.4 0.25 0.023 20000
];

%CALCULAMOS DMIN Y DMAX COMO APARECE EN EL ARTÍCULO
[n,m] = size(D);
%MODIFICAMOS LA MATRIZ DE DISTANCIAS CON EL FIN DE QUE EL PRIMER
NODO
```

```

%(INICIA LA RUTA DESDE LA ESTACION DE BOMBEROS) SE
%CONECTE UNICAMENTE CON EL NODO M´AS CERCANO
[D1min,D1pos] = min(D(1,:));
D(1,:) = 20000;
D(1,D1pos) = D1min;
%MODIFICAMOS DE TAL MANERA QUE SEA M´AS LARGO IR DE CUALQUIER
NODO HASTA EL PRIMER%NODO
D(1:1:n-1,1) = 20000;
%IR DESDE EL ´ULTIMO NODO HASTA CUALQUIER OTRO NODO ES M´AS LARGO
QUE IR AL%PRIMER NODO
D(n,2:1:n) = 20000;
Dmin = D;
dmin = min(min(Dmin));
Dmax = D.*(ones(n)-eye(n));
dmax = max(max(Dmax));
epsilon = 0.01; %1/100
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i == j
            Dprim(i,j) = 0;
        elseif (4*dmin-3*dmax)>0
            Dprim(i,j) = D(i,j);
        else
            Dprim(i,j) = D(i,j)+(3*dmax-4*dmin+epsilon);
        end
    end
end

```

```

end
end
Dinf = inf*ones(n);
%ESTA ES LA MATRIZ SIMÉTRICA QUE SE UTILIZA PARA TRABAJAR CON EL
TSP%UTILIZANDO LAS ESTRATEGIAS QUE YA SE MENCIONARON
Dbar = [Dinf,Dprim';Dprim,Dinf];
[np,mp] = size(Dbar);
%AHORA EJECUTAMOS TSPSEARCH
[p,L] = tspsearch(Dbar,np);
%eliminamos todos los nodos artificiales
k = 1;
for i=1:np
    if mod(i,2) == 1
        pshort(k) = p(i);
        k = k+1;
    end
end
%y calculamos las distancias reales cortas
q = double(pshort);
ind = sub2ind([n,n],q,[q(2:n),q(1)]);
Lshort = sum(D(ind));
pshort
Lshort
Coordenadas = xlsread('CoorR5_10NODOS.xlsx');
tspplot(pshort,Lshort,Coordenadas,1)

```

Bibliografía

- [1] A.C. Espinal, J.C. Flórez, J.S. López, *Solución de problemas de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad usando la teoría de grafos*, Revista Avances en Sistemas e Informática, Vol 8, Núm. 3, 2011.
- [2] A. K. Datta, *Approximate spanning cactus*, Information Processing Letters, Vol 115, pp 828-832. 2015.
- [3] A. Taha, *Investigación de Operaciones*, Editorial Pearson, novena edición. ISBN: 978-607-32-0796-6. 2012.
- [4] Argentina Granera, Valdivia V.M., *Aplicación informática KPTS*, Revista Científica de FAREM-Estelí, Núm 17. 2016.
- [5] Ayala Rodríguez A, González Butrón E., *Asignación de Rutas de Vehículos para un Sistema de Recolección de Residuos Sólidos en la Acera*, Revista de Ingeniería, Bogotá Colombia, Número 13, ISBN: 0121-4993. 2001.
- [6] Calcedo Barrero A., Wagner G., *Introducción a la Teoría de Grafos*, Primera Edición, Editorial: Elizcom. ISBN 978-958-99325-7-5. 2010.

- [7] Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión, Secretaría General, Secretaría de Servicios Parlamentarios, *Ley General para la Prevención y Gestión Integral de los Residuos*. 2015.
- [8] Chang N. B., *GIS Technology for Vehicle Routing and Scheduling in Solid Waste Collection Systems*. Journal of Environmental Engineering, Vol 123-9. 1997.
- [9] Chopra S., *Supply Chain Management Strategy, Planning and Operation*, 3ra. Edición. ISBN: 978-970-26-1192-9. 2008.
- [10] Collazos H., *La situación de la disposición final de la basura en Colombia*, Innovación y Ciencia (XVI).
- [11] Cortéz A., *Teoría de la complejidad computacional y teoría de la computabilidad*. Revista de Investigación de Sistemas e Informática, RISI, Número ?. ISSN 1815-0268. 2004
- [12] Cruz Chávez M.A., Moreno Bernal P., *Aplicación de la teoría de la complejidad en optimización combinatoria*. Dialnet, Narraciones de la Ciencia y la Tecnología. No. 20. 2014. pp. 35-42
- [13] F.J. André, *Gestión de residuos sólidos urbanos: análisis económico y políticas públicas*, Cuadernos económicos de ICE. No. 71. 2006.
- [14] Ferrer L.,Coves A.M., *Modelado del transporte de distribución mediante programación lineal entera*, Información tecnológica, Vol. 15, núm. 4, 2004.

- [15] G. Acurio, A. Rossin, *Diagnóstico de la situación del manejo de residuos sólidos municipales en América Latina y el Caribe*, Publicación conjunta del Banco Interamericano de Desarrollo y la Organización Panamericana. No. 97-107. 1997.
- [16] Goberna M.A., Jornet V., Puente R., *Optimización Lineal. Teoría, métodos y modelos*, Editorial McGraw- Hill/Interamericana de España. ISBN 84-481-4072-9. 2004.
- [17] Gobierno del Estado de Hidalgo. *Programa Estatal para la Prevención y Gestión Integral de los Residuos Sólidos Urbanos y de Manejo Especial*, 2011.
- [18] Gobierno del Estado de Hidalgo, *Programa municipal de desarrollo urbano de Tulancingo de Bravo, Hidalgo*. 2012.
- [19] Gross Jonathan, Tucker Tomas, *Topological Graph Theory*, Editorial Dover. ISBN: 978-0486417417. 2012.
- [20] Grossman Stanley, *Álgebra Lineal*, Editorial McGraw-Hill, séptima edición. ISBN: 978-607-15-0760-0
- [21] J. M. Dazza, J. R. Montoya, F. Narducci, *Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases*. EIA, No. 12, pp. 23-38. 2009.
- [22] J. Posada, *Algoritmo memético para resolver el problema de enrutamiento de vehículos con capacidad limitada*. EIA, Vol. 10, Núm. 20, pp 13-22. 2013.

- [23] K. Varón, J.P. Orejuela, P.C. Mnyoma, *Modelo Matemático para la Ubicación de Estaciones de Transferencia de Residuos Sólidos Urbanos*, EIA, Vol 12, No. 23, pp. 61-70. 2015.
- [24] L.B.Rocha, *Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución*, Ingeniería, Vol. 16, No. 2, pp. 35-55. 2011.
- [25] Maldonado C. E., *A fundamental problem in the research: P vs problems NP*, Logos, Ciencia y Tecnología, Vol 4, No. 2. 2013.
- [26] Marengo J., Larumbe F., *Optimización de la recolección de residuos en la Ciudad de Buenos Aires*, Ingeniería de Sistemas, Vol. XXIII. 2009.
- [27] Monroy Nestor, Ahumada C., *Reverse Logistics: Challenges for Industrial Engineering*, Ingeniería, No. 23. 2006.
- [28] Nettel A., *Las competencias municipales otorgadas por el artículo 115 de la Constitución y su relación con los derechos humanos y el mantenimiento y promoción de la salud pública*, IUS, Vol. 7, No. 32. 2013.
- [29] Prato Torres R., *Ruteo de vehículos desde un centro de distribución a una línea de supermercados en Barranquilla, Colombia*, INGENIARE, Universidad Libre-Barranquilla, Año 10, No. 18. 2015.
- [30] Ronald H., *Logística Administración de la cadena de suministro*, Ed. Pearson, 5a edición, ISBN 970-26-0540-7. 2004.
- [31] Salazar González, Juan José, *Programación Matemática*, Ed. Díaz De Santos. Primera edición. ISBN 84-7978-504-7. 2001.

- [32] Sancho y Cervera, J. Rosiles, *Manejo de los Residuos Sólidos Urbanos y de Manejo Especial en México*, SEDESOL 2005.
- [33] Secretaría de Desarrollo Social, Subsecretaría de Desarrollo Urbano y Vivienda Oficialía Mayor, Dirección General de Infraestructura y Equipamiento, *Manual para el diseño de rutas de recolección de residuos sólidos municipales*, Editorial Human Consultores, S.A. de C.V., México, D.F., 1997.
- [34] Albayrak M., Allahverdi N., *Development a new mutation operator to solve the Traveling Salesman Problem by aid of Genetic Algorithms*, Expert Systems with Applications Journal, 2010.
- [35] Andrea Guerrini, Pedro Carvalho, Giulia Romano, Rui Cunha Marques, Chiara Leardini, *Assessing efficiency drivers in municipal solid waste collection services through a non-parametric method*, Journal of Cleaner Production, Volume 147, Pages 431-441, ISSN 0959-6526, 2017.
- [36] D. S. Johnson, L. A. McGeoch., *The traveling salesman problem a case study in local optimization*.
- [37] Fuentes Penna, Alejandro, *Problema del agente viajero*, Boletín científico de la escuela superior de Tlahuelipan, UAEH, No. 3, Vol. 2, ISSN: 2207-49-48, 2014.
- [38] G. Dong, W. W. Guo, K. Tickle, *Solving the traveling salesman problem using cooperative genetic ant systems*, Expert Systems with Applications Journal, 2011.

- [39] Junger, M., Reinelt, G. y Rinaldi, G. *The Traveling Salesman Problem*, in Handbook in Operations Research and Management Science, Vol. 7, Ball, M.O., Magnanti, T.L., Monma, C.L. y Nemhauser, G.L. (Eds.), North-Holland, Amsterdam, 225–330, 1995.
- [40] Kris Braekers, Katrien Ramaekers, Inneke Van Nieuwenhuyse. *The vehicle routing problem: State of the art classification and review*. Computer & Industrial Engineering. Vol. 99. Pag 300-313. 2016
- [41] S. Lin, B. W. Kernighan, *An effective heuristic algorithm for the Traveling-Salesman Problem*, Operations Research, Vol. 21, No. 2, 498-516, 1973.
- [42] Mahmuda Akhtar, M.A. Hannan, R.A. Begum, Hassan Basri, Edgar Scavino, *Backtracking search algorithm in CVRP models for efficient solid waste collection and route optimization*, Waste Management, Vol. 61, pp 117-128, ISSN 0956-053X, 2017.
- [43] Martí, R., *Procedimientos metaheurísticos en optimización combinatoria*. Matematicas, Vol. 1, No 1, pp. 3-62, 2003.
- [44] Ratnesh Kumar and Haomin and Li, *On Asymmetric TSP : Transformation to Symmetric TSP and Performance Bound*, Proceedings, 2007.