Elementos para la aplicación de un control de inventarios mediante procesos de decisión de Markov

Erika Hernández Vargas

Universidad Politécnica de Tulancingo

Índice general

Índice de figuras

Agradecimientos

Capítulo 1

Introducción

Una de las principales situaciones por las que pasa cada empresa u organización, para mantener o elevar su competitividad, ante la constante demanda en los márgenes de calidad, son las pérdidas de dinero en los distintos departamentos con los que se cuenta y que evitan sustentar y mantener un óptimo nivel.

Los inventarios en general constituyen un aspecto de gran importancia para la empresa y son un punto de partida para la toma de decisiones estratégicas.

La historia de los inventarios comienza desde la antigüedad, cuando los pueblos, debido a las épocas de escasez, deciden almacenar grandes cantidades de alimentos, para hacer frente a ellas. El inventario son las existencias de artículos, materiales o recursos utilizados en una empresa y son usados como herramienta principal de control, para fijar tanto las entradas y salidas de materias y/o productos, establece una relación detallada, ordenada y valorada dentro de su almacenamiento, para la búsqueda de reducción de los costos, en este sentido, la gestión de inventarios para la eficiente producción o comercialización de bienes se convierte en una herramienta para registrar las cantidades que posee la empresa, las cuales juegan un papel fundamental en la etapa de abastecimiento de la demanda, dando como resultado estados confiables en el control de materiales y productos.

Un sistema de inventarios, generalmente enfrenta grandes problemas de complejidad, tales como la gran magnitud de artículos, así como el número de variables que influyen recíprocamente en modelos matemáticos, destinados a representar con la mayor aproximación posible las complejidades del sistema. En todo sistema de inventarios, se pueden identificar las siguientes componentes: demandas, costos y reabastecimientos. Por lo general, las demandas son estocásticas y de ahí surge el problema de control de inventarios.

Los costos de toda empresa son parte fundamental de su rentabilidad. Es decir, se dice que una empresa es rentable cuando genera suficiente utilidad o beneficio, esto es, cuando sus ingresos son mayores que sus gastos y la diferencia entre ellos es considerada como aceptable. En cuanto a los costos de los inventarios, se refieren a los gastos en los que incurre la empresa para mantener un control de inventarios. Uno de los prerrequisitos principales es la comprensión de los costos relevantes. Las estructuras de costos de los inventarios incorporan los siguientes tres más significativos: costo por mantener un inventario, costo por reabastecimiento y costo por escasez de mercancia. El problema de control de un inventario consiste en establecer una política de reabastecimiento que minimice el costo total asociado a su manejo.

Dentro del sistema de inventarios existen dos decisiones que se pueden tomar en cuenta al tratar de controlar un inventario, las cuales son:

- cuándo reabastecer el inventario
- qué cantidad de mercancia ordenar para el reabastecimiento.

La planificación basada en decisiones ha permitido solucionar problemas del mundo real, incrementado su desarrollo debido, en gran parte, al éxito obtenido de los procesos de decisión de Markov en problemas de control de procesos, análisis de decisiones y economía, entre otros [6]. Desde los noventa se ha visto un notable resurgimiento en la investigación aplicada y teórica sobre los procesos de decisión de Markov. Partiendo de las raíces de investigación de operaciones en la década de los 50's, los modelos de procesos de decisión de Markov han ganado reconocimiento en campos tan diversos como la ecología, la economía y la ingeniería [11]. Un proceso de decisión de Markov requiere de un modelo conocido como modelo de control de Markov, cuyas componentes permiten caracterizar su desarrollo en el transcurso del tiempo. La dinámica del proceso puede ser influenciada por medio de la aplicación de acciones, decisiones o controles cada periodo de tiempo. A la sucesión de acciones se le conoce como política, una forma de evaluar su calidad es mediante una función objetivo o criterio de rendimiento. Entonces, el problema de control óptimo consiste en determinar una política que optimice el criterio de rendimiento.

La teoría de procesos de decisión o control de Markov permite modelar a los sistemas de inventarios.

En [1] consideran un sistema de inventario de revisión periódica de un solo producto para un minorista que ha adoptado una estrategia de abastecimiento doble haciendo pedidos a un proveedor confiable y/o a un proveedor no confiable que ofrece un mejor precio, para hacer frente a posibles interrupciones en el proceso de suministro, el problema de control de inventario se modela como un proceso de decisión de Markov en tiempo discreto y se determina la estructura de la política de ordenamiento óptima bajo varios escenarios de costos y diferentes niveles de confiabilidad del proveedor. Por otro lado, en [17] se investigó el sistema de inventario de etapas múltiples discreto, donde en cada etapa se toma una decisión de control y se planteó como un modelo de control de Markov con depósito limitado, así mismo, se indujo un algoritmo de Programación Dinámica para determinar las acciones de control de inventario, los resultados demostraron que la acción de reorden del sistema de inventario de etapas múltiples puede garantizar la demanda y también permite que el costo total esperado (costo por mantener un inventario, costo por reabastecimiento y costo por escasez de mercancia) sea mínimo de acuerdo con el modelo anterior.

En este trabajo se considera un modelo de control de inventarios propuesto dentro de la teoría de procesos de decisión de Markov. Los conjuntos de estados y acciones se consideran finitos. Para este modelo la ley de transición queda determinada mediante una ecuación en diferencias la cual involucra la distribución de probabilidad de la demanda y la función de costo por periodo se plantea en terminos de los costos ya mencionados (reabastecimiento, mantenimiento de inventario y escasez). En el problema de control de inventarios se considera como función de rendimiento el costo total esperado con horizonte finito. En la aplicación real del modelo mencionado, se requiere de la distribución de probabilidad de la demanda, la cual difícilmente es proporcionada al momento de iniciar el control y tendría que ser estimada. De la misma manera, los costos asociados al modelo deben ser determinados para la aplicación del modelo.

El costo total del invetario son los costos relacionados con el reabastecimiento, mantenimiento de inventario y escasez durante un determinado periodo de tiempo. La evaluación de los costos de inventario ayuda a las compañías a determinar cuánto beneficio pueden obtener del inventario, de qué modo pueden reducir los costos, dónde se pueden realizar cambios, qué proveedores o qué artículos se deben elegir, cómo se debe asignar el capital, etc. La determinación de cada uno de ellos puede variar de acuerdo al sector comercial en el que se encuentra la empresa, el verdadero costo de inventario implica muchos elementos y va más allá del costo de bienes vendidos o de materias primas, enseguida vienen los gastos de gestión y de mantenimiento, además de agregar a eso los seguros, los intereses, la merma, etc. La lista es bastante larga. En este trabajo, se presenta una clasificación clara de estos costos para ayudar a la determinación de los mismos. Se dan a conocer algunos elementos generales, sin embargo, cada uno de estos costos depende directamente del sector comercial, de las políticas y de las decisiones de gestión de la empresa.

Otro de los objetivos de este trabajo es proponer, con bases teóricas, una metodología que permita estimar la distribución de probabilidad de la demanda. Se propone estimar dicha distribución a partir de observaciones de la demanda, mediante la función de distribución empírica. Así mismo, se considera el caso en donde incluso se desconoce el horizonte de planeación. Para tal caso, se sugiere implementar un procedimiento de horizonte rodante para la obtención de la acción de control en cada época de decisión, teniendo como ventaja el poder mejorar la estimación de la distribución de la demanda al agregar cada vez el dato observado de la demanda en la etapa anterior.

Para mostrar ejemplos numéricos, se ha elaborado un programa en Matlab, que calcula la distribución de la demanda y resuelve mediante programación dinámica el problema de control con horizonte de planeación finito (cuando se conoce el horizonte de planeación con certeza) o los problemas de control de inventarios que requiere el procedimiento de horizonte rodante (cuando no se tenga conocimiento sobre el horizonte de planeación).

Específicamente, los objetivos del trabajo de tesis son:

- Estudiar el modelo de control de inventarios mediante la teoría de procesos de decisión de Markov (Programación Dinámica).
- Implementar computacionalmente la solución óptima del problema de control de inventarios.
- Proporcionar información necesaria sobre los elementos que deben considerarse para la determinación de los costos de reabastecimiento, mantenimiento de inventario y escasez en un sistema de control de inventarios.
- Proponer, con bases teóricas, una metodología para la determinación de la distribución de probabilidad de la demanda.
- Usar un procedimiento de horizonte rodante para la obtención de la acción de control en cada época de decisión.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2, se proporciona una breve historia de los inventarios, así como también la descripción de los componentes del sistema de inventarios y se presentan algunos modelos de control de inventarios utilizados comunmente en las empresas. En el Capítulo 3, se muestra la teoría de procesos de decisión de Markov y la técnica de Programación Dinámica. En el Capítulo 4, se describe el modelo de control de inventarios como un modelo de decisión de Markov y algunas variantes de dicho modelo. En el Capítulo 5, se proposionan los elementos para poder llevar a cabo un control de inventarios en un caso real, esto es, una metodología para la estimación de la distribución de probabilidad de la demanda, información para la determinación de los costos e implementación de un horizonte rodante y se muestra un par de ejemplos numéricos resueltos en un programa realizado en Matlab. Finalmente, se dan las conclusiones sobre el tema investigado.

Capítulo 2

Inventarios

Todas las empresas mantienen un suministro de inventario para cubrir la variación de la demanda en el tiempo y tener costos bajos, al tomar cualquier decisión que afecte el tamaño del inventario, es necesario considerar los costos. En este capítulo se da una breve historia sobre los inventarios, además de que se explica la importancia del control de un sistema de inventario así como sus componentes. Usualmente en las empresas controlan sus inventarios mediante modelos clásicos que se basan solo en promedios de la demanda o modelos donde utilizan criterios simples de probabilidad, esto debido a que son faciles de manejar y no tienen gran costo de aplicación, en este capítulo se mencionan algunos de estos modelos.

2.1. Historia e importancia de los inventarios

La historia de los inventarios tiene sus origenes desde la antigüedad, los egipcios y demás pueblos antiguos debido a las épocas de escasez, decidieron almacenar grandes cantidades de alimentos, para hacer frente a ellas; así se ideó un mecanismo de control para su reparto. Es así como surgen los inventarios, como una forma de hacer frente a los periodos de escasez, que aseguraban la subsistencia de la vida y el desarrollo de sus actividades normales.

El inventario ha existido desde que el hombre vio la necesidad de organizar sus bienes, es decir, saber que pertenencias tiene de acuerdo a los diferentes roles que esta persona desempeña: tendero, fabricante, importador, exportador, etc.

El inventario es utilizado como forma de organización básica que conlleva a una mejor economía, porque se sabe con qué se cuenta y qué debe ser repuesto. Desde la segunda guerra mundial hasta el día de hoy, se han desencadenado unos de los desarrollos más estimulantes que jamás tuvo la administración de los negocios y de las industrias. Frederick W. Taylor y otros ingenieros industriales contemporáneos se convirtieron en los pioneros del pensamiento filosófico de la administración científica. En los últimos años los métodos estadísticos y matemáticos tuvieron un mayor desarrollo y una creciente aplicación en las decisiones sobre las finanzas, producción, ventas, inventarios y otras medidas de administración. El control de inventarios es una de las actividades más complejas, ya que hay que enfrentarse a intereses y consideraciones en conflicto por las múltiples incertidumbres que encierra. Su planeación y ejecución implican la participación activa de segmentos de la organización, como ventas, finanzas, compras, producción y contabilidad. [10].

Los inventarios son los bienes tangibles que se tiene para la venta en el curso ordinario del negocio o para ser consumidos en la producción de bienes o servicos para su porterior comercialización. Los inventarios pueden clasificarse en:

- Inventario de Materia Prima (MP)
- Inventarios de Producto en Proceso (PP)
- Inventario de Producto Terminado (PT)

La base de toda empresa comercial es la compra y venta de bienes o servicios, de aquí la importancia del manejo de inventarios por parte de la misma, este manejo permitirá a la empresa matener el control oportuno, además de poder conocer al final del periodo un estado confiable de la situación económica de la empresa [7].

2.2. El sistema de inventario y sus elementos

El control de inventarios tiene dos objetivos:

- Económico: de forma general se requiere minimizar la inversión del inventario, al reducir el inventario se minimiza la inversión pero se corre el riesgo de no poder satisfacer la demanda y a grandes cantidades de inventario se incrementa la inversión.
- Seguridad: se debe de asegurar que la empresa cuente con inventario suficiente para hacer frente a la demanda, protegiendo a la empresa de elevados costos por faltantes.

En toda empresa los inventarios deberían proveer los materiales necesarios en el momento indicado, como consecuencia, el sistema de inventarios deberá administrar la inversión del inventario. Un *sistema de inventario* es un conjunto de políticas y controles, utilizados para el monitoreo de la cantidad de artículos disponibles, la determinación de los niveles que se deben mantener, el momento de reponer la existencia de artículos y el tamaño que deben tener los pedidos.

Los tipos de inventario varían del sector manufacturero al sector de servicios, es decir, toda empresa que desarrolle actividades de transformación de materias primas pertenecerá a la industria manufacturera, entre ellas encontramos a las empresas de productos: alimenticios, producción textil, fabricación de maquinaria y equipos electrónicos, producción de papel, de productos químicos y fármacos, utensilios metálicos, de plástico, de madera y otros bienes intermedios, en cuanto al sector de servicios, pertenecen todas las unidades económicas que ofrecen algún servicio, como hospitales, escuelas, peluquerías, clubes deportivos, bancos, restaurantes, hoteles, centros de espectáculos, empresas de transportes y de comunicaciones, entre muchas otras.

Los inventarios estan relacionados con la compra, producción y comercialización. La mayoría de las organizaciones pueden reducir sus inventarios sin aumentar los costos mediante el uso de herramientas de control de inventario eficientes. [10]. Cuando se va a realizar un estudio relacionado con los inventarios usualmente se emplea el enfoque de sistema. Los sistemas de inventarios estan formados por un conjunto de elementos que los caracterizan y que están relacionados principalmente con:

- La demanda.
- Los artículos.
- Los tiempos de revisión y horizonte.
- Los costos.

Cualquiera situación que sea objeto de estudio sobre los inventarios, deberá tener presente dichos elementos. Además, cada uno de estos elementos posee atributos que los caracterizan y que es necesario tomar en cuenta al desarrollar modelos de inventarios.

2.2.1. Demanda

La demanda, también denominada consumo, es el factor más importante en el control de inventarios. La principal finalidad de un análisis de inventarios consiste en prever lo que se ha de consumir en un tiempo futuro, con objeto de mantener existencias suficientes para las necesidades de ventas y producción, y no excederse en la inversión de inventario y en los costos de almacenamiento.

La demanda se considera como lo que ha de consumirse en cierto periodo (que puede ser anual, semestral, mensual, semanal o diario) por salidas de materiales para producción o por ventas de productos terminados. Se expresa en términos de la cantidad de unidades que disminuyen en las existencias en un lapso considerado.

Las predicciones de la demanda se basan por lo general en algún pronóstico de ventas y en datos estadísticos de consumo, son tomados de récords de ventas para productos terminados y de salidas de materiales de los almacenes.

En general, la complejidad de los modelos de inventarios depende de si la demanda es determinista o estocástica. Dentro de ambas categorías, la demanda puede variar, o no, con el tiempo. Así, un modelo de inventarios puede asumir uno de cuatro tipos:

- Determinístico y constante (estático) a través del tiempo.
- Determinístico y variable (dinámico) a través del tiempo.
- Probabilístico y estacionario a lo largo del tiempo.
- Probabilístico y no estacionario a lo largo del tiempo.

En el mundo real difícilmente se encontrará una demanda estática determinística, la representación más precisa de la demanda puede hacerse a través de distribuciones probabilistas no estacionarias [18].

2.2.2. Artículos

- **Materia prima:** Toda empresa con una actividad industrial, dispone de varios artículos y materiales conocidos como materias primas que al ser sometidas a procesos generan un artículo terminado o acabado. Podemos definir a la materia prima como aquel o aquellos artículos sometidos a un proceso de fabricación que al final se convertirá en un producto terminado. Son los productos que están esperando ser usados para una línea de producción, que deben ser modificados y transformados para convertirse en producto final.

  Las empresas que suelen contar con este tipo de inventarios son las empresas productoras, por ejemplo, fábricas de vehículos automotores, del sector de alimentos como cárnicos, pescados y mariscos, lácteos, pastelerías; empresas del sector salud, tal como técnicos en prótesis dentales, empresas de fabricación de prendas de vestir, de productos farmacéuticos, sustancias químicas, fabricación de detergentes, jabones, artículos de papel y carbón, etc.

- **Materias primas secundarias:** Las especificaciones de las materias primas secundarias varían dependiendo del tipo de industria. Un ejemplo tenemos en la industria de ensamblaje de autos, considerando el combustible para que el auto encienda e inicie la ruta de prueba que es una de las etapas del control de calidad.

- **Producto terminado:** Son productos que han cumplido su proceso de producción y se encuentran en una bodega de productos terminados y aún no han sido vendidos. Los niveles de inventario están directamente relacionados con las ventas, es decir sus niveles se dan por la demanda que tenga.

  Las empresas que podrían realizar este tipo de inventarios son: empresas distribuidoras o comercializadoras, por ejemplo, de alimentos, así como empresas del sector salud como laboratorios, farmacias, hospitales, de venta de equipo médico, dentistas y ópticas.

Dentro del sistema de inventarios se debe tomar en cuenta la forma de medición de la cantidad de los artículos, esta puede ser de manera discreta o continua.

- Discreto: Son aquellos objetos o elementos que se pueden contar, por ejemplo, lápices, tornillos, libros, automóviles,etc.

- Continuo: Es toda aquella materia prima que fluye de manera continua a través de la planta hasta lograr el producto terminado, por ejemplo, químicos, gases, combustibles, electricidad, cemento, agua potable, etc.

Nota 2.1 *En este trabajo se consideran únicamente modelos de inventarios con artículos discretos.*

2.2.3. Tiempo de revisión y horizonte

El horizonte define el tiempo sobre el cual el nivel de inventarios estará controlado, puede ser llamado "horizonte de planeación". Este horizonte puede ser finito o infinito. El objetivo final de cualquier modelo de inventarios es el de dar una respuesta a dos preguntas:

1. ¿Qué cantidad de artículos debe pedirse?

2. ¿Cuándo deben pedirse?

La respuesta a la primera pregunta se expresa en términos de lo que llamamos tamaño del pedido. Esto representa la cantidad óptima que deben ordenarse cada vez que se haga un pedido y pueden variar con el tiempo, dependiendo de la situación que se considere. La respuesta a la segunda interrogante depende del tipo de sistema de inventarios. Si el sistema requiere *"revisión periódica"* en intervalos de tiempos iguales (por ejemplo, cada semana o cada mes), el tiempo para adquirir un nuevo pedido suele coincidir con el inicio de cada intervalo de tiempo. Por otra parte, si el sistema es de tipo *"revisión continua"*, el nivel de inventario es el que indica cuando debe colocarse un nuevo pedido.

Por lo tanto, se puede expresar la solución del problema general de inventarios de la manera siguiente:

1. **Caso de la revisión periódica:** recepción de un nuevo pedido por cantidad específica en intervalos de tiempos iguales.

2. **Caso de revisión continua:** cuando el nivel de inventario llega a un punto específico se coloca un nuevo pedido.

Desde el punto de vista matemático el modelo de inventarios resulta ser más complejo a medida que aumente el horizonte de planeación del problema.

2.2.4. Costos

Las decisiones que se tomen en relación con los inventarios de la empresa, tiene consecuencia sobre el desarrollo de la misma, ya que una de ellas puede conducir a la empresa a problemas financieros por sobreinversión de inventarios o de lo contrario, a pérdidas de mercado por carecer de los mismos. Cuanto mayor sea el nivel promedio del inventario, mayor será el costo total de inversión o producción. El general, los costos en que puede incurrir una empresa a consecuencia de las decisiones para establecer los niveles de inventarios se pueden agrupar de la siguiente manera:

1. Costos por pedido o preparación.

2. Costos por adquisición de inventario.

3. Costos por mantener en inventario.

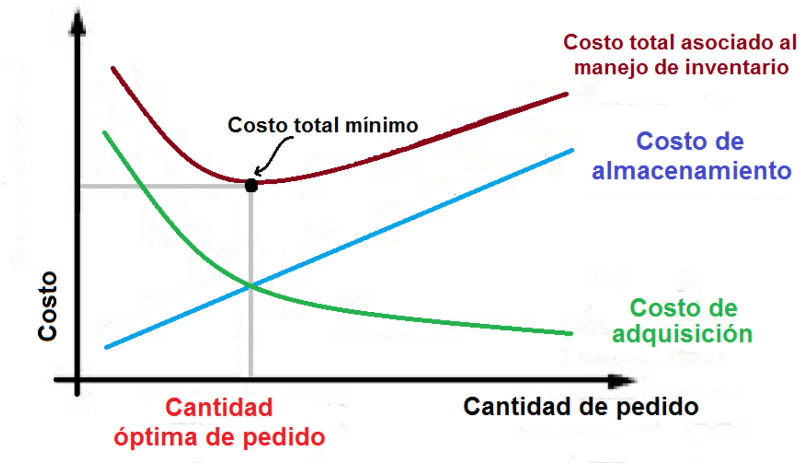

Figura 2.1: Relación entre costos asociados y cantidad de pedido

4. Costos por escasez de inventario.

Dichos costos serán descritos detalladamente en el Capítulo 5.

El problema de los inventarios es que su nivel no debe ser tan alto que represente un costo extremo al tener paralizado un capital que podría emplearse con provecho, de igual forma, un nivel bajo provocaría que la empresa produzca sobre pedido (en el caso de una empresa productiva) y una situación desfavorable por no satirfacer de inmediato las demandas de los clientes. La empresa debe determinar el nivel apropiado de inventarios que equilibra estos dos extremos, como se muestra en la Figura 2.1.

2.3. Modelos clásicos de inventarios

El problema general de inventarios parece ser sencillo, pero en realidad existen variedad de modelos que van desde el empleo del simple Cálculo (Figura 2.1) hasta refinadas aplicaciones de programación dinámica y matemática, la razón de esto es la demanda. Es difícil idear un modelo general de inventarios que tome en cuenta todas las variaciones de los sistemas reales, incluso, aún si puede ser formulado un modelo lo suficientemente general tal vez no sea posible su resolución analítica. Sin embargo, es muy fácil utilizar el criterio de la probabilidad para determinar los inventarios de seguridad. Los modelos descritos a continuación, suponen que la demanda en un periodo tiene una distribución normal con una media y una desviación estándar conocidas. Este enfoque sólo considera la probabilidad de quedarse sin inventario, no la cantidad de unidades faltantes.

2.3.1. EOQ (Economic Order Quantity)

En 1915, F. W. Harris desarrolló la conocida fórmula de la cantidad económica de la orden (EOQ, Economic Order Quantity). Después, esta fórmula obtuvo un amplio uso en la industria gracias a los esfuerzos de un consultor llamado Wilson; por lo tanto, con frecuencia esta fórmula se conoce como cantidad económica de la orden de Wilson. La cantidad económica de la orden y sus variaciones todavía se aplican ampliamente en la industria para la administración de inventarios sujetos a una demanda independiente.

El modelo de la cantidad económica de la orden se basa en los siguientes supuestos:

- La tasa de demanda es constante.
- El tiempo de espera desde la colocación de la orden del pedido hasta la entrega de la misma es constante y conocido.
- No se permite algún faltante de inventario.
- Los artículos o los materiales se ordenan o se producen en un lote.
- El costo unitario del artículo es constante y no se conceden descuentos por mayoreo.
- El costo de mantenimiento se relaciona linealmente con el nivel promedio del inventario.
- El artículo es de tipo individual, sin interacciones con otros en el inventario.

A pesar de estas suposiciones aparentemente restrictivas, el modelo de la EOQ suministra lineamientos útiles para tomar decisiones de orden, aún en situaciones de operación que divergen sustancialmente de estas suposiciones. Al elegir el tamaño del lote, existe una negociación entre la frecuencia del ordenamiento y el nivel del inventario. Los lotes pequeños conducirán a reordenamientos frecuentes, pero a un nivel promedio bajo del inventario. Si se ordenan lotes más grandes, la frecuencia del ordenamiento disminuirá, aunque se mantendrá más inventario. Esta negociación puede representarse por medio de una ecuación matemática

$$Q = \sqrt{\frac{2SD}{iC}} \tag{2.1}$$

donde:

D = tasa de la demanda, unidades por año.

S = costo por orden colocada o costo de preparación.

C = costo unitario del artículo.

i = tasa anual de mantenimiento de inventario (porcentaje).

Q = tamaño del lote (unidades).

La ecuación 2.1 es la EOQ, la cual minimiza el costo de administrar un artículo en el inventario. Aunque se minimizó el costo sobre una base anual, puede usarse cualquier unidad de tiempo siempre y cuando la tasa de la demanda y la de mantenimiento sean compatibles; por ejemplo, si la demanda se expresa sobre una base mensual, la tasa de mantenimiento también debe serlo.

A menudo, la EOQ se aplica en la manufactura para calcular los tamaños apropiados de las órdenes (de los proveedores) y los tamaños de los lotes (para producción) y en muchas cadenas de suministro de la industria de servicios. Los restaurantes usan la EOQ para estimar el tamaño de la orden para los alimentos y otros suministros; las empresas más grandes emplean la EOQ para administrar los inventarios de sus suministros de oficina y las empresas farmacéuticas que trabajan con base en órdenes postales (servicio de pago emitida por medio del servicio de correos) utilizan la EOQ para estimar los tamaños de las órdenes para el reabastecimiento de sus almacenes. Los siguientes dos sistemas de administración de inventarios se basan en el modelo de la cantidad económica de la orden.

2.3.2. Modelo de Gestión de Inventarios con base al Sistema de Revisión Continua

En un sistema de revisión continua, la posición del inventario se controla después de cada transición o en forma continua. Cuando la posición del inventario disminuye hasta un nivel predeterminado, o punto de reorden, se ordena una cantidad fija. Ya que la cantidad de la orden es fija, el tiempo entre las órdenes varía de acuerdo con la naturaleza aleatoria de la demanda. El sistema de revisión continua algunas veces se denomina sistema fijo de la cantidad de la orden, y en otras, sistema **Q**.

En la práctica, la mayoría de las veces, se tiene un tiempo de fabricación o de retraso, desde el instante en que se coloca una orden hasta que ella es realmente entregada, en consecuencia, en el modelo la política de pedidos debe especificar con claridad el punto de reordenamiento o reposición, este debe ocurrir cuando queden L unidades de tiempo previo a la entrega.

En general, esta información se puede traducir convenientemente para su implementación práctica especificando solo el nivel de inventario en que se debe volver a pedir. Esto es equivalente a observar continuamente el nivel del inventario hasta que se alcance el punto de reorden.

Con base a lo anterior podríamos resumir que el sistema de revisión continua queda determinado por los siguientes parámetros:

1. Q, que se determina como el valor de la cantidad económica de la orden a partir de la ecuación de EOQ.

2. R, que denotará al punto de reorden, se basa principalmente en la probabilidad de los faltantes de inventario.

El punto de reorden se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$R = m + s$$

donde
m es la demanda media (promedio) durante el tiempo de espera,
s es el inventario de seguridad (o inventario de amortiguación).
El inventario de seguridad puede calcularse como:

$$s = z\sigma$$

donde
z es un factor de seguridad,
σ es la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de espera.
De esta manera, se tiene:

$$R = m + z\sigma$$

Por consiguiente, el punto de reorden se establece como igual a la demanda promedio durante el tiempo de espera (m) más un número especificado (z) de las desviaciones estándar (σ) para protegerse contra faltantes de inventarios. Al decidir el valor de z, el número de desviaciones estándar, la empresa determina tanto el punto de reorden como el nivel de servicio. Un alto valor de z da como resultado un alto punto de reorden y un alto nivel de servicio.

Los valores de z provienen de la distribución normal. Este nivel de servicio representa la probabilidad de que la demanda durante el tiempo de espera quede satisfecha mediante el empleo de un inventario de seguridad. Esto es lo mismo que decir que la demanda durante el tiempo de espera caerá dentro del número especificado de desviaciones estándar (z) respecto de la media. Cuando una empresa decide cuál deberá ser el nivel de servicio, la z correspondiente dentro de la distribución normal se utiliza para calcular el punto de reorden.

2.3.3. Modelo de Gestión de Inventarios con base al Sistema de Revisión Periódica

Cuando un inventario se revisa periódicamente, significa que la revisión solo se hace en determinados momentos de tiempo; por ejemplo, semanalmente o mensualmente. Entre dos momentos de revisión, el inventario no se examina.

En los sistemas de revisión periódica, la posición del inventario se revisa con base en intervalos fijos. Cuando se ejecuta una revisión, la posición del inventario se ordena en función de un inventario fijado como meta. El nivel fijado como meta se establece para cubrir la demanda hasta la siguiente revisión periódica más el tiempo de espera para la entrega. La cantidad de la orden depende de la cuantía que sea necesaria para volver a colocar la posición del inventario en su nivel fijado como meta. Con frecuencia, el sistema de revisión periódica se denomina sistema de intervalos o periodos fijos de la orden, por conveniencia, llamado sistema **P**.

Una descripción formal del sistema **P** es la siguiente:

Debe revisarse la posición del inventario (el disponible más el ordenado) con base en intervalos periódicos fijos P. En cada revisión se ordena una cantidad igual a la diferencia entre el inventario fijado como meta T y la posición del inventario.

El inventario disponible disminuye sobre una base irregular a medida que se usa para satisfacer la demanda, hasta que se alcanza el final del intervalo periódico fijo. En ese momento se ordena una cantidad para volver a llevar la posición del inventario al nivel fijado como meta, denotada por T. La orden llega más tarde, después del tiempo de espera L y, luego, se repite el ciclo de consumo, reordenamiento y recepción de la orden.

El sistema **P** es diferente del **Q** en ciertos aspectos:

1. No tiene un punto de reorden, sino un nivel de inventario fijado como meta.

2. No tiene una cantidad económica de la orden ya que la cantidad de la orden varía de acuerdo con la demanda.

3. En el sistema **P**, el intervalo de la orden es fijo; en un sistema **Q**, una orden puede colocarse siempre que se necesite inventario.

El sistema **P** se determina a través de los parámetros, P y T. Ya que P es el tiempo entre las órdenes, se relaciona con la cantidad económica de la orden que se describe a continuación:

$$P = Q/D$$

donde

$$Q = EOQ$$

Posteriormente, al sustituir Q en la fórmula de la cantidad económica de la orden, se tiene:

$$P = \frac{Q}{D} = \frac{1}{D}\sqrt{\frac{2SD}{iC}} = \sqrt{\frac{2S}{iCD}}$$

La ecuación proporciona un intervalo de revisión aproximadamente óptimo P. Se observa que, si la demanda es altamente incierta, la aproximación de P será deficiente.

El nivel del inventario fijado como meta se establece especificando un nivel de servicio. En este caso, el nivel fijado como meta se determina a un nivel lo suficientemente alto para cubrir la demanda durante el tiempo de espera más el intervalo de revisión periódica. Este tiempo de cobertura es necesario ya que una orden no puede volverse a colocar hasta el final del siguiente intervalo de revisión y esa orden tomará el tiempo de espera conveniente para llegar. Para lograr el nivel de servicio especificado, la demanda promedio debe cubrirse a lo largo del tiempo $P + L$ y el inventario de seguridad también debe cubrir el tiempo $P+L$; por lo tanto, se obtiene

$$T = m' + s'$$

donde

T es el nivel del inventario fijado como meta,

m' es la demanda promedio a lo largo del tiempo $P + L$,

s' es el inventario de seguridad para cubrir $P + L$ unidades de tiempo.

Para el inventario de seguridad, se tiene

$$s' = z\sigma'$$

donde

z es el factor de seguridad,

σ' es la desviación estándar de la demanda a lo largo del tiempo $P + L$.

Del mismo modo que en el sistema **Q**, z refleja el nivel deseado de servicio.

En la industria, tanto los sistemas **Q** y **P**, así como las modificaciones a los mismos, se utilizan ampliamente para la administración de un inventario sujeto a una demanda independiente. Los ejemplos de los inventarios con demandas independientes están en los inventarios de los mayoristas, los minoristas, los restaurantes, los hospitales, los bienes terminados en fábricas y en los almacenes de establecimientos de mantenimiento, reparaciones y operaciones. La elección entre los sistemas **Q** y **P** no es sencilla y puede dictarse por las prácticas de la administración o la economía; no obstante, existen algunas condiciones en las cuales puede optarse por el sistema **P** o el **Q**:

1. Debe usarse el sistema **P** cuando deben colocarse o entregarse órdenes a intervalos específicos; las entregas semanales de alimentos a tiendas de abarrotes serían un ejemplo.

2. El sistema **P** debe emplearse cuando se ordenan artículos múltiples a partir del mismo proveedor y se entregan en el mismo embarque. En este caso, el proveedor prefiere consolidar los artículos en una sola orden;

Existen otros modelos y tipos de solución para un sistema de inventarios, los descritos anteriormente fueron retomados de [7] y son los más usados comunente en las empresas.

Capítulo 3

Procesos de decisión de Markov

Los procesos de decisión de Markov llamados así en honor del ruso Andrei A. Markov, estudioso de la Estadística, fueron introducidos originalmente por Bellman y han sido estudiados a profundidad en análisis de decisiones e investigación de operaciones desde la década de los 50's [16].

La teoría de Procesos de Decisión de Markov (PDMs) permite modelar perfectamente a los sistemas de inventarios. Los PDMs son aquellos procesos que son observados de forma periódica, bajo incertidumbre en sus movimientos y tienen una gran variedad de aplicaciones, los PDMs proporcionan herramientas básicas para el análisis de muchos problemas en ingeniería, economía, finanzas, inteligencia artificial, telecomunicaciones, entre otras. Un proceso de decisión de Markov está constituido mediante un modelo conocido como Modelo de Control de Markov (MCM), cuyas componentes permiten caracterizar su desarrollo en el transcurso del tiempo. En el área de procesos de decisión de Markov se consideran modelos de decisión secuencial. Un modelo de decisión secuencial se describe de la siguiente manera:

En un punto específico de tiempo, un agente (tomador de decisiones o controlador) observa el estado de un sistema, de acuerdo con el estado observado, el agente elige una acción (decisión o control). La decisión tomada tiene dos consecuencias inmediatas:

1. el agente incurre en un costo (o recibe una recompensa), y

2. el sistema evoluciona a un nuevo estado en un punto subsecuente de tiempo de acuerdo a una distribución de probabilidad condicionada por la elección de la acción.

En el área de Procesos de decisión de Markov se consideran modelos de decisión secuencial con la propiedad markoviana en el conjunto de acciones disponibles, los costos (recompensas) y las probabilidades de transición. Es decir, las acciones disponibles, los costos (recompensas) y la probabilidades de transición dependen unicamente del estado y la acción actual del sistema y no de los estados ocupados y acciones elegidas en el pasado [12].

En este capítulo se describen los elementos de los Procesos de Decisión de Markov, así como también las políticas de decisión, el proceso estocástico inducido y los criterios de rendimiento, por último se describe el problema de decisión y como se resuelve mediante Programación Dinámica. Los conceptos han sido retomados de [16] y [5].

3.1. Modelo de decisión de Markov

Un proceso de desición de Markov estocástico, a tiempo discreto, es un modelo matemático de un sistema dinámico cuyo comportamiento es aleatorio, el cual es observado periódicamente y su conducta puede ser regulada o influenciada por la elección adecuada de algunas variables llamadas decisiones, acciones o controles. A continuación se decriben cada uno de los elementos de un modelo de decisión de Markov.

3.1.1. Épocas de decisión

Las decisiones son tomadas en puntos del tiempo referidos como épocas de decisión. Sea T el conjunto de épocas de decisión. T es un subconjunto de la línea real no negativa y puede ser clasificado como *discreto o continuo* y cada uno a su vez como *finito o infinito*.

Cuando T es discreto, las decisiones son tomadas en todas las épocas de decisión. En este caso, el tiempo es dividido en periodos o etapas, donde cada época de decisión corresponde al inicio de un periodo. Puede escribirse $T = \{0, 1, \ldots, N\}$ donde N es un entero positivo o $N = \infty$. Si $N < \infty$, el problema de decisión es un **problema con horizonte finito**. Si $N = \infty$, el problema es un **problema con horizonte infinito**.

En un problema con horizonte finito se adopta la convención de que ninguna decisión puede ser tomada en la época N.

Cuando T es continuo, las decisiones pueden ser tomadas en:

- todas las épocas de decisión (Teoría de control basada en sistemas de ecuaciones dinámicas)
- puntos aleatorios de tiempo cuando ciertos eventos ocurren, o
- tiempos oportunos elegidos por el agente o controlador

3.1.2. Conjunto de estados y acciones

En cada época de decisión, el sistema ocupa un estado. Sea S el conjunto de todos los posibles estados del sistema. En una época de decisión, el controlador observa un estado $s \in S$ del sistema y elige una acción $a \in A_s$, donde A_s denota al onjunto de acciones admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado s.

Observación 3.1 *Se puede suponer que S y A_s no dependen del tiempo, aunque tambien existen modelos que consideran esa posibilidad. En ese caso se escribe S_t y A_{s_t}.*

Los conjuntos S y A_s pueden ser:

- conjuntos arbitrarios finitos,
- conjuntos arbitrarios numerables infinitos,
- subconjuntos compactos de espacios Euclidianos finito dimensionales,
- subconjuntos de Borel no vacíos de espacios métricos separables completos.

Sea $A = \cup_{s \in S} A_s$. A es llamado el espacio de acciones y en algunos modelos $A_s = A$, esto es, el espacio de acciones admisibles no depende del estado s del sistema.

Las acciones pueden elegirse aleatoriamente o deterministicamente. Sea $\mathcal{P}(A_s)$ la colección de todas las distribuciones de probabilidad sobre subconjuntos de Borel de A_s. Elegir acciones aleatoriamente significa elegir una distribución de probabilidad $q(\cdot) \in \mathcal{P}(A_s)$, de tal manera que la acción a es seleccionada con probabilidad $q(a)$. Las distribuciones de probabilidad degeneradas ($q(a) = 1$) corresponden a elección de acciones deterministas.

3.1.3. Costos o recompensas

Sea $c(s,a)$ una función real definida para $s \in S$ y $a \in A_s$. $c(s,a)$ denotará el valor del costo incurrido en un periodo dado que el sistema se encuentra en el estado s y se ha tomado la acción a. De manera similar, podría considerarse una función de recompensa $r(s,a)$ en vez de la función de costo $c(s,a)$.

Desde la perspectiva de los modelos estudiados aquí, es irrelevante cómo se acumula el costo o la recompensa durante el período. Solo requerimos que su valor o valor esperado sea conocido antes de elegir una acción, y que no sea afectado por acciones futuras. El costo o recompensa podría ser:

- una suma global recibida en un tiempo fijo o aleatorio antes de la siguiente época de decisión,
- acumulado continuamente a lo largo del periodo actual,
- una cantidad aleatoria que depende del estado del sistema en la siguiente época de decisión, o
- una combinación de lo anterior.

Observación 3.2 *La función de costo o recompensa también puede depender del tiempo, en este caso se escribe $c_t(s,a)$ o $r_t(s,a)$.*

3.1.4. Probabilidades de transición

Sea $p(j|s,a)$ una función real no negativa. $p(j|s,a)$ denotará la probabilidad de que el sistema transite al estado $j \in S$ dado que el sistema estuvo en el estado s y el controlador eligió la acción $a \in A_s$.

$p(j|s,a)$ es llamada función de probabilidad de transición y debe cumplir que

$$\sum_{j \in S} p(j|s,a) = 1$$

Observación 3.3 *En muchos casos, la ley de transición puede ser especificada mediante una ecuación en diferencias de la siguiente forma:*

$$s_{t+1} = f(s_t, a_t, \omega_t),$$

$t = 0, 1, 2, ...,$ donde s_0 es el estado inicial y $\{\omega_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que pueden tomar valores en

un espacio arbritario discreto W y tienen distibución de probabilidad común $p(\omega_t = w), w \in W$, conocida, independiente del estado inicial. Entonces, la ley de transición p es dada como

$$p(B|s,a) = \sum_{w \in W} I_B(f(s,a,w))p(\omega_t = w)$$

donde $I_B(\cdot)$ denota la función indicadora del conjunto B.

Observación 3.4 *p también puede depender de t. La probabilidad de transición, también puede considerarse dependiente del tiempo, en cuyo caso se escribe $p_t(j|s,a)$.*

3.1.5. Modelo de control de Markov

De acuerdo a lo descrito anteriomente, el modelo de control o decisión de Markov consiste de cinco elementos:

1. Épocas de decisión.
2. Conjunto estados.
3. Conjunto de acciones.
4. Probabilidades de transición.
5. Costos o recompensas por periodo.

Dicho modelo puede representarse de la siguiente manera:

$$\{T, S, A_s, p(\cdot|s,a), c(s,a)\}$$

Nota 3.1 *En este trabajo se considera $T = \{0, 1, ...N\}$ con $N < \infty$ y conjuntos de estados y acciones arbitrarios finitos.*

3.2. Políticas

3.2.1. Reglas de decisión

Una regla de decisión preescribe un procedimiento para la selección de una acción en cada estado en una época de decisión especificada.

Clasificación de las reglas de decisión

1. **Reglas de decisión deterministas markovianas (MD):** son funciones $d_t : S \to A_s$, las cuales especifican la elección de la acción cuando el sistema se encuentra en el estado s en la época de decisión t. Para cada $s \in S$, $d_t(s) \in A_s$. Se dicen ser markovianas porque dependen del previos estados y acciones unicamente a través del estado actual del sistema y son deterministas por elegir la acción con certeza.

2. **Reglas de decisión deterministas dependientes de la historia (HD):** son funciones $d_t : H_t \to A_{s_t}$, donde H_t denota el conjunto de todas las historias $h_t = (s_0, a_0, \ldots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t)$ del sistema. En este caso $d_t(h_t) \in A_{s_t}$.

3. **Reglas de decisión aleatorizadas markovianas (MR):** son funciones d_t que especifican una distribución de probabilidad $q_{d_t}(\cdot)$ con soporte en el espacio de acciones. Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el espacio de acciones, entonces $d_t : S \to \mathcal{P}(A)$. En este caso, se debe cumplir la siguiente restricción: $q_{d_t(s_t)}(\cdot) \in \mathcal{P}(A_{s_t})$.

4. **Reglas de decisión aleatorizadas dependientes de la historia (HR):** son funciones $d_t : H_t \to \mathcal{P}(A)$. Se debe cumplir que $q_{d_t(h_t)}(\cdot) \in \mathcal{P}(A_{s_t})$ para toda $h_t \in H_t$.

Observación 3.5 *Una regla de decisión determinista puede ser considerada como un caso especial de una regla de decisión aleatorizada en la cual la distribución sobre el conjunto de acciones es degenerada, esto es* $q_{d_t(s_t)}(a) = 1$ *o* $q_{d_t(h_t)}(a) = 1$ *para alguna* $a \in A_s$.

Sea D_t^K el conjunto de reglas de decisión $K(K = MD, HD, MR, HR)$. Los costos y las probabilidades de transición estarán dadas en función de S y H_t. Para $d_t \in D_t^{MD}$, el costo es igual a $c_t(s, d_t(s))$ y la probabilidad de transición es igual a $p_t(j|s, d_t(s))$ y para $d_t \in D_t^{HD}$, el costo es igual a $c_t(s, d_t(h_t))$ y la probabilidad de transición es igual a $p_t(j|s, d_t(h_t))$. Si $d_t \in D_t^{MR}$, el costo esperado satisface

$$c_t(s, d_t(s)) = \sum_{a \in A_s} c_t(s, a) q_{d_t(s)}(a)$$

y la ley de transición satisface

$$p_t(j|s, d_t(s)) = \sum_{a \in A_s} p_t(j|s, a) q_{d_t(s)}(a).$$

De manera similar para $d_t \in D_t^{HR}$

3.2.2. Políticas

Una política π especifica en cada una de las épocas de decisión la regla de decisión que debe ser usada. La política proporciona al agente una preescripción para la elección de una acción bajo cualquier posible estado futuro o historia futura del sistema, esto es, $\pi = (d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$ donde $d_t \in D_t^K$ para $t = 0, 1, \ldots, N-1$, $N \leq \infty$. Sea Π^K el conjunto de todas las políticas de clase K.

$$\Pi^K = D_1^K \times D_2^K \times \ldots \times D_{N-1}^K$$

Una política π se dice ser **estacionaria** si $d_t = d$ para toda $t \in T$. Una política estacionaria de la forma $\pi = (d, d, \ldots)$ es denotada por d^∞.

Π^{SD} denota al conjunto de todas las políticas deterministas estacionarias.

Π^{SR} denota al conjunto de todas las políticas aleatorizadas estacionarias.

3.3. Proceso estocástico inducido

Un modelo de probabilidad consiste de tres elementos:

1. un espacio muestral Ω,
2. una $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ de subconjuntos medibles de Ω y
3. una medida de probabilidad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{B}(\Omega)$.

En un proceso de decisión de Markov con horizonte $N < \infty$,

$$\Omega = S \times A \times S \times A \times \ldots \times A \times S = (S \times A)^{N-1} \times S,$$

Un típico elemento $\omega \in \Omega$ es de la forma $\omega = (s_0, a_0, s_1, a_1, \ldots, a_{N-1}, s_N)$.

ω es referido como una trayectoria muestral.

Si S y A son finitos, Ω también lo será y en este caso $\mathcal{B}(\Omega)$ es igual al conjunto de todos los subconjuntos de Ω y una medida de probabilidad es una función de probabilidad.

Defina las variables aleatorias X_t y Y_t como $X_t(\omega) = s_t$ y $Y_t(\omega) = a_t$ para $t = 0, 1, \ldots, N$ $N < \infty$, las cuales toman valores en S y A, respectivamente. Defina la historia del proceso Z_t como $Z_0(\omega) = s_0$ y $Z_t(\omega) = (s_0, a_0, s_1, \ldots, s_t)$ para $1 \leq t \leq N$. Sea $P_0(\cdot)$ la distribución del estado inicial del sistema. Una política aleatorizada dependiente de la historia $\pi = (d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$ induce una medida de probabilidad P^π sobre $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ a tráves de

$$\begin{aligned} P^\pi(X_0 = s) &= P_0(s), \\ P^\pi(Y_t = a | Z_t = h_t) &= q_{d_t(h_t)}(a), \\ P^\pi(X_{t+1} = s | Z_t = (h_{t-1}, a_{t-1}, s_t), Y_t = a_t) &= p_t(s|s_t, a_t), \end{aligned}$$

Observación 3.6 *La tercera ecuación en el bloque de ecuaciones anterior refleja la propiedad markoviana del proceso estocástico de control.*

La probabilidad de una trayectoria muestral $w = (s_0, a_0, s_1, \ldots, s_N)$ está dada por

$$P^\pi(s_0, a_0, s_1, \ldots, s_N) = P_0(s_0) q_{d_0(s_0)}(a_0) p_0(s_1|s_0, a_0) q_{d_1(h_1)}(a_1) \ldots$$
$$q_{d_{N-1}(h_{n-1})}(a_{N-1}) p_{N-1}(s_N|s_{N-1}, a_{N-1})$$

Para $\pi \in \Pi^{HD}$ o $\pi \in \Pi^{MD}$, la expresión anterior se simplifica a

$$P^\pi(s_0, a_0, s_1, \ldots, s_N) = P_0(s_0) p_0(s_1|s_0, a_0) \ldots p_{N-1}(s_N|s_{N-1}, a_{N-1})$$

3.4. Criterio de rendimiento

Para especificar un problema de control óptimo, además de un sistema dinámico mediante la ley de transición y un conjunto de políticas, es necesario un criterio de rendimiento, que también es conocido como índice de funcionamiento o función objetivo. El criterio de rendimiento mide o cuantifica el comportamiento del sistema al aplicar una política $\pi \in \Pi$ donde Π denota el conjunto de todas las políticas. Los criterios más utilizados son:

- **Costo total esperado:** está dado por

$$J(\pi, s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{N-1} c(s_t, a_t) + c_N(s_N) \right], \tag{3.1}$$

  donde E_s^π representa el valor esperado cuando se utiliza la política $\pi = \{d_t\}$, dado el estado inicial $s_0 = s$. El número N en 3.1 es el horizonte de planeación y representa el número de etapas en las cuales el sistema estará funcionando y puede ser finito o infinito. Por su puesto que si $N = \infty$ entonces la suma en 3.1 podría no converger, al menos para algunas políticas π.

Observación 3.7 *En el caso de que la ley de transición este especificada mediante una ecuación en diferencias $s_{t+1} = f(s_t, a_t, \omega_t)$, $t = 0, 1, ..., N-1$ donde $\{\omega_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, en algunos modelos se podría tener la función de costo por periodo también dependiente de ω_t, escribiendo $c(s_t, a_t, \omega_t)$ en vez de $c(s_t, a_t)$ en 3.1.*

- **Costo total descontado:**

$$V(\pi, s) = E_s^{\pi}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(s_t, a_t)\right],$$

  donde α se denomina factor de descuento y es tal que $0 < \alpha < 1$.

- **Costo promedio esperado:** es a largo plazo, por unidad de tiempo

$$U(\pi, s) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} J(\pi, s), \tag{3.2}$$

  con $J(\pi, s)$ como en 3.1.

  De hecho, en general se puede garantizar la existencia del límite en 3.2 y por lo tanto, es costumbre reemplazar el límite ya sea por el límite superior (lim sup) o por el límite inferior (lim inf), esto es

$$J(\pi, s) := \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N+1} J(\pi, s),$$

  o

$$J(\pi, s) := \lim_{N\to\infty} \inf \frac{1}{N+1} J(\pi, s),$$

  en lugar de 3.2.

Nota 3.2 *En este trabajo el criterio de rendimiento que se utilizará será el costo total esperado.*

3.5. Problema de decisión

Considere un sistema dinámico en tiempo discreto con ley de transición

$$s_{t+1} = f_t(s_t, a_t, \omega_t), \qquad t = 0, 1, ..., N-1, \qquad N < \infty,$$

donde el estado s_t es un elemento de un conjunto de estados S, el control a_t es un elemento de un conjunto de acciones A_s y la perturbación aleatoria ω_k es una variable aleatoria que toma valores en W. Véase Observación 3.3.

Dado un estado inicial s_0, el problema de decisión o control consiste en encontrar una política admisible $\pi = \{d_0, d_1, ..., d_{N-1}\}$ que minimice el costo total esperado

$$J(s_0, \pi) = E_{\omega_0,...,\omega_{N-1}} \left[\sum_{t=0}^{N-1} c(s_t, d_t(s_t), \omega_t) + c_N(s_N) \right]$$

sujeto a la ley de transición

$$s_{t+1} = f_t(s_t, d_t(x_t), \omega_t), \qquad t = 0, 1, ..., N-1$$

donde $E_{\omega_0,...,\omega_{N-1}}$ es la esperanza con respecto a la medida de probabilidad del proceso estocástico de control que de la sucesión de variables aleatorias independientes e indenticamente distribuidas $\omega_0, ..., \omega_{N-1}$.

Para un estado inicial dado s_0 una política óptima de control π^* es tal que

$$J(s_0, \pi^*) = \min_{\pi \in \Pi} J(s_0, \pi),$$

donde Π es el conjunto de todas las políticas de control. El costo óptimo correspondiente a s_0 puede ser denotado por $J^*(s_0)$; esto es

$$J^*(s_0) = \min_{\pi \in \Pi} J(s_0, \pi).$$

J^* es una función que asigna a cada estado inicial s_0 el costo total esperado óptimo $J^*(s_0)$, es llamada función de costo óptimo o función de valor óptimo.

Los métodos más usados para resolver el problema de control óptimo son:

- Métodos de programación matemática.
- Programación dinámica.

Uno de los métodos con mayor aplicabilidad es la técnica de Programación Dinámica (PD), esta técnica a comparación de otros métodos permite hallar la solución óptima de forma recursiva, lo cual tiene grandes implicaciones desde el punto de vista computacional, y además, se puede extender a problemas de optimización más generales que el problema de control óptimo. La idea fundamental del método de PD consiste en descomponer el problema en varias etapas, cada una correspondiente a un subproblema con una sola variable, y resolver el problema en forma secuencial, por etapas.

3.5.1. Algoritmo de Programación Dinámica

La programación dinámica es una técnica muy simple basada en el principio de optimalidad. El nombre se debe a Bellman, quien contribuyó a la popularización de la PD y a su transformación a una herramienta sistemática. El principio de optimalidad en procesos de decisión de Markov establece el siguiente hecho:

Sea $\pi^* = \{d_0^*, d_1^*, ..., d_{N-1}^*\}$ una política de control óptima para el problema de decisión. Considere el problema donde se está en el estado s_i en el tiempo i y se quiere minimizar el costo desde el tiempo i hasta el tiempo N, el cual esta dado por

$$E_{\omega_i,\ldots,\omega_{N-1}}\left[\sum_{t=i}^{N-1} c\left(s_t, d_t(s_t), \omega_t\right) + c_N(s_N)\right],$$

y se asume que cuando usamos π^* el estado s_i ocurre con una probabilidad positiva. Entonces la ley de control truncada $\{d_i^*, d_{i+1}^*, ..., d_{N-1}^*\}$ es óptima para este subproblema.

Las siguientes observaciones serán utilizadas en la demostación del Teorema 1 de Programación Dinámica. Dicho teorema proporciona el algoritmo para encontar la función de valor J^* y la política óptima π^* para el problema de control óptimo.

Observación 3.8 *1. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas independientes que tomas valores sobre conjuntos finitos con funciones de probabilidad $P_x(X = x)$ y $P_y(Y = y)$ connocidas y sean $g : \mathbb{R} \to \not{\mathbb{R}}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones reales. Entonces*

a*)*

$$\begin{aligned}
E_{x,y}\left[g\left(x\right)\right] &= \sum_x \sum_y g(x) P_{x,y}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x \sum_y g(x) P_x(X = x) P_y(Y = y) \\
&= \sum_x g(x) P_x(X = x) \left[\sum_y P_y(Y = y)\right] \\
&= \sum_x g(x) P_x(X = x) \\
&= E_x\left[g(x)\right]
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
E_{x,y}\left[f\left(x,y\right)\right] &= \sum_x \sum_y f(x,y) P_{x,y}(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y f(x,y) P_x(X=x) P_y(Y=y) \\
&= \sum_x P_x(X=x) \left[\sum_y f(x,y) P_y(Y=y) \right] \\
&= \sum_x P_x(X=x) E_y\left[f(x,y)\right] \\
&= E_x\left[E_y\left[f(x,y)\right]\right] \\
&= E_x E_y\left[f(x,y)\right]
\end{aligned}
$$

2. *Sean x, y dos variables reales que toman valores en un conjunto finito y sean $g : \mathbb{R} \to \not{\mathbb{R}}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones reales. Entonces*

$$
\min_{x,y}\left[g(x) + f(x,y)\right] = \min_x \left[g(x) + \min_y \left[f(x,y)\right] \right]
$$

Teorema 1 *Sea $J^*(s_0)$ el costo óptimo. Entonces*

$$
J^*(s_0) = J_0(s_0)
$$

donde la función J_0 esta dada por la última iteración del siguiente algoritmo, el cual procede hacia atras en el periodo $N-1$ al periodo 0:

$$
\begin{aligned}
J_N(s_N) &= c_N(s_N) \\
J_t(s_t) &= \min_{a_t \in A_t(s_t)} E_{\omega_t}[c_t(s_t, a_t, \omega_t) + J_{t+1}(f_t(s_t, a_t, \omega_t))], \\
t &= N-1, N-2, .., 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Además, si $a_t^* = d_t^*(s_t)$ minimiza el lado derecho de 3.3 para cada s_t y t, la ley de control $\pi^* = \{d_0^*, ..., d_{N-1}^*\}$ es optima.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
J^*(x_0) &= \min_{\pi\in\Pi} \left[E_{\substack{\omega_t \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[\sum_{t=0}^{N-1} c_t(s_t, d_t(s_t), \omega_t) + c_N(s_N) \right] \right] \\
&= \min_{d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}} \left[E_{\substack{\omega_t \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) + c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) + \ldots + c_N(s_N) \right] \right] \\
&= \min_{d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}} \left[\begin{array}{l} E_{\substack{\omega_t \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) \right] + E_{\substack{\omega_t \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) \right] + \ldots + \\ E_{\substack{\omega_t \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[c_N(s_N) \right] \end{array} \right] \\
& \text{Por la observación } 1a \\
&= \min_{d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}} \left[\begin{array}{l} E_{\omega_0} \left[c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) \right] + \\ E_{\omega_0, w_1} \left[c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) \right] + \ldots + \\ E_{\substack{\omega_k \\ t=0,1,\ldots,N-1}} \left[c_N(s_N) \right] \end{array} \right] \\
& \text{Por la observación } 1b \\
&= \min_{d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}} \left[\begin{array}{l} E_{\omega_0} \left[c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) \right] + E_{\omega_0} E_{w_1} \left[c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) \right] + \ldots + \\ E_{\omega_0} E_{w_1} \ldots E_{w_{N-1}} \left[c_N(s_N) \right] \end{array} \right] \\
&= \min_{d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}} \left[\left[\begin{array}{l} E_{\omega_0} [c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) + \ldots + \\ E_{w_1} [c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) + \ldots + \\ E_{w_{N-1}} [c_{N-1}(s_{N-1}, d_{N-1}(x_{N-1}) \omega_{N-1}) + \ldots + \\ c_N(s_N) \end{array} \right] \ldots \right] \\
&= \min_{d_0} \left[\begin{array}{l} E_{\omega_0} [c_0(s_0, d_0(s_0), \omega_0) + \ldots + \\ \min_{d_1} [E_{w_1} c_1(s_1, d_1(s_1), \omega_1) + \ldots + \\ \min_{d_{N-1}} [E_{w_{N-1}} c_{N-1}(s_{N-1}, d_{N-1}(x_{N-1}) \omega_{N-1}) + \ldots + \\ c_N(s_N) \ldots] \end{array} \right] \\
&= \min_{a_0 \in A_0(x_0)} \left[\begin{array}{l} E_{\omega_0} [c_0(s_0, a_0, \omega_0) + \ldots + \\ \min_{a_1 \in A_1(x_1)} [E_{w_1} c_1(s_1, a_1, \omega_1) + \ldots + \\ \min_{a_{N-1} \in A_{N-1}(x_{N-1})} [E_{w_{N-1}} c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) + \ldots + \\ c_N(s_N) \ldots] \end{array} \right]
\end{aligned}
$$

Aplicando esto a la ecuación $J^*(s_0)$ usando la sustitución $s_{t+1} = f_t(s_t, a_t, \omega_t)$ e introduciendo las funciones J_t de 1 se obtiene

$$
\begin{aligned}
J_N(s_N) &= c_N(s_N) \\
J_{N-1}(s_{N-1}) &= \min_{a_{N-1}\in U_{N-1}(s_{N-1})} E_{w_{N-1}} \begin{bmatrix} c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) + ..+ \\ J_N[f_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1})] \end{bmatrix} \\
&= \min_{a_{N-1}\in U_{N-1}(s_{N-1})} E_{w_{N-1}} \begin{bmatrix} c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) + ...+ \\ c_N[f_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1})] \end{bmatrix} \\
&= \min_{a_{N-1}\in U_{N-1}(s_{N-1})} E_{w_{N-1}} [c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) + c_N(s_N)]] \\
J_{N-2}(s_{N-2}) &= \min_{a_{N-2}\in U_{N-2}(s_{N-2})} E_{w_2} \begin{bmatrix} c_{N-2}(s_{N-2}, a_{N-2}, \omega_{N-2}) + ...+ \\ J_{N-1}[f_{N-2}(s_{N-2}, a_{N-2}, \omega_{N-2})] \end{bmatrix} \\
&= \min_{a_{N-2}\in U_{N-2}(s_{N-2})} E_{w_2} \begin{bmatrix} c_{N-2}(s_{N-2}, a_{N-2}, \omega_{N-2})+ \\ \min_{a_{N-1}\in U_{N-1}(s_{N-1})} E_{w_1}[c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) \\ +... + c_N(s_N)] \end{bmatrix} \\
J_{N-3}(s_{N-3}) &= \min_{a_{N-3}\in U_{N-3}(s_{N-3})} E_{w_3} \begin{bmatrix} c_{N-3}(s_{N-3}, a_{N-3}, \omega_{N-3}) + ...+ \\ J_{N-2}[f_{N-3}(s_{N-3}, a_{N-3}, \omega_{N-3})] \end{bmatrix} \\
&= \min_{a_{N-3}\in U_{N-3}(s_{N-3})} E_{w_3} \begin{bmatrix} c_{N-3}(s_{N-3}, a_{N-3}, \omega_{N-3})+ \\ \min_{a_{N-2}\in U_{N-2}(s_{N-2})} E_{w_2}[c_{N-2}(s_{N-2}, a_{N-2}, \omega_{N-2}) \\ +...+ \\ \min_{a_{N-1}\in U_{N-1}(s_{N-1})} E_{w_1}[c_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}, \omega_{N-1}) \\ +... + c_N(s_N)]] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Continuando con las iteraciones se llega a la igualdad

$$J^*(s_0) = J_0(s_0).$$

■

Capítulo 4

Modelo de inventarios

El problema de inventarios surge cuando una empresa (distribuidora o productora) no satisface adecuadamente la demanda. Entonces, debe realizar realizar un almacenamiento o contar con un inventario. El principal objetivo de un sistema de inventarios radica en definir el nivel de inventario, para poder efectuar los pedidos con la cantidad necesaria de mercancía, buscando minimizar el costo total del sistema. En este capítulo se presenta un problema de inventarios modelado como un problema de control de Markov con su respectiva solución mediante programación dinámica. Además, se dan a conocer algunas variantes importantes de los modelos de inventarios que se han considerado en la teoría de procesos de Markov.

4.1. Modelo de inventarios

En un sistema de inventarios, considere el problema de ordenar una cantidad de cierta mercancía al principio de cada período de tiempo para satisfacer una demanda estocástica. La teoría de procesos de decisión de Markov es adecuada para modelar y resolver dicho problema. En un sistema de inventarios, considere el problema de ordenar una cantidad de cierta mercancía al principio de cada periodo de tiempo para satisfacer una demanda estocástica. El modeloo de inventarios que se presenta a continuación es retomado de [5] pag. 18, y se formula bajo el siguiente conjunto de suposiciones simples:

1. La decisión de ordenar una cantidad adicional de inventario se realiza al inicio de cada periodo de revisión y la entrega ocurre inmediatamente.

2. Las demandas del producto llegan a través del periodo pero todas son satisfechas al finalizar el periodo.

3. Si la demanda excede el inventario, el exceso de la demanda se pierde.
4. Los costos y la distribución de probabilidad de la demanda no varían de un periodo a otro.
5. El producto es vendido sólo en unidades enteras
6. El almacen tiene una capacidad máxima de M unidades.

Sea s_t el nivel de inventario o stock disponible al principio del período t, a_t la cantidad ordenada al principio del período t y ω_t la demanda durante el período t. Se supone que $\{\omega_0, \omega_1, \ldots\}$ es una sucesión de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con probabilidad conocida $P(\omega_t = k) = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, D$, donde $D < \infty$ es el valor máximo de la demanda. Observe que, de acuerdo a los supuestos del modelo, el nivel de inventario $s_t + a_t$ en el periodo t debe cumplir que $s_t + a_t \leq M$ y como el exceso de demanda $\omega_t - s_t - a_t$ se pierde, el nivel de inventario se desarrolla de acuerdo a la siguiente ecuación en diferencias:

$$s_{t+1} = \text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\}.$$

Finalmente, el costo por periodo está dado por

$$c(s_t, a_t, \omega_t) = da_t + h\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\} + p\,\text{máx}\{0, \omega_t - s_t - a_t\},$$

donde

d es el costo por unidad ordenada,

h es el costo por mantener en inventario una unidad de inventario

p es el costo por unidad no abastecida.

De esa manera, las componentes del modelo de decisión para el modelo de control de inventarios, quedan especificadas de la siguiente manera:

- Épocas de decisión: $T = \{1, 2, \ldots, N\}, \qquad N < \infty$.
- Conjunto de estados: $S = \{0, 1, \ldots, M\}$.
- Conjunto de acciones admisibles: $A_s = \{0, 1, 2, \ldots, M - s\}$.
- Ley de transición: $s_{t+1} = \text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\}$, donde $P(\omega_t = k) = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, D$ con $D < \infty$.

- Costo por periodo: $c(s_t, a_t, \omega_t) = da_t + h\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\} + p\,\text{máx}\{0, \omega_t - s_t - a_t\}$.

La ecuación de programación dinámica para el problema de control de inventario, con horizonte de planeación N, de acuerdo con la Proposición 1, es dada como sigue:

$$\begin{aligned} J_N(s_N) &= c_N(s_N) \\ J_t(s_t) &= \min_{a_t \in \{0,1,2,\ldots,M-s_t\}} E_{\omega_t} \begin{bmatrix} da_t + h\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\} \\ +p\,\text{máx}\{0, \omega_t - s_t - a_t\} \\ +J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega_t\}) \end{bmatrix} \\ & \quad t = N-1, N-2, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $c_N(s_N)$ es el costo terminal.

Ejemplo 4.1 *Considere un problema de control de inventario con los siguientes datos:*

- *Horizonte de planeación:* $\boldsymbol{N}$= 4 *periodos*
- *Capacidad del almacen:* $\boldsymbol{M}$= 2 *unidades*
- *La distribución de probabilidad de la demana ω para todos los periodos, dada por:*

$$\boldsymbol{P}(\omega = 0) = 0.1, \qquad \boldsymbol{P}(\omega = 1) = 0.5, \qquad \boldsymbol{P}(\omega = 2) = 0.4$$

- *La cantidad máxima de la demanda:* $\boldsymbol{D}$= 2
- *Costo por ordenar una unidad:* $d = 2$
- *Costo por mantener una unidad en inventario:* $h = 2$
- *Costo por escasez de una unidad:* $p = 3$
- $c_N(s) = 0$

La ecuación de inicio para el algoritmo de programación dinámica 4.1 es

$$J_4(s_4) = c_N(s_4) = 0 \quad \textit{para } s_4 = 0, 1, 2$$

El algoritmo toma la forma

$$
\begin{aligned}
J_t(s_t) &= \min_{a_t\in\{0,\ldots,2-s_t\}} E_\omega \left\{ \begin{array}{c} 2a_t + 2\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega\} + 3\,\text{máx}\{0, \omega - s_t - a_t\} \\ +J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - \omega\}) \end{array} \right\} \\
&= \min_{a_t\in\{0,\ldots,2-s_t\}} \left\{ 2a_t + \sum_{k=0}^{2} \left(\begin{array}{l} 2\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - k\} + \\ 3\,\text{máx}\{0, k - s_t - a_t\} + \\ J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - k\}) \end{array} \right) \boldsymbol{P}(\omega = k) \right\} \\
&= \min_{a_t\in\{0,\ldots,2-s_t\}} \left\{ \begin{array}{l} 2a_t + \left(\begin{array}{l} 2\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - 0\} + \\ 3\,\text{máx}\{0, 0 - s_t - a_t\} + \\ J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - 0\}) \end{array} \right) (0{,}1) \\ \quad + \left(\begin{array}{l} 2\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - 1\} + \\ 3\,\text{máx}\{0, 1 - s_t - a_t\} + \\ J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - 1\}) \end{array} \right) (0{,}5) \\ \quad + \left(\begin{array}{l} 2\,\text{máx}\{0, s_t + a_t - 2\} + \\ 3\,\text{máx}\{0, 2 - s_t - a_t\} + \\ J_{t+1}(\text{máx}\{0, s_t + a_t - 2\}) \end{array} \right) (0{,}4) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

donde $s_t \in S$ *que puede tomar valores* $\{0, 1, 2\}$.

Etapa 3 $t = 3$

Estado $s_3 = 0$

$$
J_3(0) = \min_{a_3\in\{0,1,2\}} \left\{ \begin{array}{c} 2a_3 + (2\,\text{máx}\{0, a_3\} + 3\,\text{máx}\{0, -a_3\})(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0, a_3 - 1\} + 3\,\text{máx}\{0, 1 - a_3\})(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0, a_3 - 2\} + 3\,\text{máx}\{0, 2 - a_3\})(0.4) \end{array} \right\}
$$

Para cada uno de los tres valores posibles de a_3, calculamos el valor entre corchetes:

Cuando a_3 toma el valor de 0:

$$\begin{aligned}
& 2(0) + (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\})(0.1) + \\
& (2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\})(0.5) + (2\max\{0,-2\} + 3\max\{0,2\})(0.4) \\
= \; & (3)(0.5) + (6)(0.4) = 3.9
\end{aligned}$$

Cuando a_3 toma el valor de 1:

$$\begin{aligned}
& 2(1) + (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\})(0.1) + \\
& (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\})(0.5) + (2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\})(0.4) \\
= \; & 2 + (2)(0.1) + (3)(0.4) = 3.4
\end{aligned}$$

Cuando a_3 toma el valor de 2:

$$\begin{aligned}
& 2(2) + (2\max\{0,2\} + 3\max\{0,-2\})(0.1) + \\
& (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\})(0.5) + (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\})(0.4) \\
= \; & 4 + (4)(0.1) + (2)(0.5) = 5.4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_3 = 1$, teniendo

$$J_3(0) = 3.4 \quad \textit{con} \quad d_3^*(0) = 1$$

Etapa $t = 3$

Estado $s_3 = 1$

$$J_3(1) = \min_{a_3 \in \{0,1\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_3 + (2\max\{0, 1 + a_3\} + 3\max\{0, -1 - a_3\})(0.1) \\ +(2\max\{0, 0 + a_3\} + 3\max\{0, 0 - a_3\})(0.5) \\ +(2\max\{0, -1 + a_3\} + 3\max\{0, 1 - a_3\})(0.4) \end{array} \right\}$$

Para cada uno de los dos valores posibles de a_3 calculamos el valor entre corchetes:

Cuando a_3 toma el valor de 0:

$$\begin{aligned}
& 2(0) + (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\})(0.1) + \\
& (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\})(0.5) + (2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\})(0.4) \\
= \; & (2)(0.1) + (3)(0.4) = 1.4
\end{aligned}$$

Cuando a_3 toma el valor de 1:

$$\begin{aligned}
& 2(1) + (2\max\{0,2\} + 3\max\{0,-2\})(0.1) + \\
& (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\})(0.5) + (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\})(0.4) \\
= \; & 2 + (4)(0.1) + (2)(0.5) = 3.4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_3 = 0$, *teniendo*

$$J_3(1) = 1.4 \quad con \quad d_3^*(1) = 0$$

Etapa $t = 3$

Estado $s_3 = 2$

$$\begin{aligned} J_3(2) &= \min_{a_3 \in \{0\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_3 + (2\,\text{máx}\{0, 2+a_3\} + 3\,\text{máx}\{0, -2-a_3\})(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0, 1+a_3\} + 3\,\text{máx}\{0, -1-a_3\})(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0, 0+a_3\} + 3\,\text{máx}\{0, 0-a_3\})(0.4) \end{array} \right\} \\ &= 2(0) + (2\,\text{máx}\{0,2\} + 3\,\text{máx}\{0,-2\})(0.1) + \\ &\quad (2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\})(0.5) + (2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\})(0.4) \\ &= (4)(0.1) + (2)(0.5) = 1.4 \end{aligned}$$

Teniendo

$$J_3(2) = 1.4 \quad con \quad d_3^*(2) = 0$$

Etapa $t = 2$

Estado $s_2 = 0$

$$J_2(0) = \min_{a_2 \in \{0,1,2\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_2 + (2\,\text{máx}\{0, a_2\} + 3\,\text{máx}\{0, -a_2\} + J_3(\text{máx}\{0, a_2\}))(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0, a_2 - 1\} + 3\,\text{máx}\{0, 1 - a_2\} + J_3(\text{máx}\{0, a_2 - 1\}))(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0, a_2 - 2\} + 3\,\text{máx}\{0, 2 - a_2\} + J_3(\text{máx}\{0, a_2 - 2\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los tres valores posibles de a_2 *el valor entre corchetes*:

Cuando a_2 *toma el valor de 0:*

$$\begin{aligned} & 2(0) + (2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_3(\text{máx}\{0,0\}))(0.1) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,-1\} + 3\,\text{máx}\{0,1\} + J_3(\text{máx}\{0,-1\}))(0.5) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,-2\} + 3\,\text{máx}\{0,2\} + J_3(\text{máx}\{0,-2\}))(0.4) \\ = \; & (3.4)(0.1) + (6.4)(0.5) + (9.4)(0.4) = 7.3 \end{aligned}$$

Cuando a_2 *toma el valor de 1:*

$$\begin{aligned} & 2(1) + (2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\} + J_3(\text{máx}\{0,1\}))(0.1) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_3(\text{máx}\{0,0\}))(0.5) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,-1\} + 3\,\text{máx}\{0,1\} + J_3(\text{máx}\{0,-1\}))(0.4) \\ = \; & 2 + (3.4)(0.1) + (3.4)(0.5) + (6.4)(0.4) = 6.6 \end{aligned}$$

Cuando a_2 *toma el valor de 2:*

$$\begin{aligned} & 2(2) + (2\,\text{máx}\{0,2\} + 3\,\text{máx}\{0,-2\} + J_3(\text{máx}\{0,2\}))(0.1) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\} + J_3(\text{máx}\{0,1\}))(0.5) \\ & \quad +(2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_3(\text{máx}\{0,0\}))(0.4) \\ = \; & 4 + (5.4)(0.1) + (3.4)(0.5) + (3.4)(0.4) = 7.6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_2 = 1$ *teniendo*

$$J_2(0) = 6.6 \quad con \qquad d_2^*(0) = 1$$

Etapa $t = 2$

Estado $s_2 = 1$

$$J_2(1) = \min_{a_2 \in \{0,1\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_2 + (2\max\{0, 1 + a_2 + 3\max\{0, -1 - a_2\} + J_3(\max\{0, 1 + a_2\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 0 + a_2\} + 3\max\{0, 0 - a_2\} + J_3(\max\{0, 0 + a_2\}))(0\,.5) \\ +(2\max\{0, -1 + a_2\} + 3\max\{0, 1 - a_2\} + J_3(\max\{0, -1 + a_2\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los dos valores posibles de a_2 *el valor entre corchetes*:

$$\begin{array}{rl} & \textit{Cuando } a_2 \textit{ toma el valor de 0:} \\ & 2(0) + (2\max\{0, 1\} + 3\max\{0, -1\} + J_3(\max\{0, 1\}))(0.1) \\ & \qquad +(2\max\{0, 0\} + 3\max\{0, 0\} + J_3(\max\{0, 0\}))(0.5) \\ & \qquad +(2\max\{0, -1\} + 3\max\{0, 1\} + J_3(\max\{0, -1\}))(0.4) \\ = & (3.4)(0.1) + (3.4)(0.5) + (6.4)(0.4) = 4.6 \\ & \textit{Cuando } a_2 \textit{ toma el valor de 1:} \\ & 2(1) + (2\max\{0, 2\} + 3\max\{0, -2\} + J_3(\max\{0, 2\}))(0.1) \\ & \qquad +(2\max\{0, 1\} + 3\max\{0, -1\} + J_3(\max\{0, 1\}))(0.5) \\ & \qquad +(2\max\{0, 0\} + 3\max\{0, 0\} + J_3(\max\{0, 0\}))(0.4) \\ = & 2 + (5.4)(0.1) + (3.4)(0.5) + (3.4)(0.4) = 5.6 \end{array}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_2 = 0$ *teniendo*

$$J_2(1) = 4.6 \quad con \qquad d_2^*(1) = 0$$

Etapa $t = 2$

Estado $s_2 = 2$

$$\begin{array}{rcl} J_2(2) & = & \min\limits_{a_2 = 0} \left\{ \begin{array}{r} 2a_2 + (2\max\{0, 2 + a_2\} + 3\max\{0, -2 - a_2\} + J_3(\max\{0, 2 + a_2\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 1 + a_2\} + 3\max\{0, -1 - a_2\} + J_3(\max\{0, 1 + a_2\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, 0 + a_2\} + 3\max\{0, 0 - a_2\} + J_3(\max\{0, 0 + a_2\}))(0.4) \end{array} \right\} \\ & = & \begin{array}{r} 2(0) + (2\max\{0, 2\} + 3\max\{0, -2\} + J_3(\max\{0, 2\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 1\} + 3\max\{0, -1\} + J_3(\max\{0, 1\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, 0\} + 3\max\{0, 0\} + J_3(\max\{0, 0\}))(0.4) \end{array} \\ & = & (5.4)(0.1) + (3.4)(0.5) + (3.4)(0.4) = 3.6 \end{array}$$

Teniendo

$$J_2(2) = 3.6 \quad con \qquad d_2^*(2) = 0$$

Etapa $t = 1$

Estado $s_1 = 0$

$$J_1(0) = \min_{a_1 \in \{0,1,2\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_1 + (2\max\{0, a_1\} + 3\max\{0, -a_1\} + J_2(\max\{0, a_1\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, a_1 - 1\} + 3\max\{0, 1 - a_1\} + J_2(\max\{0, a_1 - 1\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, a_1 - 2\} + 3\max\{0, 2 - a_1\} + J_2(\max\{0, a_1 - 2\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los tres valores posibles de a_1 *el valor entre corchetes*:

$$\begin{array}{rl} & \textit{Cuando } a_1 \textit{ toma el valor de 0:} \\ & 2(0) + (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_2(\max\{0,0\}))(0.1) \\ & \quad +(2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\} + J_2(\max\{0,-1\}))(0.5) \\ & \quad +(2\max\{0,-2\} + 3\max\{0,2\} + J_2(\max\{0,-2\}))(0.4) \\ = & (6.6)(0.1) + (9.6)(0.5) + (12.6)(0.4) = 10{,}5 \\ & \textit{Cuando } a_1 \textit{ toma el valor de 1:} \\ & 2(1) + (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\} + J_2(\max\{0,1\})(0.1) \\ & \quad +(2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_2(\max\{0,0\}))(0.5) \\ & \quad +(2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\} + J_2(\max\{0,-1\}))(0.4) \\ = & 2 + (6.6)(0.1) + (6.6)(0.5) + (9.6)(0.4) = 9.8 \\ & \textit{Cuando } a_1 \textit{ toma el valor de 2:} \\ & 2(2) + (2\max\{0,2\} + 3\max\{0,-2\} + J_2(\max\{0,2\}))(0.1) \\ & \quad +(2\max(0,1) + 3\max\{0,-1\} + J_2(\max\{0,1\}))(0.5) \\ & \quad +(2\max(0,0) + 3\max\{0,0\} + J_2(\max\{0,0\}))(0.4) \\ = & 4 + (7.6)(0.1) + (6.6)(0.5) + (6.6)(0.4) = 10.7 \end{array}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_1 = 1$ *teniendo*

$$J_1(0) = 9.8 \quad \textit{con} \qquad d_2^*(0) = 1$$

Etapa $t = 1$

Estado $s_1 = 1$

$$J_1(1) = \min_{a_1 \in \{0,1\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_1 + (2\max\{0, 1 + a_1\} + 3\max\{0, -1 - a_1\} + J_2(\max\{0, 1 + a_1\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 0 + a_1\} + 3\max\{0, 0 - a_1\} + J_2(\max\{0, 0 + a_1\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, -1 + a_1\} + 3\max\{0, 1 - a_1\} + J_2(\max\{0, -1 + a_1\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los dos valores posibles de a_1 *el valor entre corchetes*:

$$\begin{aligned}
& \textit{Cuando } a_1 \textit{ toma el valor de 0:} \\
& \quad 2(0) + (2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\} + J_2(\text{máx}\{0,1\}))(0.1) \\
& \qquad +(2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_2(\text{máx}\{0,0\}))(0.5) \\
& \qquad +(2\,\text{máx}\{0,-1\} + 3\,\text{máx}\{0,1\} + J_2(\text{máx}\{0,-1\}))(0.4) \\
= {} & (6.6)(0.1) + (6.6)(0.5) + (9.6)(0.4) = 7.8 \\
& \textit{Cuando } a_1 \textit{ toma el valor de 1:} \\
& \quad 2(1) + (2\,\text{máx}\{0,2\} + 3\,\text{máx}\{0,-2\} + J_2(\text{máx}\{0,2\}))(0.1) \\
& \qquad +(2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\} + J_2(\text{máx}\{0,1\}))(0.5) \\
& \qquad +(2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_2(\text{máx}\{0,0\}))(0.4) \\
= {} & 2 + (7.6)(0.1) + (6.6)(0.5) + (6.6)(0.4) = 8.7
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_1 = 0$ *teniendo*

$$J_1(1) = 7.8 \qquad \textit{con} \qquad d_1^*(1) = 0$$

Etapa $t = 1$

Estado $s_1 = 2$

$$\begin{aligned}
J_1(2) &= \min_{a_1 \in \{0\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_1 + (2\,\text{máx}\{0,2+a_1\} + 3\,\text{máx}\{0,-2-a_1\} + J_2(\text{máx}\{0,2+a_1\}))(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0,1+a_1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1-a_1\} + J_2(\text{máx}\{0,1+a_1\}))(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0,0+a_1\} + 3\,\text{máx}\{0,0-a_1\} + J_2(\text{máx}\{0,0+a_1\}))(0.4) \end{array} \right\} \\
&= \begin{array}{r} 2(0) + (2\,\text{máx}\{0,2\} + 3\,\text{máx}\{0,-2\} + J_2(\text{máx}\{0,2\}))(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0,1\} + 3\,\text{máx}\{0,-1\} + J_2(\text{máx}\{0,1\}))(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0,0\} + 3\,\text{máx}\{0,0\} + J_2(\text{máx}\{0,0\}))(0.4) \end{array} \\
&= (7.6)(0.1) + (6.6)(0.5) + (6.6)(0.4) = 6.7
\end{aligned}$$

Teniendo

$$J_1(2) = 6.71 \qquad \textit{con} \qquad d_1^*(2) = 0$$

Etapa $t = 0$

Estado $s_0 = 0$

$$J_1(0) = \min_{a_0 \in \{0,1,2\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_0 + (2\,\text{máx}\{0,a_0\} + 3\,\text{máx}\{0,-a_0\} + J_1(\text{máx}\{0,a_0\}))(0.1) \\ +(2\,\text{máx}\{0,a_0-1\} + 3\,\text{máx}\{0,1-a_0\} + J_1(\text{máx}\{0,a_0-1\}))(0.5) \\ +(2\,\text{máx}\{0,a_0-2\} + 3\,\text{máx}\{0,2-a_0\} + J_1(\text{máx}\{0,a_0-2\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los tres valores posibles de a_0 *el valor entre corchetes*:

$$\begin{aligned}
& \textit{Cuando } a_0 \textit{ toma el valor de 0:} \\
& \quad 2(0) + (2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_1(\max\{0,0\}))(0.1) \\
& \quad +(2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\} + J_1(\max\{0,-1\}))(0.5) \\
& \quad +(2\max\{0,-2\} + 3\max\{0,2\} + J_1(\max\{0,-2\}))(0.4) \\
= \; & (9.8)(0.1) + (12.8)(0.5) + (15.8)(0.4) = 13.7 \\
& \textit{Cuando } a_0 \textit{ toma el valor de 1:} \\
& \quad 2(1) + (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\} + J_1(\max\{0,1\}))(0.1) \\
& \quad +(2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_1(\max\{0,0\}))(0.5) \\
& \quad +(2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\} + J_1(\max\{0,-1)))(0.4) \\
= \; & 2 + (9.8)(0.1) + (9.8)(0.5) + (12.8)(0.4) = 13 \\
& \textit{Cuando } a_0 \textit{ toma el valor 2:} \\
& \quad 2(2) + (2\max(0,2) + 3\max\{0,-2\} + J_1(\max\{0,2\}))(0.1) \\
& \quad +(2\max(0,1) + 3\max\{0,-1\} + J_1(\max\{0,1\}))(0.5) \\
& \quad +(2\max(0,0) + 3\max\{0,0\} + J_1(\max\{0,0\}))(0.4) \\
= \; & 4 + (10.7)(0.1) + (9.8)(0.5) + (9.8)(0.4) = 13.89
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es a_1 *teniendo*

$$J_1(0) = 13 \qquad \textit{con} \qquad d_1^*(0) = 1$$

Etapa $t = 0$

Estado $s_0 = 1$

$$J_0(1) = \min_{a_0 \in \{0,1\}} \left\{ \begin{array}{r} 2a_0 + (2\max\{0, 1+a_0\} + 3\max\{0,-1-a_0\} + J_1(\max\{0,1+a_0\}))(0.1) \\ +(2\max\{0,0+a_0\} + 3\max\{0,0-a_0\} + J_1(\max\{0,0+a_0\}))(0.5) \\ +(2\max\{0,-1+a_0\} + 3\max\{0,1-a_0\} + J_1(\max\{0,-1+a_0\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

Calculamos para cada uno de los dos valores posibles de a_0 *el valor entre corchetes*:

$$\begin{aligned}
& \textit{Cuando } a_0 \textit{ toma el valor de 0:} \\
& \quad 2(0) + (2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\} + J_1(\max\{0,1\}))(0.1) \\
& \quad +(2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_1(\max\{0,0\}))(0.5) \\
& \quad +(2\max\{0,-1\} + 3\max\{0,1\} + J_1(\max\{0,-1\}))(0.4) \\
= \; & (9.8)(0.1) + (9.8)(0.5) + (12.8)(0.4) = 11 \\
& \textit{Cuando } a_0 \textit{ toma el valor de 1:} \\
& \quad 2(1) + (2\max\{0,2\} + 3\max\{0,-2\} + J_1(\max\{0,2\})(0.1) \\
& \quad +(2\max\{0,1\} + 3\max\{0,-1\} + J_1(\max\{0,1\}))(0.5) \\
& \quad +(2\max\{0,0\} + 3\max\{0,0\} + J_1(\max\{0,0\}))(0.4) \\
= \; & 2 + (10.7)(0.1) + (9.8)(0.5) + (9.8)(0.4) = 11.89
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de minimización es $a_0 = 0$ teniendo

$$J_0(1) = 11 \quad con \qquad d_0^*(1) = 0$$

Etapa $t = 0$

Estado $s_0 = 2$

$$J_0(2) = \min_{a_0 \in \{0\}} \left\{ \begin{array}{c} 2a_0 + (2\max\{0, 2 + a_0\} + 3\max\{0, -2 - a_0\} + J_1(\max\{0, 2 + a_0\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 1 + a_0\} + 3\max\{0, -1 - a_0\} + J_1(\max\{0, 1 + a_0\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, 0 + a_0\} + 3\max\{0, 0 - a_0\} + J_1(\max\{0, 0 + a_0\}))(0.4) \end{array} \right\}$$

$$= \begin{array}{c} 2(0) + (2\max\{0, 2\} + 3\max\{0, -2\} + J_1(\max\{0, 2\}))(0.1) \\ +(2\max\{0, 1\} + 3\max\{0, -1\} + J_1(\max\{0, 1\}))(0.5) \\ +(2\max\{0, 0\} + 3\max\{0, 0\} + J_1(\max\{0, 0\}))(0.4) \end{array}$$

$$= (10.7)(0.1) + (9.8)(0.5) + (9.8)(0.4) = 9.89$$

Teniendo

$$J_0(2) = 9.89 \quad con \qquad d_0^*(2) = 0$$

Resultados

Los resultados se resumen en las Tablas 4.1 y 4.2. La interpretación de la Tabla 4.1 es la siguiente: en cualquier época de decisión t=0,1,2,3 si estado del inventario es cero la decisión óptima es ordenar una unidad del producto y en otro caso la decisión es no ordenar.

	Estados		
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**
3	1	0	0
2	1	0	0
1	1	0	0
0	1	0	0

Tabla 4.1: Acción de control óptima

Así, la política óptima $(d_0^*(s_0), d_1^*(s_1), d_2^*(s_2), d_3^*(s_3))$ de ordenar que se ha encontrado puede expresarse como

$$d_t^*(s_t) = \begin{cases} 1, & si\ s_t = 0 \\ 0, & si\ s_t > 0 \end{cases}$$

Los costos esperados mínimos acumulados a partir de cada época de decisión en adelante para cada estado se muestran en la Tabla 4.2. El costo total esperado mínimo para cada estado inicial se muestra en el último renglón.

	Estados		
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**
3	3.4	1.4	1.4
2	6.6	4.6	3.6
1	9.8	7.8	6.7
0	13	11	9.89

Tabla 4.2: Costo

Ejemplo 4.2 *Para facilitar los cálculos se realizó un programa en Matlab (ver Apéndice A); a continuación se muesta los datos de entrada del programa y los resultados obtenidos para otro problema con mayor complejidad.*

- *Sea* $p = [0.040, 0.160, 0.800, 0.120, 0.080, 0.080, 0.160, 0.080, 0.200]$ *el vector de probabilidad de la demanda.*
- *Horizonte de planeación* $N = 8$ *Periodos*
- *Costo por ordenar* $= 1.2$
- *Costo por mantener una unidad en almacen* $= 3$
- *Costo de escasez por unidad* $= 4$
- *La maxima capacidad* $= 7$
- *Costo terminal igual a* 0

Los resultados obtenidos son:

El programa genera la sucesión de acciones óptimas y se muestran en la tabla 4.3. La interpretación de dicha tabla es igual a la que se menciono en el ejemplo 4.1.

Los costos acumulados apartir de cada epoca de decisión para cada estado se muestra en la Tabla 4.4. El costo total esperado mínimo para cada estado inicial s es el que se encuentra en el primer renglon de la tabla.

Nota 4.1 *En este caso se consideró una capacidad máxima menor a la cantidad máxima posible que se puede pedir en la demana.*

	Estados							
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
4	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*
5	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*0*
6	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*
7	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*
8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

Tabla 4.3: Política óptima

	Estados							
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0.0268	0.0206	0.0173	0.0158	0.0163	0.0180	0.0206	0.0249
1	0.0811	0.0749	0.0687	0.0636	0.0607	0.0606	0.0629	0.0679
2	0.1941	0.1879	0.1817	0.1755	0.1693	0.1652	0.1641	0.1666
3	0.4308	0.4246	0.4184	0.4123	0.4061	0.3999	0.3948	0.3927
4	0.9299	0.9237	0.9176	0.9114	0.9052	0.8990	0.8928	0.8871
5	1.9838	1.9776	1.9714	1.9652	1.9591	1.9529	1.9467	1.9405
6	4.2109	4.2047	4.1985	4.1923	4.1862	4.1800	4.1738	4.1676
7	8.9175	8.9113	8.9051	8.8989	8.8927	8.8865	8.8803	8.8741

Tabla 4.4: Costos

4.2. Variantes del modelo de control de inventarios

A continuación se presenta otro modelo de inventarios con el fin de mostrar sus variantes, las cuales pueden ser consideradas en cualquier modelo de inventarios con sus respectivas adecuaciones. Dicho modelo fue retomado de [16].

4.2.1. Modelo de control de inventarios

Sea s_t el inventario disponible al inicio del periodo t, $\;t = 0, 1, 2, ..., N$ y a_t el número de unidades ordenadas por el admisnistrador del inventario e inmediatamente surtidas, también en el inicio del periodo t. ω_t denotará la demanda aleatoria en el periodo t y se supondrá que tiene distribución de probabilidad conocida homogenea en el tiempo $p_w = P(\omega = w),\ \ w = 0, 1, 2, ...$

El inventario s_{t+1} en la epoca de decisión $t+1$ es relacionado con el inventario s_t en la epoca t, a través de la ecuación en diferencias $s_{t+1} = \text{máx}\{s_t + a_t - \omega_t, 0\} \equiv [s_t + a_t - \omega_t]^+$, es decir, que no están permitidos los pedidos pendientes y el nivel del inventario no puede ser negativo, así, cuando $s_t + a_t - \omega_t < 0$, el nivel del inventario en la época de decisión subsecuente será 0.

El valor presente del costo por ordenar a unidades en cualquier mes se denotará por $O(a)$. Se supondrá que dicho costo está compuesto por un costo fijo $K > 0$ por realizar pedidos y un costo variante $c(a)$ que crece con la cantidad ordenada. Por lo tanto

$$O(a) = \begin{cases} K + c(a) & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

K es identificado como costo por pedido y $c(a)$ es el costo por reabastecimiento (adquisición). En algunos modelos se omite K en el proceso de optimización dado que es considerado constante

El valor presente por mantener un inventario de s unidades por un periodo se representará por una función no decreciente $h(s)$. En un problema con horizonte finito, el inventario restante en la última época de decisión tendrá un valor $g(s)$. Finalmente, si la demanda es de w unidades y el inventario disponible s es suficiente para reunir la demanda, el gerente recibe un ingreso con valor presente $f(w)$ y se supone que $f(0) = 0$.

En este modelo en vez de costo se considera una recompensa por periodo, la cual depende del estado del sistema en la subsecuente época de decisión, y en el caso de que se cubra la demanda, está dada por:

$$r_t(s_t, a_t, s_{t+1}) = -O(a_t) - h(s_t + a_t) + f(s_t + a_t - s_{t+1})$$

Para cálculos posteriores, es más conveniente considerar $r_t(s_t, a_t)$. Entonces, puede calcularse $F_t(w)$, el valor presente esperado (en el inicio del periodo t) del ingreso recibido en el periodo t cuando el inventario antes de recibir los pedidos del cliente es de s unidades. Esto se deriva de la siguiente forma:

- Si el inventario s excede la demanda w , el valor presente del ingreso es $f(w)$, lo cual ocurre con probabilidad p_w.

- Si la demanda excede el inventario, el valor presente del ingreso es igual a $f(s)$, esto ocurre con probabilidad $q_s = \sum_{j=s}^{\infty} p_j$.

Así,

$$F(w) = \sum_{j=0}^{w-1} f(j)p_j + f(w)q_w$$

De esa manera, el modelo de decisión de Markov para el problema de inventario queda determinado de la siguiente manera:

Épocas de decisión:

$$T = \{1, 2, \dots, N\} \qquad N \leq \infty$$

Estados: la cantidad de inventario disponible al inicio del periodo t suponiendo un depósito con capacidad máxima M

$$S = \{0, 1, 2, \dots, M\}$$

Acciones: la cantidad adicional del stock para ordenar en el periodo t

$$A_s = \{0, 1, 2, \dots, M - s\}$$

Recompensa esperada por periodo: Ingreso esperado menos los costos por ordenar y mantener inventario

$$r_t(s, a) = F(s + a) - O(a) - h(s + a) \qquad t = 1, 2, \dots, N - 1$$

y

$$r_N(s) = g(s)$$

Probabilidades de Transición:

$$p_t(j|s, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \geq j > s + a \\ p_{s+a-j} & \text{si } M \geq s + a \geq j > 0 \\ q_{s+a} & \text{si } M \geq s + a \text{ y } j = 0 \end{cases}$$

4.2.2. Modelos con reserva de demanda

Suponga que si la demanda no se cubre con el inventario actual, el resto se cubrirá posteriormente. Entonces el modelo anterior debe modificarse de la siguiente manera:

1. El espacio de estados $S = \{..., -1, 0, 1, ..., M\}$, donde los estados negativos corresponden a demandas pendientes o atrasadas.

2. El costo de mantenimiento $h(s)$ se define también para los valores negativos de s. Cuando $s < 0$, puede considerarse como un costo de penalización asociado con la demanda insatisfecha. Una forma típica para $h(s)$ es

$$h(s) = \begin{cases} -\phi & s < 0 \\ \eta x & s \geq 0 \end{cases}$$

donde ϕ y η son constantes positivas.

3. La ley de transición del sistema será la siguiente:

$$s_{t+1} = s_t + u_t - w_t$$

4.2.3. Retraso en la entrega de órdenes

Suponga un retraso de $L-$periodos $(L > 0)$ entre el momento de hacer un pedido para reponer el inventario y su entrega. Es decir, una orden colocada al principio del mes t no está disponible para satisfacer la demanda hasta el inicio del periodo $L + t$. De la ecuación de la dinámica del sistema (3.5.4) se obtiene

$$s_{t+1} = [s_1 + a_{t-L} - w_t]^+,$$

donde a_{t-L} es la cantidad ordenada en el periodo $t - L$ para satisfacer la demanda en el periodo t.

Dado que el nivel de stock en el momento t puede exceder de M, es más natural formar este modelo con $S = \{0, 1, ...\}$ y $A_s = \{0, 1, ...\}$.

4.2.4. Demandas correlacionadas

En la práctica, las demandas en sucesivos periodos pueden ser corelacionadas. El esquema más simple para representarla es uno en que se supone una correlación entre la demanda del periodo $t + 1$ y el periodo t de ρ_t , donde $-1 \leq \rho_t \leq 1$. Cuando ρ_t es negativo la demanda alta es usualmente seguida de una demanda baja y cuando ρ_t es positivo la demanda alta es usualmente seguida por una demanda alta. Nos referimos a este esquema de correlación como autocorrelación de primer orden.

Esta situación puede ser modelada directamente usando

$$s_{t+1} = f_t(s_t, s_{t-1}, ..., s_1, a_1, , w_t, w_{t-1}, ..., w_1);$$

sin embargo, formularemos en términos de $s_{t+1} = f_t(s_t, a_t, w_t)$ usando el vector de estado bidimensional en el que la primer componente representa el nivel de inventario y la segunda componente el nivel de la demanda. Sea s_t^i el nivel de inventario al inicio del periodo t y s_t^d la demanda en el periodo t. Suponiendo que no hay retrasos en los pedidos y que no existe límite en la capacidad del almacen $s = \{0, 1, ...\} \times \{0, 1, ...\} \subset R^2$. Este modelo puede ser representado por el sistema de ecuaciones dinámicas

$$s_{t+1}^i = \left[s_t^i + a_t - s_t^d\right]^+ \tag{4.2}$$

$$s_t^d = \rho_t s_t^d + w_t \tag{4.3}$$

La ecuación 4.3 proporciona una representación para un sistema de autocorrelación de primer orden comúnmente utilizado en el modelado estadístico.

4.2.5. Inventario multiproducto, sin reserva y capacidad de almacenamiento ilimitada

Suponga que el gestor de inventario controla el nivel de k productos. Se gestionan juntos; se suponen demandas no correlacionadas y se considera un componente de costo fijo asociado con la colocación de un pedido para cualquier producto. Sea $S = S^1 \times S^2 \times ... \times S^k \subset R^k$, donde $S^i = \{0, 1, ...\}$ es el conjunto de posibles niveles de stock del producto i y $A = A^1 \times A^2 \times ... \times A^k \subset R^k$, donde $A = A^i = \{0, 1, ...\}$ es el conjunto de posibles cantidades del producto $i, i = 1, 2, ..., k$ a ordenar.

En este modelo, la ecuación dinámica se mantiene para cada producto individuaL, es decir

$$s_{t+1}^i = [s_t^i + a_t^i - w_t^i]^+, \qquad i = 1, 2, ..., k,$$

donde w_t^i es la demanda realizada para el producto i en el periodo t. Las probabilidades de transición se derivan de la distribución de la demanda conjunta $P\{\omega_t^1 = w_t^1, ..., \omega_t^k = w_t^k\}$. El costo de mantenimiento puede representarse por $h(s_t^1+a_t^1, ..., s_t^k+a_t^k)$, y el costo de ordenamiento por

$$0(a^1, ..., a^k) = \begin{cases} 0, & \text{si } a^i = 0 \quad i = 1, .., k \\ K + c(a^1, ...a^k), & \text{si } a^i > 0 \quad \text{para alguna } i \end{cases}$$

donde c es no-decreciente en cada componente de A.

Capítulo 5

Elementos para la aplicación del modelo de control de inventarios

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, existe diferentes casos prácticos donde se presenta el problema de control de inventarios, es importante mencionar que para la aplicación del modelo de inventarisos se debe tener todos los elementos del modelo de control de Markov que en la sección 2.2 se describieron y principalmente, dos de estos elementos son difíciles de determinar, estos son:

- la distribución de probabilidad de la demanda y
- los costos (por pedido, por mantenimiento, por escasez y por adquisición).

El objetivo de este capítulo es proporcionar herramientas que permitan determinar dichos elementos del modelo de control para poder llevar a cabo un control de inventario en un caso real. En primer lugar se propone una metodología para determinar la distribución de la probabilidad de la demanda a partir de observaciones de la demanda, porteriormente, se presentaran los conceptos necesarios para determinar los costos, así como ejemplos, sin embargo, cabe mencionar que los costos de forma general los determina cada empresa considerando los aspectos que mejor le convengan.

Otro inconveniente que puede presentarse al aplicar el modelo de control de inventarios, contar con el valor preciso del horizonte de planeación N, por lo tanto, se propone implementar un procedimiento de horizonte rodante para la obtención de la acción de control en cada etapa, el cual permitirá mejorar la estimación de la distribución de la demanda, agregando el dato observado de la demanda en la etapa anterior.

Finalmente se presentan dos ejemplos sobre el modelo de control de inventarios analizado mediante la teoría de procesos de decisión de Markov. Un ejemplo será sin horizonte rodante y el otro con horizonte rodante con el fin de observar las ventajas de considerar dicho horizonte rodante.

5.1. Distribución de probabilidad de la demanda

Unos de los elementos importantes para la aplicación del modelo de inventarios es la distribución de la probabilidad de la demanda, sin embargo, en la aplicación en un caso real es dificil contar con dicha distribución, por lo cual se propone, con bases teóricas, una metodología para la determinación de la distribución de probabilidad de la demanda mediante la distribución empírica. Por ello, a continuación se presenta una serie de resultados sobre la distribución empírica [12], los cuales serán de utilidad.

Sea $F(w)$ la función de distribución de una variable aleatoria ω y

$$w_0, w_1, ..., w_n \tag{5.1}$$

los resultados de una sucesión de ensayos independientes en circunstancias idénticas.

La sucesión ordenada de manera creciente de (5.1) se puede representar como sigue:

$$w^*_{0,k_0} < w^*_{1,k_1} < ... < w^*_{r,k_r}$$

donde k_i es el número de observaciones iguales a w^*_{i,k_i}, y $\sum_{i=0}^{r} k_i = n$. Tal sucesión ordenada es llamada sucesión de variación.

La función $F_n(w)$ definida como

$$F_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad w < w^*_{0,k_0}, \\ \frac{\sum_{j=1}^{i} k_j}{n} & \text{para} \quad w^*_{i,k_i} \leq w < w^*_{i+1,k_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \ldots, r-1 \\ 1 & \text{para} \quad w \geq w^*_{r,k_r}. \end{cases}$$

es llamada función de distribución empírica.

Observe que la función de distribución empírica es monótona y tiene sus puntos de discontinuidad en los valores que coinciden con los valores de la sucesión de variación. El tamaño del salto para los valores diferentes de la sucesión de variación es igual a $\frac{k_i}{n}$.

En el caso particular más simple donde la variable aleatoria ω puede tomar solo un número finito de valores $a_0, a_1, ...a_D,$, los términos de la sucesión de variación podrían ser solo estos valores. Si $k_0, k_1, ..., k_D$ $(k_0 + k_1 + .. + k_D = n)$ denotan el número de ensayos donde $\omega = a_0, \omega = a_1, ..., \omega = a_D$, entonces, por la ley de los grandes números, estas frecuencias (para un n suficientemente grande) representarán valores aproximados de las probabilidades desconocidas $p_0 = P\{\omega = a_0\}, p_1 = P\{\omega = a_1\}, ..., p_D = P\{\omega = a_D\}$, esto es $p_0 \approx k_0/n, p_1 \approx k_1/n, ..., p_D \approx k_D/n$. Lo descrito en este parrafo queda formalmente establecido el el siguiente teorema.

Lemma 5.1 ***(El Teorema de Borel)***. *Sea μ el número de ocurrencias de un evento A en n independientes ensayos en cada uno de los cuales el evento A podría ocurrir con probabilidad p. Entonces, cuando $n \to \infty$*

$$P\{\frac{\mu}{n} \to p\} = 1$$

La demostración del Teorema de Borel puede consultarse en [12], pag. 212.

Lemma 5.2 ***(Teorema de Glivenko)*** *Sea $F(w)$ la función de distribución de una variable aleatoria ω, y $F_n(w)$ la función de distribución empírica de n observaciones independientes de la variable aleatoria ω. Entonces, cuando $n \to \infty$*

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(w) - F(w)| \to 0\right\} = 1.$$

El Teorema de Glivenko permite estimar la función de distribución desconocida de una variable aleatoria ω a partir de observaciones de la variable; es llamado Teorema Principal de la Estadística. Su demostración puede consultarse en [12], pag.215.

5.1.1. Estimación de la distribución de probabilidad de la demanda

Recuerde que en el modelo de control de inventarios, la sucesión $\{\omega_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que representan la demanda en el periodo t. Dichas variables, por ser idénticamente distribuidas y por suponer que no varían de un periodo a otro, pueden ser representadas por una variable genérica ω.

De acuerdo con el Teorema de Borel, para la estimación de la distribución de probabilidad de ω, es necesario contar con observaciones de la demanda antes de iniciar el control del inventario y entre mayor el número de observaciones, mejor será la estimación de dicha distribución de probabilidad. El siguiente algoritmo, indica el procedimiento para la estimación de la distribución de la probabilidad de ω.

Algoritmo 5.1 ***Estimación de la distribución de la probabilidad de la demanda.***

1. *Sea C_n el vector correspondiente a las n observaciones de la demanda.*
2. *Hacer $D = \max C_n$.*
3. *Para i desde 0 hasta D, sea k_i el numero de observaciones iguales a i.*
4. *Hacer $\hat{p}_i = k_i/n$*

$\hat{p}_i$ es el valor estimado para $p_i = P(\omega = i)$, $i = 0, 1, \ldots, D$.

Ejemplo 5.1 *A continuación se mostrara un ejemplo, con el fin de poder apreciar la estimación de la distribución de probabilidad de la demanda basándose en el algoritmo 5.1. Sea:*

- $n = 20$ *observciones*
- $C_n = [1, 7, 4, 2, 0, 1, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 2, 3, 5, 6, 4, 1, 4, 3]$
- C_n *ordenado:* $[0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7]$
- $D = \max C_n = 7$

Demanda	0	1	2	3	4	5	6	7
k_i	1	3	3	4	4	3	1	1

Tabla 5.1: Número de observaciones igusles

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{p}_0 &= P(\omega = 0) = \frac{1}{20} = 0.05 \\
\hat{p}_1 &= P(\omega = 1) = \frac{3}{20} = 0.15 \\
\hat{p}_2 &= P(\omega = 2) = \frac{3}{20} = 0.15 \\
\hat{p}_3 &= P(\omega = 3) = \frac{4}{20} = 0.20 \\
\hat{p}_4 &= P(\omega = 4) = \frac{4}{20} = 0.20 \\
\hat{p}_5 &= P(\omega = 5) = \frac{3}{20} = 0.15 \\
\hat{p}_6 &= P(\omega = 6) = \frac{1}{20} = 0.05 \\
\hat{p}_7 &= P(\omega = 7) = \frac{1}{20} = 0.05
\end{aligned}$$

El Algoritmo 5.1 fue programado en Matlab para calcular automáticamente la distribución de probabilidad de la demanda con la simple introducción de las observaciones de la demanda y será incluido en el programa de control de inventarios presentado más adelante.

5.2. Costos

Para determinar los costos del modelo de control de inventarios deben tenerse en cuenta diversos factores, tales como rendimiento sobre la inversión, rotación de activos y cliclos de vida del producto. Muchos de estos factores se consideran y se revisan en documentos contables y financieros que se elaboran cada mes en la empresa. La mayor parte de los modelos básicos de invetarios se basan en compensaciones o intercambios de costos como criterios para el análisis. En general se consideran los siguientes costos:

1. Costo por pedido
2. Costo por adquisición
3. Costo por mantenimiento
4. Costo de escasez

La cantidad y el punto de un nuevo pedido suelen determinarse normalmente minimizando el costo total de inventario que se puede expresar como una función de estas dos variables. Se puede resumir de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo total}\\ \text{del inventario}\end{pmatrix} = \begin{matrix}\begin{pmatrix}\text{Costo por}\\ \text{pedido}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo por}\\ \text{adquisición}\end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix}\text{Costo por}\\ \text{mantenimiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{escasez}\end{pmatrix}\end{matrix}$$

A continuación se describen los costos mencionados.

5.2.1. Costo por pedido (preparación)

Cada vez que se formula un pedido de compra se gasta tiempo y, en consecuencia, dinero en todos los gastos anuales de estos departamentos se prorratea entre el número de pedidos hechos en el año, de esta manera se obtiene el costo unitario por pedido de compra.

Normalmente los pedidos de compra están archivados o encuadernados por número consecutivo. En la Tabla 5.2 se muestran algunos de los costos que deben considerarse para calcular el costo por pedido [10].

Costos de un pedido que ocurre 300 veces al año

Gasto	Sueldos anuales (en miles de pesos)	Personal	Costo anual (en miles de pesos)
Jefe de depertamento de compras	200	1	200
Compradores	140	3	420
Expeditores	60	2	120
Empleados	50	2	100
Secretarias	60	2	120
Empleados de recibo	40	2	80
Empleados de control de calidad	50	1	50
Empleados de cuentas por pagar	60	1	60
Papelería	–	–	10
Gastos generales	–	–	50
Total			1210

Tabla 5.2: Costo por pedido

De esa manera, el costo por pedido se obtiene como:

$$\frac{\$1210000}{300} = \$4033.333$$

5.2.2. Costo por adquisición

Para los modelos comerciales, el costo directo asociado con la compra real de un artículo se denomina costo de compra o de adquisición. Para los modelos de producción se denomina costo de producción. En cualquier caso, se supone que el costo unitario es constante sin importar cuál sea la cantidad que se compra o se fabrica. Sin embargo, debe relajarse este supuesto si se permite rupturas o cambios bruscos de cantidad y/o precios para tamaños específicos de los lotes, o si se pueden reducir los costos unitarios a través de corridas grandes de producción. Este último caso puede ocurrir como resultado de economías por operación a gran escala [9].

5.2.3. Costo por mantenimiento

Manejar y mantener existencias en los almacenes cuesta; por lo tanto, a mayor cantidad almacenada, de cualquier artículo o material, mayor es el incremento de su costo por unidad. Los factores más comunes que influyen dentro del costo de almacenamiento son los siguientes:

- *Costo de inversión:* el dinero causa réditos, ya sea a los accionistas, al propietario o bancos y financieros, cada peso invertido en existencias, aun siendo de fondos propios de la compañía, casusa réditos sobre el capital de trabajo de una empresa.
- *Espacio:* todo espacio tiene una rentabilidad; aun siendo el local propiedad de la empresa, el espacio ocupado tiene un valor de renta. El espacio ocupado por el promedio de inventario se multiplica por el precio de renta, por metro cuadrado o metro cúbico del almacén.
- *Personal:* hora-hombre requeridas según el volumen manejado y administrado.
- *Seguro:* sobre el valor del inventario y sobre los riesgos de distintos tipos de mercancías.
- *Impuestos*
- *Obsolescencia:* cambios de ingeniería, de modelos o facilidades para adquirir en el mercado; variaciones en la moda o en el uso, por parte del consumidor.
- *Desperdicio:* a mayor volumen almacenado mayor es el riesgo de que se estropee, se pierda o merme la mercancía almacenada [10].

5.2.4. Costo de escasez

Son aquellos en los que se incurre al no poder satisfacer una demanda. La magnitud del costo depende de si se permiten los pedidos retroactivos. Si estos no se permiten, entonces un agotamiento de inventario dará como resultado la pérdida permamente de ventas de los artículos que se demandaban y que no estaban disponibles. Podría incurrirse en un costo adcional de "buena voluntad"si el cliente deja de comprarle a la organización.

Cuando se permiten los pedidos retroactivos, los costos relevantes de agotamiento son los costos administrativos y de oficina asociados con esta actividad y que incluyen el costo de esfuerzos esenciales en estas áreas tiempo extra, manejo y transporte especial y seguimiento. Los agotamientos con pedidos retroactivos pueden dar como resultado la pérdida de algunos clientes como consiguiente puede incurrir en costo de buena voluntad, usualmente se mantiene un inventario de seguridad para protegerse en contra de agotamientos.

El costo de agotamiento se calcula de forma diferente, dependiendo de la situación. El caso más general supone un costo fijo por agotamiento, sin importar cuál sea su magnitud o el periodo durante el cual ocurre. Un método más directo consiste en suponer el costo por unidad. En ocasiones es más favorable considerar tanto el número de unidades que no se tienen como la duración del agotamiento [9].

A continuación se mostrará un ejemplos de costos donde se muestra el calculo de cada uno de los costos antes descritos.

Ejemplo 5.2 *La Atlantic Coast Tire Corporation (ACT) es el distribuidor de llantas Eversafe en la costa este. ACT surte a* 1500 *tiendas de menudeo y estaciones de autoservicio una docena de tamaños diferentes de llantas, de modo que tiene que mantener un inventario de cadad una. Ashley Collins es la gerente de inventario de ACT, hay un gran pedido por fax con Eversafe para reabastecer el inventario, entonces, Eversafe envía las llantas por camión para que lleguen nueve días laborables después de la colocación del pedido.*

Ashley enseguida centra su atención en la estimación de los valores de estos diversos costos. Un costo principal asociado con el mantenimiento de inventario de las llantas tamaño $185/70R13$ *es el costo para ACT de comprar las llantas. Eversafe cobra a ACT* \$20 *por llanta.*

$$\text{Precio de compra } = \$20 \text{ por llanta.} \tag{5.2}$$

Además de este costo de compra, ACT incurre en algunos costos administrativos adicionales cada vez que se coloca un pedido con Eversafe. Una orden de compra *tiene que iniciarse y procesarse. La compra debe recibirse, llevarse al almacén y registrarse en el sistema de procesamiento de información computarizado que vigila el estado del inventario. Luego tiene que procesarse el pago a Eversafe. Ashley estima que los costos de mano de obra (incluidos mano de obra y prestaiones) promedian* \$15 *por hora y que alrededor de* 6 *horas de mano de obra están asociados con la colocación de un pedido, lo que resulta en un costo de mano de obra de* \$90*. Además de estos costos directos de mano de obra, también hay costos indirectos asociados (supervisión, espacio de oficina y otros), que se estiman en* \$25*. La suma de estas dos cantidades es de* \$115*.*

$$\textit{Costo administrativo de colocar un pedido} = \$115 \tag{5.3}$$

Cuando ACT recibe un pedido de llantas de Eversafe, hay un número adicional de costos asociodos por mantener estas llantas en el inventario hasta que se vendan. El más importante es el costo de capital invertido en inventario. El contralor de ACT estima que el costo del capital comprometido es 15 % *anual. Por ejemplo, si el número promedio de llantas durante este año fue de* 500*, entonces el costo del capital invertido en este inventario es de*

$$0.15(500\ \textit{llantas})(\$20\ \textit{por llanta}) = \$1500$$

Los otros tipos de costos asociados con mantener llantas en inventario incluyen:

1. *Costos de arrendar el espacio de bodega por almacenar llantas.*
2. *Costo del seguro contra pérdida de inventario por incendio, robo, vandalismo, etc.*
3. *Costo del personal que supervisa y protege el inventario.*
4. *Impuesto basado en el valor del inventario.*

Con una base anual, se estima que la suma de estos costos es 6 % *del valor promedio del inventario que se mantiene. Al sumar* 6 % *y* 15 % *de costos del capital comprometido en inventario se obtiene* 21 %*. Por lo tanto, el costo total anual es* 0.21(\$20 *por llanta*)*.*

$$\begin{aligned}\textit{Costo anual de mantener inventario} &= \$4.20\ \textit{(número de llantas en} \\ &\quad \textit{inventario anuales)}\end{aligned} \tag{5.4}$$

El último costo que puede incurrir como resultado de la política de inventarios de ACT es el costo de que ocurra un faltante. Las consecuencias importantes son:

1. *Insatisfacción en el cliente cuyo resultado es la pérdida de buena voluntad y quizá la pérdida de algunas ventas futuras.*

2. *La necesidad potencial de que ACT baje su precio en las llantas que se entreguen con retraso con el fin de que sus clientes acepten las llantas con retraso.*

3. *Aceptación de pago retrasado por llantas entregadas tarde, con lo que se retrasan los ingresos.*

4. *Los costos adicionales de contabilidad y otros costos de mano de obra requeridos por faltantes de llantas.*

El costo total de estas consecuencias es más o menos proporcional al número de llantas faltantes y al periodo que dura el faltante. Después de consultarlo con la alta dirección, Ashley estima que este costo con base anual es de \$7.50 *multiplicado por el número promedio de llantas faltantes durante el año. Por ejemplo, suponga que en un año ACT tiene faltantes un total de* 30 *días*$\left(\frac{1}{12}\text{ del año}\right)$ *y el número promedio de llantas faltantes es de* 120*. Por lo tanto, el número promedio de llantas faltantes durante el año es de* $120\left(\frac{1}{12}\right) = 10$*, de modo que el costo anual es de* $10(\$7.50) = \$75$.

$$\text{El costo anual por faltantes} = \$7.50(\text{número promedio de llantas faltantes durante el año}) \quad (5.5)$$

Este ejemplo fue retomado de [14].

5.3. Horizonte rodante

Otro inconveniente, al momento de aplicar el modelo de control de inventario, es que también el horizonte de planeación N pudiera ser no especificado. En este caso, se propone usar un procedimiento de horizonte rodante para la obtención de la acción de control en cada época de decisión, proporcionando un valor adecuado para el horizonte rodante H. De esa manera, se obtendrán las acciones de control para los periodos necesarios.

Una ventaja que se podrá tener con la aplicación de un procedimiento de horizonte rodante, es que los datos de la demanda observados en periodos ya controlados podrán agregarse para mejorar la estimación de la distribución de la demanda, incluso podrán modificarse costos en caso de ser necesario. El horizonte rodante (RH-Rolling horizon) es el método mediante el cual la mayor parte de los modelos, se aplica en el mundo real.

Este método es muy popular en la industria para hacer frente a la incertidumbre, dado que un horizonte finito a largo plazo presenta deficiencias, ligado a que la mayoría de aplicaciones estáticas se basan en previsiones, y éstas, tienen errores. El esquema de planificación en horizonte rodante ha sido propuesto por muchos investigadores como estrategia para medir los efectos de la incertidumbre y bajo esta óptica también se puede utilizar esta aproximación para estudiar el efecto de la complejidad en la cadena de suministro.

El esquema consiste en dividir un horizonte muy largo, en pequeños sub-problemas con horizontes más cortos; en cada uno de esos horizontes, el problema es resuelto en detalle y la información va siendo agregada al horizonte de planificación a medida que evoluciona el tiempo.

Ejemplo 5.3 *A modo de ejemplo, en la Figura 5.1 se muestra cómo se va ejecutando el horizonte rodante dentro de un horizonte de planificación, se puede observar:*

- *La lógica de funcionamiento del horizonte rodante.*
- *Las zonas en un periodo de planificación.*
- *Las decisiones que se implementan a medida que se evoluciona en el tiempo en los periodos pertenecientes a las zonas congeladas.*

  Donde:

H *es el horizonte de planificación a largo plazo.*
h *es el horizonte rodante de planificación en el corto plazo.*
RA *es el retraso anticipado (restricciones en la re-planificación)*
PR *es el periodo de re-planeación.*

Por otro lado como se observa en la Figura 5.1, un horizonte rodante de planificación está formado por tres zonas:

- *La zona congelada: es la parte del periodo donde las decisiones no se pueden cambiar, y está determinado por el periodo de re-planeación.*

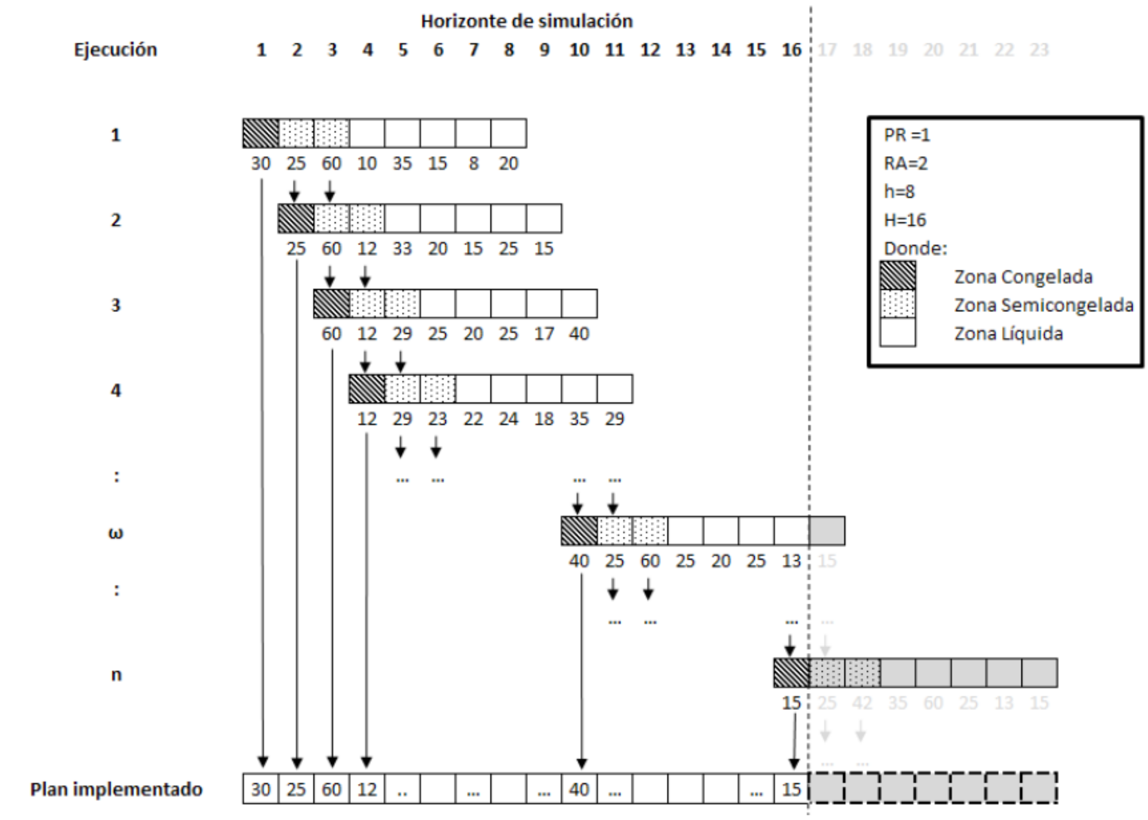

Figura 5.1: Horizonte rodante

- *La zona semi-congelada: es la parte del horizonte rodante a partir del periodo congelado, en el que algunas decisiones se pueden cambiar, y está determinado por el retraso de anticipación.*

- *La zona liquida: es el resto de periodos en el que se pueden modificar todas las decisiones.*

El periodo de re-planeación (PR) corresponde al número de periodos que deben esperarse hasta que es calculado nuevamente el plan. En el tiempo de replaneación las decisiones quedan congeladas. Como se ha definido previamente, la zona congelada es esa parte del periodo en el que las decisiones que se implementan no se pueden cambiar y está determinada por PR, esto significa que se tienen PR periodos de tiempo congelados dentro de un horizonte rodante h con la misma decisión.

Generalmente, las decisiones no se pueden aplicar de manera instantánea, porque requieren de un conjunto de actividades organizacionales que toman un tiempo de preparación. A este tiempo en el que se implementa la decisión hasta que es efectiva se le conoce como tiempo de retraso anticipado (RA), y depende de la naturaleza de la decisión. Por otro lado, la zona semi-congelada corresponde a la parte del horizonte rodante donde algunas decisiones se pueden cambiar y otras quedan fijas. Esta zona comienza a partir de la zona congelada y su longitud es el máximo de los tamaños el retraso de anticipación del conjunto que se no se pueden modificar durante ese periodo. En ese sentido, este conjunto de decisiones que quedan fijas se convierten en restricciones que deben cumplirse en el siguiente periodo de re-planeación [8].

El procedimiento de horizonte rodante es el método más común aplicado en la práctica para aproximar soluciones a problemas de control óptimos no homogéneos con horizonte infinito dentro de la Teoría de Procesos de Decisión de Markov (véase [2]). Primero se fija un horizonte rodante H, luego se procede a resolver el problema correspondiente de H periodos y se implementa la primera decisión óptima encontrada, se rueda hacia adelante un periodo y se repite el procedimiento a partir del estado actual y así sucesivamente. Enseguida, se presenta el algoritmo de horizonte rodante.

Algoritmo 5.2 *Horizonte rodante*

1. *Hacer* $m = 0$ *y* $n = H$.

2. *Hallar la polítitica* $\pi^* = (\pi^*_m, \pi^*_{m+1}, ..., \pi^*_{n-1})$, *la cual es óptima para los periodos de* m *a* n, *y sea* $\hat{\pi}_m = \pi^*_m$.

3. Hacer $m = m + 1$ *y* $n = n + 1$.

4. Regresar al Paso 2.

La política $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, ...)$ es una política de horizonte rodante.

La política de horizonte rodante en algunos casos puede ser no óptima, un ejemplo se presenta en [2], donde también se proveé un error teórico para el procedimiento de horizonte rodante aplicado a procesos de decisión de Markov no homogéneos con horizonte infinito.

5.4. Control de un inventario real

Para llevar acabo la aplicación del modelo de control de inventarios, como ya se mencionó anteriormente, es necesario la distribución de probabilidad de la demanda y los costos, la Figura 5.2, muestra un diagrama de flujo que permite el control de un inventario. Dicho diagrama permite la modificación de costos y/o demanda en cualquier época de decisión y la acción de control obtenida es de horizonte rodante. En el Algoritmo 5.2 la solución óptima de los problemas de control de tamaño H es hallada mediante programación dinámica, de acuerdo con el Teorema 1. Para la obtención de resultados se ha elaborado un programa en Matlab (ver Apéndice C) que incluye el Algoritmo 5.1 para la obtención de la distribución de la probabilidad de la demanda y el algoritmo de Programación Dinámica indicado en el Teorema 1 y (4.1), así como también el Algoritmo 5.2. Para mostrar lo anterior, se muestran dos ejemplos en la subsección 5.4.1.

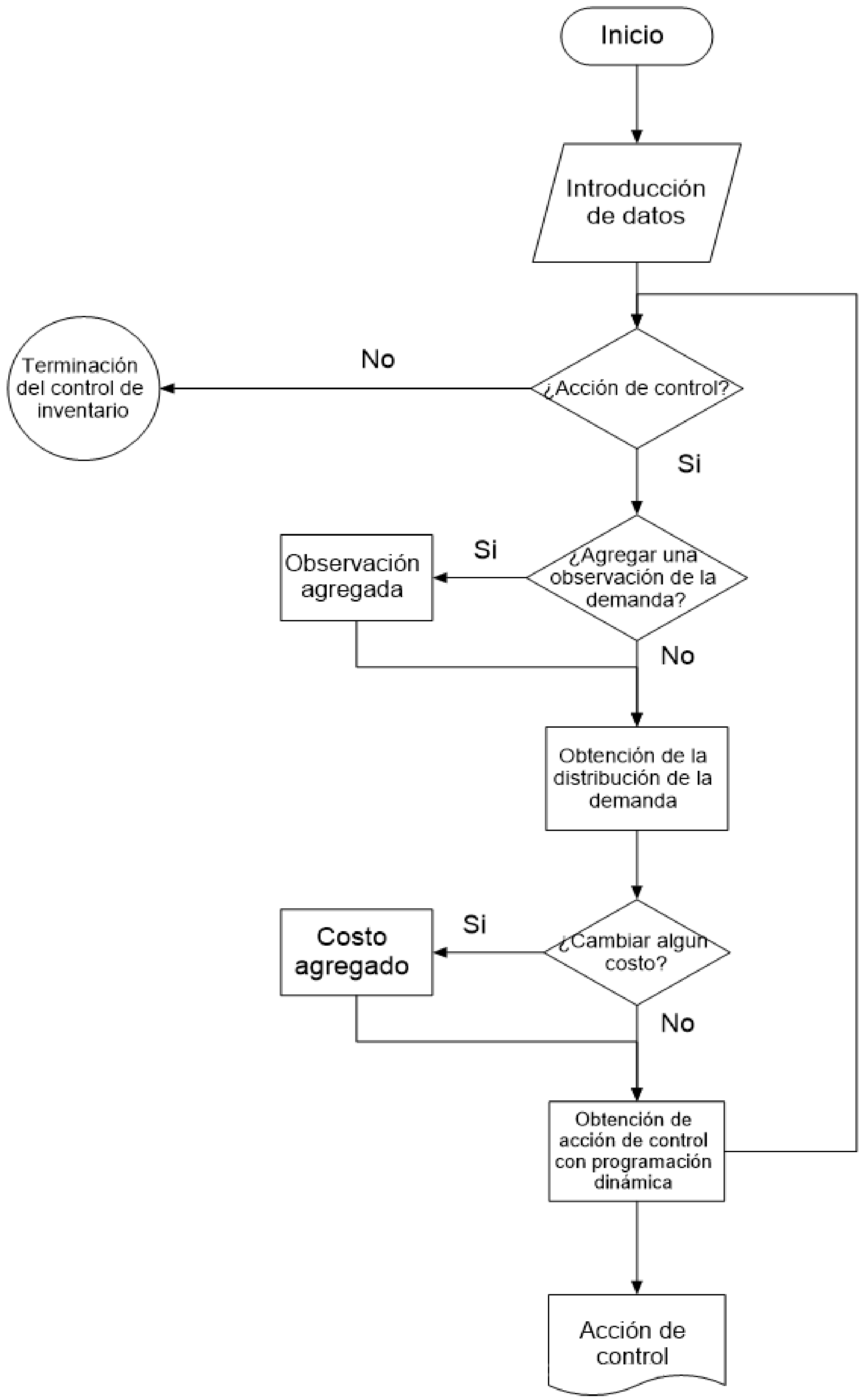

Figura 5.2: Diagrama de fujo para el control del inventario

5.4.1. Ejemplos

Ejemplo 5.4 *En este primer ejemplo se tiene un horizonte de planeación finito N. El programa, presentado en el Apéndice B genera los siguientes datos:*

- *Distribución de la probabilidad de la demanda.*
- *La acción de control óptima para el número de periodos establecidos.*
- *El costo total esperado acumulado de cada estado para cada etapa.*

Considere el problema de control de inventarios presentado en este trabajo, con los siguientes valores de los parámetros del modelo:

- *Vector de observaciones de la demanda:*

$$C_{20} = [2, 4, 1, 6, 3, 3, 5, 6, 3, 1, 4, 2, 6, 6, 4, 3, 1, 5, 2, 4]$$

- *Horizonte de planeación:* $N = 10$ *periodos*
- *Costo por ordenar:* $d = 3$
- *Costo por mantenimiento:* $h = 4$
- *Costo por escasez:* $p = 4$
- *Máxima capacidad del inventario:* $M = 5$

Resultados *Para el vector de observaciones de la demanda antes mencionado, la distribución de probabilidad de la demanda estimada se muestra en el siguiente vector p. La política óptima se representa en la Tabla 5.3 y el costo total esperado acumulado, se muestra en la Tabla 5.4.*

$$p = [0.150, 0.150, 0.20, 0.20, 0.10, 0.20]$$

	Estados					
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	3	2	1	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0
3	3	2	1	0	0	0
4	3	2	1	0	0	0
5	3	2	1	0	0	0
6	3	2	1	0	0	0
7	3	2	1	0	0	0
8	4	3	2	1	0	0
9	3	2	1	0	0	0
10	3	2	1	0	0	0

Tabla 5.3: Acción de control óptimo

Ejemplo 5.5 *En este segundo ejemplo se implementa el procedimiento de horizonte rodante como se establece en 5.2, se hicieron 5 iteraciones modificando los datos tanto en la demanda como en los costos para apreciar los cambios en la decisión óptima. A continuación se especifican los cambios en los datos en cada iteración y los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 5.5 y 5.6.*

Iteración 1 *Datos iniciales:*

- *El vector de observaciones de la demanda :*

$$C_{10} = [9, 10, 13, 16, 13, 14, 9, 12, 11, 14]$$

- *Costo por ordenar:* $d = 2$
- *Costo por mantenimiento:* $h = 1$
- *Costo por escasez:* $p = 4$
- *Máxima capacidad del inventario:* $M = 15$

Iteración 2 *Se agrega un dato a la demanda y se modifican los costos.*

- *Vector de observaciones de la demanda:*

$$C_{11} = [9, 10, 13, 16, 13, 14, 9, 12, 11, 14, 16]$$

	Estados					
Épocas de decisión	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	13.20	10.20	7.40	5.80	5.80	7.40
2	26.150	23.150	20.150	17.680	16.420	16.620
3	39.100	36.100	33.100	30.600	29.179	29.020
4	52.050	49.050	46.050	43.550	42.125	41.936
5	65.000	62.000	59.000	56.500	55.075	54.886
6	77.950	74.950	71.950	69.450	68.025	67.836
7	90.900	87.900	84.900	82.400	80.975	80.786
8	103.85	100.85	97.850	95.350	93.925	93.736
9	116.80	113.80	110.80	108.300	106.875	106.686
10	129.75	126.75	123.750	121.250	119.825	119.636

Tabla 5.4: Costos

- *Costo por ordenar:* $d = 1$
- *Costo por mantenimiento:* $h = 3$
- *Costo por escasez:* $p = 1$

Iteración 3 *Se agrega un dato a la demanada y se modifican los costos.*

- *Vector de observaciones de la demanda:*

$$C_{12} = [9, 10, 13, 16, 13, 14, 9, 12, 11, 14, 16, 5]$$

- *Costo por ordenar:* $d = 2$
- *Costo por mantenimiento:* $h = 4$
- *Costo por escasez:* $p = 4$

Iteración 4 *Se agrega un dato a la demanada y se mantienen los costos de la iteración anterior.*

- *Vector de observaciones de la demanda:*

$$C_{13} = [9, 10, 13, 16, 13, 14, 9, 12, 11, 14, 16, 5, 15]$$

Iteración 5 *Se modifican solo los costos.*

- *Costo por ordenar:* $d = 1$
- *Costo por mantenimiento:* $h = 3$
- *Costo por escasez:* $p = 2$

Resultados

En la Tabla 5.5 se muestra la distribución de probabilidad de la demanda estimada para cada iteación para apreciar los cambios conforme se agrega un dato a la demanda.

En la Tabla 5.6 se muestra la política de horizonte rodante obtenida. Nos indica cuantas unidades ordenar dependiendo de la época de decisión y el nivel de inventario (estado) del sistema.

Iteración	**Distribución de probabilidad de la demanda**
1	$p = [0.20, 0.10, 0.10, 0.10, 0.20, 0.20, 0.10]$
2	$p = [0.1818, 0.0909, 0.0909, 0.0909, 0.1818, 0.1818, 0.1818]$
3	$p = [0.0833, 0.1667, 0.0833, 0.0833, 0.0833, 0.1667, 0.1667, 0.1667]$
4	$p = [0.0769, 0.1538, 0.0769, 0.0769, 0.0769, 0.1538, 0.1538, 0.0769, 0.1538]$
5	$p = [0.0769, 0.1538, 0.0769, 0.0769, 0.0769, 0.1538, 0.1538, 0.0769, 0.1538]$

Tabla 5.5: Estimación de la distribución de probabilidad

	Estados															
Época de decisión	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
2	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
3	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0
4	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
5	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0

Tabla 5.6: Política de horizonte rodante

Observación 5.1 *Los datos utilizados en ambos ejemplos fueron seleccionados de forma aleatoria, y en el caso del ejemplo 5.5, se hicieron modificaciones de tal manera que se pudieran observar los cambios en las acciones de control óptimas.*

Capítulo 6

Conclusiones

Para que una empresa se mantenga en el mercado como una empresa competitiva necesita establecer herramientas o estrategias de planeación, control y administración de inventarios, ya que se requiere un sistema que pueda adaptarse a los cambios y exigencias, con el fin de reducir costos.

En este trabajo se ha estudiado mediante la teoría de procesos de decisión de Markov un modelo de control de inventarios, con el costo total esperado como función de rendimiento de planeación finito. Se describieron de forma detallada todo los elementos necesarios para determinar medienate Programación Dinámica la política de control óptima.

Una de las problemáticas en la aplicación real es no contar con la distribución de probabilidad de la demanda estocástica. Entonces, se propone estimar dicha distribución mediante la distribución empírica a partir de observaciones previas de la demanda.

Otro aspecto importante en la aplicación real son los costos, se realizó una descripción de forma general de los componentes para determinar los costos, sin embargo, dichos costos siempre dependen de la empresa y no son facíl de obtener.

Además, se sugiere utilizar un procedimiento de horizonte rodante, que permite el control de un inventario, aun cuando se desconozca el horizonte planeación. Al realizar el programa en Matlab con horizonte rodante también se permitió hacer modificaciones a los costos en caso de ser necesarios.

De forma general se puedo observar en los ejemplos que la acción de control cambia más al hacer modificación en los costos que al agregar un dato a la demanda, sin embargo se mostró que al incrementar las observaciones de la demanda se obtinen una mejor estimación de la distribución de probabilidad de la demanda y a largo plazo influirá en la acción de control.

Se sabe que en la aplicación real los costos son un elemento cambiante e incluso de forma drástica, ya que depende de la época del año en la que se encuentre, la materia o producto puede llegar a escasear o puede haber en abundancia y de ello puede llegar a cambiar el costo. Siendo justificable la propuesta de poder modificar los costos cuando sea necesario.

El modelo estudiado en este trabajo no pudo ser aplicado en un caso real debido a la poca disponibilidad de las empresas en proporcionar datos e infromación necesaria. Sin embargo, en este trabajo se proporcionan importantes elementos para implementar un control de inventarios en un problema real.

Cabe señalar que siguiendo en la misma linea de investigación quedan aspectos por estudiar que podrían generar trabajos futuros. Por ejemplo podría estudiarse el problema de cómo determinar la distribución de probabilidad para una demanda variante en el tiempo, ya que se observa que en muchos casos la demanda depende de la época del año.

Por último, se menciona que parte de este trabajo de tesis será publicado como un capítulo del libro “Probabilidad, Estadística y sus aplicaciones” del Fomento editorial de la BUAP con el titulo *Determinación de la distribución de probabilidad de la demanda en un modelo de control de inventarios*. Ver Apéndice D.

Apéndice A

Programa para el control de inventarios con horizonte N y distribución de probabilidad de la demanda conocida

```
clear all
clc

N = 8; %Periodos
CosOrd = 1.5; %Costo por ordenar
CosMan = 1; %Costo por mantener
CosEsc = 2; %Costo por escasez
p = [0.0400 0.1600 0.0800 0.1200 0.0800 0.0800 0.1600 0.0800 0.2000];
%Distribución de probabilidad de la demanda
MaxCap = 7; %Máxima capacidad del almacen
D = 8; %Valor máximo de la demanda

for i = 0:MaxCap
    CostoEsperado (1,i+1) = 0;
end

for l = 2:N+1 %Etapas
    for s = 0:MaxCap %Estados
        estado = [];
        for a = 0:MaxCap-s %Acciones
```

```
            esperado = 0;
            for w = 0:D %suma
                esperado = CosOrd*esperado
                           + p(w+1)*(CosOrd*a + (CosMan*(max(0,s+a-w)))
                           + (CosEsc*max(0,w-s-a))
                           + CostoEsperado(l-1,(max(0,s+a-w))+1));
            end
        estado = [estado esperado];
        end
        estado;
        CostoEsperado(l,s+1)=estado(1);
        DecisionOptima(l-1,s+1)=0;
        for a=1:length(estado)-1
            if estado(a+1) < CostoEsperado(l,s+1)
                CostoEsperado(l,s+1) = estado(a+1);
                DecisionOptima(l-1,s+1)=a;
            end
        end
    end
end
CostoEsperado
DecisionOptima
```

Apéndice B

Programa para el control de inventarios con horizonte N y distribución de probabilidad de la demanda desconocida

```
clear all
clc

C=[2,4,1,6,3,3,5,6,3,1,4,2,6,6,4,1,3,5,2,4]
N = 10 %Horizonte de planeación;
CosOrd = 3; %Costo por ordenar
CosMan = 4; %Costo por mantener
CosEsc = 4; %Costo por escasez
MaxCap = 5; %Máxima capacidad del almacen
n = max(C); %Valos máximo de la demanda

%Generación de distribución de probabiidad
T = zeros(1,n+1); %Vector auxiliar
for j=1:n+1
   for i =1:length(C)
        if C(i)== j-1
            T(j) = T(j)+1;
        end
   end
end
```

```
T;%Vector de conteo
for j=1:n+1
    p(j) = T(j)/Total;
end
p; %Distribución de la demanda

%Programación dinámica
for i = 0:MaxCap
    CostoFinal (1,i+1) = 0; %Costo final
end
for l = 2:N+1 %Etapas
    for s = 0:MaxCap %Estados
        estado = [];
        for a = 0:MaxCap-s %Acciones
            esperado = a;
            for w = 0:n %suma
                esperado = CosOrd*esperado
                         + p(w+1)*((CosMan*(max(0, s + a - w)))
                         + (CosEsc*max(0, w - s - a))
                         +  CostoFinal(l-1,(max(0,s + a - w))+1));
            end
        estado = [estado esperado];
        end
        estado;
        CostoFinal(l,s+1)=estado(1);
        PoliticaOptima(l-1,s+1)=0;
        for a=1:length(estado)-1
            if estado(a+1) < CostoFinal(l,s+1)
                CostoFinal(l,s+1) = estado(a+1);
                PoliticaOptima(l-1,s+1)=a;
            end
        end
    end
end
CostoFinal
PoliticaOptima
```

Apéndice C

Programa para el control de inventario con horizonte rodante, distribución de probabilidad de la demanda desconocida y costos variantes en el tiempo

```
clear all
clc

%Introducci\U{f3}n de datos
Aux=1;
disp('Número de observaciones de la demanda')
    O = input(' ');
disp('Introduce las observaciones')
for i=1:O
    C(i)=input(' ');
end
C %Vector de observaciones de la demanda

disp('Introduce el costo por ordenar')
  CosOrd  =  input(' ');
disp('Introduce el costo por mantener')
   CosMan  =  input(' ');
disp('Introduce el costo por escazes')
```

```
   CosEsc =  input(' ');
disp('Introduce la capacidad del almacen')
   MaxCap  =  input(' ');
disp('Quieres una acción de control Si=1 No=2')
   F  =  input(' ');

PoliticaHorizonteRodante=[];
while F==1
    %Cambio de datos agregados
    disp('Desea agregar una observación de la demanda Si=1 No=2 ')
        D  =  input(' ');
    if D==1
        for i=1:length(C)-1
            Caux (i)=C(i+1);
        end
        disp('Introduce el nuevo dato ')
        Caux(0) =  input(' ');
        C=Caux;
     end

     disp('Desea cambiar costos Si=1 No=2 ')
        D2  =  input(' ');
     if D2==1
        disp('Introduce el costo por ordenar')
            CosOrd  =  input(' ');
        disp('Introduce el costo por mantener')
            CosMan  =  input(' ');
        disp('Introduce el costo por escazes')
            CosEsc  =  input(' ');
     end

    %Determinación de la probabilidad de la demanda
    n = max(C); %Número máximo de las observaciones
    T = zeros(1,n+1); %Vector auxiliar
```

```
%Vector de conteo
for j=1:n+1
    for i =1:length(C)
        if C(i)== j-1
            T(j) = T(j)+1;
        end
    end
end
T;
for j=1:n+1
    p(j) = T(j)/length(C);
end
p %Distribución de la demanda

%Calculo de la politíca óptima con Programación dinámica
N = 10; %Periodos
for i = 0:MaxCap
    CostoFinal(1,i+1) = 0; %Costo terminal
end

for l = 2:N+1 %Etapas
    for s = 0:MaxCap %Estados
        estado = [];
        for a = 0:MaxCap-s %Acciones
            esperado = 0;
            for w = 0:n %suma
                esperado = CosOrd*esperado +
                           p(w+1)*((CosMan*(max(0, s + a - w))) +
                           (CosEsc*max(0, w - s - a)) +
                            CostoFinal(l-1,(max(0,s+a-w))+1));
            end
            estado = [estado esperado];
        end
        estado;
        CostoFinal(l,s+1)=estado(1);
        PoliticaOptima(l-1,s+1)=0;
```

```
            for a=1:length(estado)-1
                if estado(a+1) < CostoFinal(l,s+1)
                    CostoFinal(l,s+1) = estado(a+1);
                    PoliticaOptima(l-1,s+1)=a;
                end
            end
        end
    end


    PoliticaHorizonteRodante=[PoliticaHorizonteRodante; PoliticaOptima(1,:)]
    Aux=Aux+1;

    disp('Quieres una acción de control Si=1 No=2')
    F  =  input(' ');
    if F==2
        break
    end
end
```

Apéndice D

Carta de aceptación para publicación

CAPE
CUERPO ACADÉMICO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA BUAP

Puebla, Puebla a 29 de enero de 2019

Estimados: Erika Hernández y Rocío Ilhuicatzi Roldán
PRESENTES

Por medio de la presente me es grato enviarles un afectuoso saludo y al mismo tiempo hacer de su conocimiento que su trabajo titulado

Determinación de la distribución de probabilidad de la demanda en un modelo de control de inventarios

Ha sido ACEPTADO para su publicación en el libro "Probabilidad, Estadística y sus Aplicaciones" (Fomento editorial BUAP) cuyo ISBN se encuentra actualmente en trámite.

Sin más por el momento, agradezco su atención

ATENTAMENTE

Víctor Hugo Vazquez Guevara
FCFM-BUAP
Por el comité editorial

Bibliografía

[1] Ahiska S. S., Appaji S. R., King R. E. y Warsing Jr. D. P. *A Markov decision process-based policy characterization approach for a stochastic inventory control problem with unreliable sourcing.* International Journal of Production Economics, Vol. 144, pp.485–496, 2013. DOI: S0925527313001370

[2] Alden J. M. y Smith R. L. *Rolling horizon procedures in nonhomogeneous Markov decision process.* Operations Research. Vol. 40, pp. 183-194, 1992.

[3] Axsater S. *Inventory control* Springer Science & Business Media, 2007, 90

[4] Bellman R.E. *Dynamic Programming*, Princeton United Press, Princeton, USA (1957).

[5] Bertsekas D. P. *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models.* Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

[6] Boutilier, Craig, Dean T., Hanks S. *Decision-theoretic planning: structural assumptions and computational leverage*, Journal of AI Research, Vol. 11, pp 1-94, 1999.

[7] Chase R. B., Jacobs F.R. y Aquilano N. J. *Administración de operaciones, producción y cadenas de suministro.* McGRAW-HILL, México , 2009.

[8] Coronado-Hernández J. R. *Análisis del efecto de algunos factores de complejidad e incertidumbre en el rendimiento de las Cadenas de Suministro. Propuesta de una herramienta de valoración basada en simulación.* Tesis de doctorado. Universidad Politécnica de Valéncia. Valencia, Diciembre de 2015.

[9] Davis K. R. y McKeown P.G. *Modelos cuantitativos para la administración.* Grupo Editorial Iberoamérica. México 1986.

[10] García Cantú A. *Enfoques prácticos para planeación y control de inventarios.* Trillas, México, 2000.

[11] García-Hernández Ma. G., Ruiz-Pinales J., Reyes A., Onaindía E., Aviña-Cervantes J. G., Ledesma-Orozco S. y Hernández-Fusilier D. *Rápida Solución de los Procesos de Decisión de Markov mediante reglamentación de acciones.*

[12] Gnedenko B. V. *Theory of Probability.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.

[13] Hernández-Lerma O. y Lasserre J. B. *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria.* Springer, New York, 1996.

[14] Hiller F. S., Hiller M. S. y Lieberman G. J. *Métodos cuantitativos para la administración un enfoque de modelos y casos de estudio, con hoja de cálcilo.* McGraw-Hill

[15] Noori H. y Radford R. *Administración de operaciones y producción: calidad total y respuesta sensible rápida.* Mc Graw Hill, Colombia, 1997.

[16] Puterman M. L. *Markov decision process: discrete stochastic dynamic programming.* John Wiley & Sons, New Jersey, 1994.

[17] Rong K. *Research on Multi-Stage Inventory Model by Markov Decision Process* . Physics Procedia, Vol. 33, pp. 1074 – 1077, 2012. DOI: S1875389212014897

[18] Taha Hamdy A. *Investigación de operaciones.* Novena edición. Pearson Eduación, México, 2012, ISBN: 978-607-32-0796-6